

Fundamentos de Análise Clássica.
O Supremo, Teorema do Valor Intermediário,
Teoremas de Bolzano e Weierstrass e
a Integrabilidade das Funções Contínuas

O que é uma derivada? Resposta: um limite.

O que é uma integral? Resposta: um limite.

O que é uma série infinita? Resposta: um limite.

O que é então um limite? Resposta: um número.

Muito bem! O que é então um número? ¹

Definição. *Seja X um subconjunto não vazio de \mathbb{R} . Então,*

- *O maior elemento de X , quando existe, é o máximo de X , indicado $\max X$.*
- *O menor elemento de X , quando existe, é o mínimo de X , indicado $\min X$.*
- *$M \in \mathbb{R}$ é um majorante de X se $x \leq M, \forall x \in X$.*
- *$m \in \mathbb{R}$ é um minorante de X se $m \leq x, \forall x \in X$.*

Exemplo 1. Consideremos os seguintes subconjunto de \mathbb{R} :

$$(a) X = [0, 1] \quad (b) X = (0, 1) \quad (c) X = (-\infty, -2)$$

$$(d) X = (2, +\infty) \quad (e) X = \mathbb{Q} \cap (0, 7).$$

Analisando os casos (a), (b), (c), (d) e (e) acima, segue o que encontramos.

- (a) O mínimo de X é $\min X = 0$, o máximo de X é $\max X = 1$, o conjunto dos minorantes de X é $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ minora } X\} = (-\infty, 0]$ e o conjunto dos majorantes de X é $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [1, +\infty)$.

¹Vide Analysis by Its History, E. Hairer and G. Wanner, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, N. Y., 2000, p. 168.

- (b) Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 0]$ e o conjunto dos majorantes é $[1, +\infty)$.
- (c) Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto X não admite minorante e o conjunto dos majorantes é $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [-2, +\infty)$.
- (d) Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 2]$ e, por último, X não admite majorante.
- (e) Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 0]$ e o conjunto dos majorantes é $[7, +\infty)$.

Definição. *Seja X um subconjunto não vazio de \mathbb{R} . Então,*

- *O menor majorante de X , se existir, é o supremo de X , indicado $\sup X$. Isto é,*

$$\sup X = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ é majorante de } X\} .$$

- *O maior minorante de X , se existir, é o ínfimo de X , indicado $\inf X$. Isto é,*

$$\inf X = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ é minorante de } X\} .$$

Exemplo 2. Consideremos os seguintes subconjunto de \mathbb{R} :

$$(a) X = [0, 1] \quad (b) X = (0, 1) \quad (c) X = (-\infty, -2)$$

$$(d) X = (2, +\infty) \quad (e) X = \mathbb{Q} \cap (0, 7).$$

Analizando cada um dos casos acima, segue o que encontramos para X .

- (a) $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.
- (b) $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.
- (c) Não existe $\inf X$ e $\sup X = -2$.
- (d) $\inf X = 2$ e não existe $\sup X$.
- (e) $\inf X = 0$ e $\sup X = 7$.

Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então,

- X é limitado superiormente se X admite um majorante.
- X é limitado inferiormente se X admite um minorante.

Comentário. A Propriedade do Supremo a seguir, enunciada por Bolzano² em 1817 [vide Jahnke, p.175], é uma das mais fundamentais em matemática e é em alguns textos apresentada como um axioma [vide E. L. Lima] e em outros é provado como um teorema [vide H. L. Guidorizzi, Apêndice 6]. Neste texto apresentamos apenas seu enunciado e convidamos o leitor a consultar tais obras.

(Propriedade do Supremo) *Todo subconjunto de \mathbb{R} não vazio e limitado superiormente admite supremo.*

Corolário (Propriedade de Aproximação). *Seja X um subconjunto não vazio de \mathbb{R} e $s = \sup X$. Se a é real e $a < s$, então existe $x \in X$ tal que*

$$a < x \leq s .$$

Prova.

Como s é um majorante de X , temos $x \leq s$, para todo $x \in X$. Assim, supondo que não exista x em X tal que $a < x \leq s$ temos $x \leq a$, para todo $x \in X$, e portanto a é um majorante de X e $a < s$ \nexists

Analogamente à Propriedade do Supremo e seu corolário temos,

(Propriedade do Ínfimo) *Todo subconjunto de \mathbb{R} não vazio e limitado inferiormente admite ínfimo.*

Prova.

Se X é o conjunto em questão, basta aplicar a Propriedade do Supremo ao conjunto $-X = \{-x : x \in X\}$ \clubsuit

Seguem algumas das principais consequências da Propriedade do Supremo.

²B. Bolzano (1781-1848), padre tcheco, viveu em Praga e teve sua obra redescoberta e reconhecida postumamente em 1870.

Propriedade de Arquimedes. *Seja $x > 0$ e y um número real. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Prova.

Suponhamos, por absurdo, que $nx \leq y$ para todo natural n . Então, o conjunto

$$X = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$$

é obviamente não-vazio e majorado por y e assim, pela Propriedade do Supremo, admite supremo. Seja $s = \sup X$. Notando que $x > 0$, o supremo é o menor dos majorantes e $s - x < s$, segue que $s - x$ não é um majorante de X e existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - x < mx$, o que implica $s < (m + 1)x$ e $(m + 1)x \in X$ \nmid

Corolário 1. *O conjunto \mathbb{N} não é limitado superiormente em \mathbb{R} .*

Prova.

Dado $x \in \mathbb{R}$, pela propriedade de Arquimedes e como $1 > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = n \cdot 1 > x$ \clubsuit

Corolário 2 (Não há infinitésimos em \mathbb{R}). *Para todo $x > 0$, existe um natural n tal que*

$$\frac{1}{n} < x.$$

Prova.

Como $x > 0$, pela propriedade arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > 1$ e portanto

$$\frac{1}{n} < x \clubsuit$$

Teorema do Anulamento (Bolzano-Weierstrass) (1817).³ *Se $f; [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

³Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.

Prova.

O conjunto

$$X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

é tal que $a \in X$ e é limitado superiormente por b . Logo, pela Propriedade do Supremo, existe $c = \sup X$ e $a \leq c \leq b$.

Mostremos, aplicando o teorema da conservação do sinal à função contínua f , que tanto $f(c) < 0$ como $f(c) > 0$ acarretam contradições.

Se $f(c) < 0$ temos $c < b$ e $f < 0$ em algum intervalo $[c, c + \delta) \subset [a, b]$, com $\delta > 0$ e suficientemente pequeno. Logo, existe $x \in [a, b]$ tal que $x > c$ e $f(x) < 0$ \nexists

Se $f(c) > 0$ temos $a < c$ e $f > 0$ em algum intervalo $(c - \delta, c] \subset [a, b]$, com $\delta > 0$ e suficientemente pequeno. Porém, pela propriedade de aproximação, existe $x \in (c - \delta, c]$ tal que $f(x) < 0$ \nexists

Teorema do Valor Intermediário. *Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ então, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.*

Prova.

Se $f(a) < \gamma < f(b)$, aplicamos o teorema de Bolzano-Weierstrass à função $g(x) = f(x) - \gamma$ \clubsuit

Definições. *Uma sequência em \mathbb{R} é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, indicada $x = (x_n)$, com $x_n = x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevemos então, $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ e ainda, $(x_n) = (x_n)_{\mathbb{N}} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainda mais,*

- Se $\{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ é um subconjunto infinito de \mathbb{N} , então $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ é uma subsequência da sequência (x_n) .
- (x_n) é uma sequência crescente [decrescente] se $x_n \geq x_m$ [$x_n \leq x_m$] para todo $n \geq m$, onde n e m pertencem a \mathbb{N} .

Notemos que toda subsequência é uma sequência.

Exemplos 3. Temos, em \mathbb{R} , os exemplos abaixo de seqüências e subsequências.

- Se $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(x_n) = (1, 2, 3, \dots)$ é a seqüência estritamente crescente dos naturais.
- Se $y_n = 2n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então (y_n) é a subsequência dos pares da seqüência dos naturais.
- Se $r \in \mathbb{R}$ e $s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então (s_n) é a seqüência das somas finitas das progressões geométricas de razão r , de 1 a r^n .
- Se $x_n = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

é a seqüência dos inversos dos naturais.

- Se $x_n = \sqrt[n]{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $(x_{2n+1}) = (\sqrt[2n+1]{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência da seqüência $(\sqrt[n]{n})$.

Lema. *Toda seqüência (x_n) admite ou uma subsequência crescente ou uma subsequência decrescente.*

Prova.

Chamemos n de um “ponto de pico” da seqüência (x_n) se ocorre $x_m < x_n$ para todo $m > n$.

- ◊ Se (x_n) tem uma quantidade infinita de pontos de pico, $\{n_1 < n_2 < \dots\}$, então a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente decrescente pois temos

$$x_{n_1} > x_{n_2} > \dots$$

- ◊ Se (x_n) tem uma quantidade finita de pontos de pico, seja n_1 um natural estritamente maior que todos os pontos de pico de (x_n) . Como n_1 não é um ponto de pico então existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$ e, como n_2 também não é ponto de pico segue que existe $n_3 > n_2$, $n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Iterando, obtemos uma subsequência crescente da seqüência (x_n) ♣

Definições. Seja (x_n) uma sequência em \mathbb{R} . Dizemos que a sequência (x_n)

- converge a $L \in \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|x_n - L| < \epsilon$ se $n \geq n_0$.

Temos então a notação

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L.$$

- diverge a $+\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ se $n \geq n_0$.

Utilizamos então a notação

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

- diverge a $-\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < M$ se $n \geq n_0$.

Utilizamos então a notação

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty.$$

- diverge se não existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$.

Exemplos 4. Seguem exemplos de sequências convergentes e divergentes.

- Se $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

- Se $|r| < 1$ e $s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{1}{1-r}.$$

- Se $x_n = 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- Se

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

então segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Lema. Se (x_n) é crescente [decrecente] e limitada então (x_n) é convergente.

Prova.

Como $(-x_n)$ é crescente se (x_n) é decrescente, basta supormos (x_n) crescente. Então, pela propriedade do supremo segue que existe

$$\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo, $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq \alpha$. Então, como (x_n) é crescente, para todo $n \geq n_0$ temos $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \alpha$, o que implica $|x_n - \alpha| < \epsilon$ se $n \geq n_0$ ♣

Teorema. Toda seqüência limitada admite ao menos uma subsequência convergente.

Prova.

Segue dos dois lemas anteriores ♣

Proposição. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e (x_n) é uma seqüência contida em X e convergente a $x_0 \in X$ então a seqüência $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0,$$

segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \delta$ se $n \geq n_0$ e então obtemos $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ ♣

Teorema da Limitação. Se f é contínua em $[a, b]$ então f é limitada.

Prova. Por contradição.

Bisectando⁴ $I_1 = [a, b]$, seja I_2 um dos subintervalos

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \text{ e } \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

⁴Raciocícios por biseção foram muito utilizados por Bolzano e também se encontram em Elementos, Euclides, Livro X.

em que f não é limitada (existe ao menos um). Repetindo o argumento, bisectamos I_2 e selecionamos I_3 um subintervalo desta biseção, no qual f não é limitada. Iterando tal processo obtemos uma sequência de intervalos encaixantes $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da forma $I_n = [x_n, y_n]$, com $I_{n+1} \subset I_n$, satisfazendo

$$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

A sequência (x_n) é crescente e a sequência (y_n) é decrescente, ambas contidas em $[a, b]$. Temos $x_n \leq y_m$ quaisquer que sejam n e m em \mathbb{N} [se $m \leq n$ temos $x_n \leq y_n \leq y_m$ e, se $m \geq n$, $x_n \leq x_m \leq y_m$]. Pelas propriedades do supremo e do ínfimo, segue que (x_n) converge a $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e (y_n) converge a $y = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ e, ainda, $x_n \leq x \leq y \leq y_n$ [pois temos $x_n \leq y_m$, quaisquer que sejam n e m em \mathbb{N} , e fixando um arbitrário $m \in \mathbb{N}$ da definição de supremo segue $x \leq y_m$, para m arbitrário, e da definição de ínfimo segue $x \leq y \leq y_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$]. Desta forma temos

$$0 \leq y - x \leq \frac{b-a}{2^n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e portanto, como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0,$$

pelo teorema do confronto segue $y - x = 0$ e $x = y$.

Como f é contínua, existe um intervalo $(x - \delta, x + \delta)$, $\delta > 0$, em que f é limitada. Porém, tal intervalo contém algum intervalo I_n no qual f é não limitada \nexists

Teorema de Weierstrass. *Se f é contínua em $[a, b]$ então existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

Prova.

Como $X = \{f(x); x \in [a, b]\} = f([a, b])$ é limitado, pelas propriedades do supremo e do ínfimo existem $M = \sup X$ e $m = \inf X$. Mostremos que $M \in f([a, b])$ (a prova para m é análoga).

Se $f(x) < M$, para todo $x \in [a, b]$, então temos

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \text{ para todo } x \in [a, b],$$

e g é contínua. Pelo teorema da limitação segue que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < \beta.$$

Donde segue

$$M - f(x) > \frac{1}{\beta},$$

o que implica

$$f(x) < M - \frac{1}{\beta} \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Sendo assim, M não é supremo de $X \not\zeta$

Integração de Funções Contínuas.

Para provarmos que funções contínuas em $[a, b]$ são integráveis, recordemos a definição de integral.

Definição. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, uma partição

$$P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\} \text{ de } [a, b]$$

e uma escolha

$$\mathcal{E} = \{c_i : c_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$

subordinada à partição P , a soma de Riemann de f em relação à partição P e à escolha \mathcal{E} é

$$S(f; P; \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \text{ com } \Delta x_i = (x_i - x_{i-1}).$$

A norma de P é

$$|P| = \max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\}$$

e $[x_{i-1}, x_i]$, onde $1 \leq i \leq n$, é um subintervalo determinado por P .

Definição. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é Riemann-integrável, ou simplesmente integrável, se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo: para toda partição P de $[a, b]$ com norma $|P| < \delta$, para qualquer que seja a escolha \mathcal{E} subordinada à partição P temos

$$|S(f; P; \mathcal{E}) - L| < \epsilon .$$

Notações. Escrevemos então,

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L \quad \text{e}$$

$$L = \int_a^b f(x) dx .$$

O número $\int_a^b f(x) dx$ é chamado de integral de f em $[a, b]$.

No que segue mantemos a notação acima. Se f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema de Weierstrass f é limitada em $[a, b]$ e podemos introduzir os conceitos a seguir.

Definição. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ é uma partição de $[a, b]$, a soma inferior e a soma superior⁵ de f em relação à partição P são, respectivamente,

$$\underline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e}$$

$$\overline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

A seguir, utilizando uma idéia que remonta a Arquimedes, mostraremos que o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores e que estes são iguais e então que f é integrável.

Notação. Dado $A \subset [a, b]$, definimos

$$\min_A f = \min\{f(x) : x \in A\} \quad \text{e} \quad \max_A f = \max\{f(x) : x \in A\}.$$

⁵Estes conceitos foram introduzidos pelo matemático francês G. Darboux (1842-1917)

Observação 1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Valem as propriedades abaixo.

(a) Se I e J são subintervalos de $[a, b]$ e $I \subset J$, então

$$\min_J f \leq \min_I f \leq \max_I f \leq \max_J f.$$

(b) Se P_1 e P_2 são partições de $[a, b]$ então, ordenando $P_1 \cup P_2$ temos que $P_1 \cup P_2$ é também uma partição de $[a, b]$.

(c) Se P_1 e P_2 são partições de $[a, b]$ então

$$\underline{S}(f; P_1) \leq \underline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_2).$$

(d) Se P é uma partição de $[a, b]$ e \mathcal{E} é uma escolha qualquer subordinada à partição P então,

$$\underline{S}(f; P) \leq S(f; P; \mathcal{E}) \leq \overline{S}(f; P).$$

Prova.

(a) Trivial.

(b) Óbvio.

(c) Se $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, é um subintervalo determinado pela partição P_1 então I_i é a reunião dos subintervalos $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, para $j = 1, \dots, N$ e $N \geq n$, determinados pela partição $P_1 \cup P_2$ que estão contidos em I_i . Desta forma, pelo item (a) temos,

$$\left(\min_{I_i} f \right) \Delta x_i = \left(\min_{I_i} f \right) \sum_{j : J_j \subset I_i} \Delta y_j \leq \sum_{j : J_j \subset I_i} \left(\min_{J_j} f \right) \Delta y_j$$
 e

e

$$\sum_{j : J_j \subset I_i} \left(\max_{J_j} f \right) \Delta y_j \leq \left(\max_{I_i} f \right) \sum_{j : J_j \subset I_i} \Delta y_j = \left(\max_{I_i} f \right) \Delta x_i.$$

Então, destacando o primeiro e o terceiro termos das equações acima e somando para $i = 1, \dots, n$ obtemos

$$\underline{S}(f; P_1) \leq \underline{S}(f; P_1 \cup P_2) \quad \text{e} \quad \overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_1)$$

e, por analogia, $\overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_2)$.

Como temos $\underline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_1 \cup P_2)$, provamos (c).

(d) Evidente♣

Proposição. Se f é contínua em $[a, b]$ então existem

$$\begin{cases} \alpha = \sup \{ \underline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b] \} \\ e \\ \beta = \inf \{ \overline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b] \} \end{cases}$$

e, ainda, temos $\alpha \leq \beta$.

Prova.

Sejam P_1 e P_2 duas partições arbitrárias de $[a, b]$. Pela Observação 1(c) segue

$$\underline{S}(f; P_1) \leq \overline{S}(f; P_2).$$

Assim, fixo P_2 o conjunto

$$\{ \underline{S}(f; P_1) : P_1 \text{ é partição de } [a, b] \}$$

é não vazio e majorado por $\overline{S}(f; P_2)$. Logo, temos $\alpha \leq \overline{S}(f; P_2)$ e, como esta desigualdade é válida para toda partição P_2 de $[a, b]$ segue que α é um minorante do conjunto

$$\{ \overline{S}(f; P_2) : P_2 \text{ é partição de } [a, b] \}$$

e portanto concluímos $\alpha \leq \beta$ ♣

Proposição. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e (x_n) é uma sequência contida em X e convergente a $x_0 \in X$ então a sequência $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0,$$

segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que temos $|x_n - x_0| < \delta$ se $n \geq n_0$. Sendo assim, temos $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ ♣

Definição. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, é uniformemente contínua se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } x, y \in X \text{ então: } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Teorema (Heine, 1872).⁶ Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é uniformemente contínua.

Prova. Por contradição.

Suponhamos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$, existem x_n e y_n em $[a, b]$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0.$$

Sendo limitada, (x_n) admite subsequência convergente (x_{n_k}) e reenumerando esta se necessário supomos, sem perda de generalidade, (x_n) convergente a x . Notemos que como temos $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então segue $x \in [a, b]$. Ainda mais, como

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos que a sequência (y_n) também converge a x . Concluimos então que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0 \not\checkmark$$

Teorema. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável.

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Seja $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ com norma

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i < \delta.$$

⁶Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão.

Sejam

$$m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Temos

$$0 \leq \overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon.$$

Como

$$\underline{S}(f; P) \leq \alpha \leq \beta \leq \overline{S}(f; P),$$

onde α é o supremo do conjunto das somas inferiores de f e β é o ínfimo do conjunto das somas superiores de f , ambas relativas às partições de $[a, b]$, temos

$$0 \leq \beta - \alpha \leq \overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) < \epsilon$$

e, como ϵ é arbitrário, $\alpha = \beta$. Seja $L = \alpha$. Se \mathcal{E} é uma escolha qualquer relativa a P , pela Observação 1(d) temos

$$S(f; P; \mathcal{E}) \leq \overline{S}(f; P) = \underline{S}(f; P) + [\overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P)] < \alpha + \epsilon = L + \epsilon \quad \text{e}$$

$$L - \epsilon = \beta - \epsilon < \overline{S}(f; P) - [\overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P)] = \underline{S}(f; P) \leq S(f; P; \mathcal{E}).$$

Donde segue

$$L - \epsilon < S(f; P; \mathcal{E}) < L + \epsilon,$$

para toda partição P tal que $|P| < \delta$, qualquer que seja a escolha \mathcal{E} relativa à partição P . Logo, f é integrável e a integral de f é $L = \alpha = \beta$.

Isto é, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sup \{ \underline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b] \} \\ &= \inf \{ \overline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b] \} \spadesuit \end{aligned}$$

Referências.

1. Fitzpatrick, P. M., Advanced Calculus, Pure and Applied Undergrad. Texts, 2nd. ed., AMS, 2009.
2. Guidorizzi, Um Curso de Cálculo, Vol 1, 5 edição, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.
3. Hairer, E. and Wanner, G., Analysis by Its History, UTM, Springer, New York, 1996.
4. Jahnle, H. N., editor, A History of Analysis, American Mathematical Society, 2003.
5. Lima, E. L., Curso de Análise, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
6. Spivak, M., Calculus, 4th edition, Publish or Perish, Inc., Houston, 2008.