COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA - MAT103 - FEAUSP
6ª Lista de Exercícios - 2º semestre de 2013
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Calcule as derivadas:

a) $y = 5x^3 + 6x - 1$ b) $s = \sqrt[5]{t} + \dfrac{3}{t}$

c) $x = \dfrac{t}{t+1}$ d) $y = t\cos t$

e) $y = \dfrac{u+1}{\ln u}$ f) $x = t^3 e^t$

g) $s = e^t\,\mathrm{tg(t)}$ h) $y = \dfrac{x^3+1}{\operatorname{sen} x}$

P. Seja $y = \dfrac{x^3}{x + \sqrt{x}}$. Calcule:

a) $\dfrac{dy}{dx}$ b) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

P. Seja $y = t^2 x$, onde $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}$ supondo $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=1} = 2$ e $x = 3$ para $t = 1$ (isto é, $x(1) = 3$).

2. Considere a função $y = \dfrac{t}{x+t}$, onde $t = t(x)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ sabendo que $\left.\dfrac{dt}{dx}\right|_{x=1} = 4$ e que $t = 2$ para $x = 1$.

   Observe que t está sendo considerado como uma função de x. Neste caso, dizemos que t é a **variável dependente** e x é a **variável independente**.

P. Seja $f : I\!R \to I\!R$ derivável e $g(t) = f(t^2 + 1)$. Supondo $f'(2) = 5$, calcule $g'(1)$.

3. Seja $f : I\!R \to I\!R$ derivável e $g(x) = f(e^{2x})$ Supondo $f'(1) = 2$, calcule $g'(0)$.

4. Derive:

a) $y = \text{sen } 4x$ b) $y = \cos 5x$

c) $f(x) = e^{3x}$ d) $f(x) = \cos 8x$

e) $y = \text{sen } t^3$ f) $g(t) = \ln(2t+1)$

g) $x = e^{\text{sen } t}$ h) $f(x) = \cos e^x$

i) $y = (\text{sen } x + \cos x)^3$ j) $y = \sqrt{3x+1}$

k) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ m) $y = e^{-5x}$

n) $x = \ln(t^2 + 3t + 9)$ o) $f(x) = e^{\text{tg x}}$

p) $y = \text{sen}(\cos\ x)$ q) $g(t) = (t^2+3)^4$

r) $f(x) = \cos(x^2+3)$ s) $y = \sqrt{x + e^x}$

t) $y = \text{tg3x}$ u) $y = \sec 3x$

5. Derive:

a) $y = xe^{3x}$ b) $y = e^x \cos\ 2x$

c) $y = e^{-x}\text{sen}\ x$ d) $y = e^{-2t}\ \text{sen}\ 3t$

e) $f(x) = e^{-x^2} + \ln(2x+1)$ f) $g(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

g) $y = \dfrac{\cos\ 5x}{\text{sen}\ 2x}$ h) $f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$

i) $y = t^3\ e^{-3t}$ j) $g(x) = e^{x^2}\ \ln(1+\sqrt{x})$

l) $y = (\text{sen}\ 3x + \cos\ 2x)^3$ m) $y = \sqrt{e^x + e^{-x}}$

n) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ o) $y = \sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}$

p) $y = x\ \ln(2x+1)$ q) $y = [\ln(x^2+1)]^3$

r) $y = \ln(\sec\ x + \text{tg x})$ s) $y = \cos^3\ x^3$

t) $f(x) = \dfrac{\cos\ x}{\text{sen}^2\ x}$ u) $f(t) = \dfrac{te^{2t}}{\ln(3t+1)}$

6. Calcule a derivada segunda:

a) $y = \text{sen } 5t$ b) $y = e^{-xr}$

c) $y = \ln(x^2+1)$ d) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

e) $y = e^{-x} - e^{-2x}$ f) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

g) $y = \dfrac{\text{sen } 3x}{e^x}$ h) $y = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$

i) $y = xe^{\frac{1}{x}}$ j) $y = x\sqrt[3]{x+2}$

P. Seja $g : I\!R \to I\!R$ diferenciável e $f(x) = x\ g(x^2)$.

a) Verifique que $f'(x) = g(x^2) + 2x^2\ g'(x^2)$.

b) Calcule $f'(1)$, supondo $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$.

7. Seja $g : I\!R \to I\!R$ diferenciável tal que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$. Calcule $f'(0)$ sendo f dada por $f(x) = e^x\ g(3x+1)$.

8. Determine a equação das retas abaixo:

a) Tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e paralela à reta $y = \dfrac{1}{2}x + 3$;

b) Tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 3x$ e paralela à reta $y = 6x - 1$;

c) Tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ e perpendicular à reta $3x + y = 3$;

d) Tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$ e perpendicular à reta $2y + x = 3$;

e) Passando pela origem e tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$;

f) Passando por $(3, 0)$ e normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ em (a, b);

g) Tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ e passando por $(0, 2)$;

h) Tangente aos gráficos de $f(x) = -x^2$ e de $g(x) = \dfrac{1}{2} + x^2$;

i) Normal ao gráfico de $y = x^3$, passando por $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$ e não vertical;

j) Tangentes ao gráfico de $y = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ e paralela ao eixo x;

k) Tangentes ao gráfico de $y = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 8x + 12$ e paralela à $r : 8x - y + \pi = 0$.

9. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico. Calcule os limites necessários.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

d) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

e) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

g) $x = \dfrac{t}{1+t^2}$

h) $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$

i) $x = 2 - e^{-t}$

j) $y = e^{-x^2}$

k) $f(x) = e^{2x} - e^x$

l) $g(t) = e^{\frac{1}{t}}$

m) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$

n) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$

o) $g(x) = xe^x$

p) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$

q) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

r) $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2(x-1)}$

s) $f(x) = \dfrac{\ln\ x}{x}$

t) $g(x) = x - e^x$

10. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\ x}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln\ x}$

11. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = xe^{-2x}$

d) $x(t) = t^2 + \dfrac{1}{t}$

e) $g(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

f) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$

g) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

h) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

i) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

j) $f(x) = x\ \ln\ x$

12. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\ x}{e^{3x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{sen}\ x\ \ln\ x$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\cos x)\ln\ x$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)^{\frac{1}{\ln\ x}}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\dfrac{1}{x}+\ln\ x\right]$

j) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3e^{-4x}$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} [x-\sqrt[3]{x^3-x}]$

13. Esboce o gráfico das funções abaixo. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento. Analise às funções quanto à concavidade. Determine, se existirem as assíntotas horizontais, verticais e oblíquas. Determine os limites em $\pm\infty$, se for o caso. Determine os pontos de mínimo e de máximo locais e globais e os valores de mínimo e de máximo, locais e globais. Determine os pontos de inflexão.

a) $f(x)=x^3-3x^2+3x$

b) $f(x)=x^3-x^2+1$

c) $y=\sqrt{x^2-4}$

d) $y=\dfrac{x}{x+1}$

e) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

f) $g(x)=xe^{-3x}$

g) $f(x)=2x+1+e^{-x}$

h) $f(x)=e^{-x^2}$

i) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3x^2}{2}+2x+1$

j) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$

k) $y=\dfrac{x^3}{x^2+4}$

l) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

m) $y=\dfrac{x^3-x+1}{x^2}$

n) $y=e^x-e^{3x}$

o) $f(x)=x^4-2x^2$

p) $y=\sqrt{x^2+2x+5}$

q) $y=\dfrac{x-1}{x^2}$

r) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$

s) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2}$

t) $y=\dfrac{4x+3x^2}{1+x^2}$

14. Analogamente ao Exercício 13, esboce o gráfico das funções abaixo.

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

b) $f(x) = xe^{-2x}$

c) $f(x) = e^x - e^{-3x}$

d) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$

e) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

f) $x(t) = te^{-t}$

g) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

h) $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$