MAT 103 - Complementos de Matemática para Contabilidade - FEAUSP

Segundo semestre de 2015

INTEGRAL NA RETA

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

1. Introdução.

Suponhamos uma torneira aberta em uma piscina e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos $[0, T]$, é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por $Q(t)$ a quantidade de água no recipiente no instante t e introduzindo instantes intermediários $0 = t_0 < \cdots < t_i < \cdots < t_n = T$, a variação de $Q(t)$ no período $[0, T]$ é a soma das variações nos subintervalos temporais. Assim,

$$(1) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} [Q(t_i) - Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}.$$

A taxa de variação de $Q = Q(t)$ em $[t_{i-1}, t_i]$ coincide com (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação) a vazão (velocidade de escoamento) num determinado instante $\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$. Isto é, pondo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ obtemos

$$(2) \qquad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1} - t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\overline{t_i}).$$

Combinando (1) e (2) encontramos

$$(3) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} Q'(\overline{t_i}) \Delta t_i.$$

Definimos **a integral da função** Q'

$$\left[\text{denotada } \int_0^T Q'(t)dt \right]$$

como o limite dos somatórios

$$\sum_{i=1}^{n} Q'(c_i) \Delta t_i \ , \ c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i],$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero. Assim, se tal limite existir, e ele existe se a função Q' é continua, temos

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t)dt \clubsuit$$

Interpretação. A variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado.

Notando que Q é uma primitiva de Q' e trocando Q' por f é fácil ver que podemos reenunciar o resultado acima como: dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e F uma primitiva de f temos,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \ .$$

Os cálculos acima constituem com um mínimo de cuidados uma demonstração do primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, como mostramos a seguir.

2. Definição de Integral e Primeiro TFC.

Teorema (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo). *Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável e tais que $F' = f$. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Prova.

Por definição do conceito integral, a função f é **limitada** e temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,,$$

onde

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\} \text{ é uma } \textbf{partição} \text{ de } [a, b],$$

$$|\mathcal{P}| = \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\} \text{ é a } \textbf{norma} \text{ da partição } \mathcal{P},$$

$$\mathcal{E} = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

é uma **escolha** arbitrária de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ subordinada à partição $\mathcal{P}$ e

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,,$$

é a **soma de Riemann** relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha $\mathcal{E}$.

A seguir, seja

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

uma partição qualquer de $[a, b]$. Temos

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})].$$

Pelo TVM para derivadas, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i.$$

Logo, como $F'(c_i) = f(c_i)$, a soma de Riemmann de f relativa a esta partição $\mathcal{P}$ e a esta particular escolha $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ é

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Assim, para toda partição $\mathcal{P}$ existe uma escolha $\mathcal{E}$ tal que o valor da soma de Riemann correspondente é $F(b) - F(a)$.

Portanto, como existe o limite para escolhas arbitrárias subordinadas a uma partição, tal limite é igual ao valor já obtido

$$F(b) - F(a)\,\clubsuit$$

Assumiremos neste texto o seguinte resultado,

Teorema (Existência da integral para funções contínuas). *Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, f é integrável.*

Prova. Vide

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT103-FEA-SUPREMO-2015.pdf`

3. Positividade.

Teorema (Propriedade de Positividade). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f \geq 0$ e $f(x_0) > 0$ para algum ponto $x_0 \in [a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Prova.

Suporemos $x_0 \in (a,b)$ pois a prova é semelhante nos casos $x_0 = a$ e $x_0 = b$. Por continuidade, existe um intervalo $J = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a,b)$ tal que

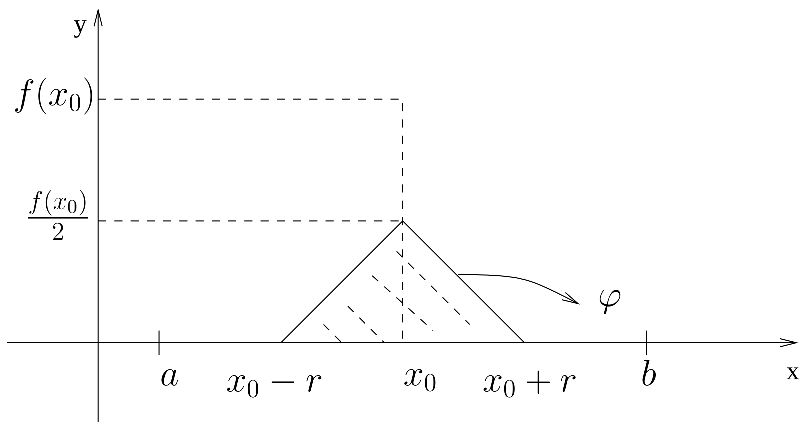

Figura 1: A integral de φ, com $f \geq \varphi \geq 0$.

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \text{ para todo } x \ \in [x_0 - r\,, x_0 + r].$$

Então, a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (vide figura acima) definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, \text{ se } x \in [a, x_0 - r] \text{ ou se } x \in [x_0 + r, b], \\ \varphi(x_0) = \frac{f(x_0)}{2} \text{ e} \\ \text{linear sobre os segmentos } [x_0 - r, x_0] \text{ e } [x_0 + r, b], \end{cases}$$

é contínua e satisfaz $f(x) \geq \varphi(x)$ para todo $\in [a,b]$. Ainda mais,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\geq \int_a^b \varphi(x)\,dx \\ &= \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \varphi(x)\,dx \\ &= \frac{f(x_0) r}{2} > 0 \clubsuit \end{aligned}$$

4. Primeiro TVM para Integrais e Segundo TFC.

Teorema (Primeiro TVM para Integrais). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f contínua. Então, existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Prova. Vide interpretação geométrica abaixo.

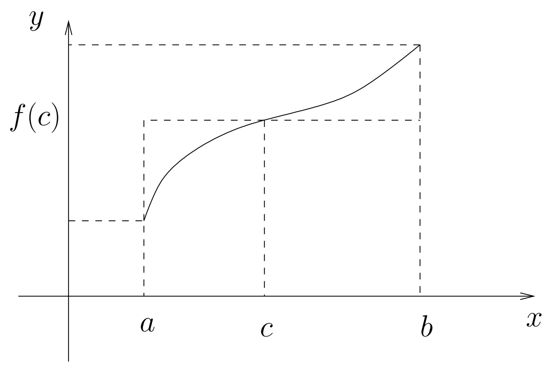

Figura 2: Interpretação geométrica ao Primeiro TVM para Integrais. A área abaixo do gráfico de $f > 0$ é igual à área do retângulo de base $[a,b]$ e altura $f(c)$.

Se f é constante é óbvio que qualquer c em (a,b) satisfaz o desejado.

Se f não é constante, sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f, respectivamente. Então obtemos $m \le f(x) \le M$, para todo $x \in [a,b]$. Pelo teorema do valor intermediário existe $x_0 \in [a,b]$ com $m < f(x_0) < M$. Pela propriedade de positividade (para $m - f$ e $M - f$) segue

$$\int_a^b [f(x) - m]\,dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b [M - f(x)]\,dx > 0.$$

Logo,

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx \quad \text{e} \quad m < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c no intervalo aberto de extremidades x_1 e x_2 tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \clubsuit$$

Interpretação Aritmética para o Primeiro TVM para Integrais.

Dados n números reais $y_1, y_2, \ldots, y_n$, a sua média aritmética (discreta) M é

$$M = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

Analogamente, dada uma coleção de números $y = f(x)$, onde $a \leq x \leq b$, interpretamos o número

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

como a média aritmética dos valores $f(x)$ [ou, média aritmética de f], obviamente supondo $a < b$ e que a integral existe.

Com tal interpretação, o primeiro teorema do valor médio para integrais mostra que dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \text{ média aritmética de } f.$$

Passamos então a provar o segundo teorema fundamental do cálculo.

Teorema (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, está bem definida a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,,$$

e ainda, F é uma primitiva de f. Isto é, F é derivável e

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Prova.

◇ Como f é integrável em $[a, b]$, segue que f é integrável no intervalo $[a, x]$ para cada $x \in [a, b]$. Por favor, cheque.

◇ Propriedades elementares de integrais e o TVM para integrais mostram

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\, dt \;-\; \int_a^x f(t)\, dt}{h}$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$
$$= \frac{f(c)h}{h} = f(c),$$

para algum $c = c(h)$ entre x e $x + h$. Se $h \to 0$, então $c \to x$ e devido à continuidade de f segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f\big(\, c(h)\,\big) = f(x)\,,$$

o que prova que F é derivável e que

$$F' = f \clubsuit$$

5. Continuidade da Integral.

Teorema (Continuidade da Integral). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então, está bem definida a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ onde } x \in [a,b].$$

Ainda mais, F é contínua.

Prova.

- ◇ Como f é integrável em $[a,b]$, segue que f é integrável em $[a,x]$.

- ◇ Fixemos $x \in [a,b]$. Seja h tal que $x+h$ pertence a $[a,b]$. Então, temos

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Como f é integrável, por hipótese f é limitada. Seja M tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Então, temos $-M \leq f(t) \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Donde então segue

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq M|h|.$$

Concluímos então que $f(x+h) \to F(x)$ se $h \to 0 \clubsuit$

6. Segundo TVM para Integrais.

Motivação. Suponhamos que a média final M em um curso se dê pela média ponderada das notas $n_1, \ldots, n_k$, com respectivos pesos $p_1, \ldots, p_k$. Então,

$$M = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} p_j}.$$

Tal motivação sugere o resultado abaixo.

Teorema (Segundo TVM para Integrais). *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, com f contínua e g integrável e, ainda, $g \geq 0$ e*

$$\int_a^b g(x)\, dx > 0.$$

Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(**) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Prova.

Sejam $m = f(x_1)$ o mínimo de f e $M = f(x_2)$ o máximo de f. Se $x \in [a, b]$, temos $m \leq f(x) \leq M$ e ainda $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx}.$$

- ◇ Caso 1. Se $m < \gamma < M$, pelo teorema do valor intermediário existe c no intervalo aberto de extremidades x_1 e x_2 tal que $f(c) = \gamma$.

- ◇ Caso 2. Se $\gamma = M$ então

  $$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\, dx = 0.$$

  Logo, pela desigualdade $[M - f(x)]g(x) \geq 0$ temos $[M - f(x)]g(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como g não se anula em algum intervalo aberto J, segue que f é constante e igual a M em J. Assim, todo ponto $c \in J$ satisfaz (**).

- ◇ Caso 3. Se $\gamma = m$, basta aplicar o Caso 2 ao par de funções $-f$ e g ♣

Interpretação Aritmética para o segundo TVM para integrais. Dada um função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e uma função integrável $g : [a, b] \to [0, \infty)$ com integral estritamente positiva, então a função f assume em algum ponto c a sua média ponderada pela função g. Isto é, temos

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c).$$

Comentário. O segundo teorema do valor médio para integrais nos permite tanto demonstrar o primeiro TVM para integrais assim como fundamentar a interpretação aritmética para o primeiro TVM para integrais.

Vejamos. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, consideremos a função integrável e estritamente positiva

$$g(x) = 1 \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Evidentemente, a média de f ponderada pela função constante $g = 1$ é apenas e tão somente a **média aritmética de** f.

Pelo segundo TVM para integrais segue que existe um ponto c tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b 1.f(x)dx}{\int_a^b 1dx}.$$

Donde então segue a identidade

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \clubsuit$$

7. Fórmula de Integração por Partes.

Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Indefinida). *Sejam f e g deriváveis em (a,b). Então, $f'g$ admite primitiva em (a,b) se e só se fg' também admite e, neste caso,*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Prova.

Pela fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ temos

$$fg' = (fg)' - f'g\,,$$

donde concluímos que ψ é uma primitiva de $f'g$ se e somente se $fg - \psi$ é uma primitiva de fg'. Isto é, $\psi' = f'g \Leftrightarrow (fg-\psi)' = fg'$ ♣

Notação. Lembramos da fórmula de integração por partes escrevendo

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Definida). *Sejam f e g funções com derivadas contínuas em $[a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Prova.

Pelo primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b\,.$$

Da fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ a da linearidade da integral definida segue que

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Eliminando

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx$$

das duas equações acima obtidas concluímos a prova♣

8. Teorema da Mudança de Variável.

Proposição (Mudança de Variável na Integral Indefinida). *Seja I um intervalo e consideremos a função*

$$f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos que a função [a mudança de variável]

$$\varphi : y \in J \mapsto x = \varphi(y) \in I, \text{ onde } J \text{ é um intervalo,}$$

é inversível e derivável com inversa $\varphi^{-1} : x \in I \mapsto y = \varphi^{-1}(x) \in J$ também derivável. Se

$$\int f\big(\varphi(y)\big)\, \varphi'(y)\, dy = F(y) + k, \text{ onde } y \in J \ \text{ e } k \text{ é fixo em } \mathbb{R},$$

então temos

$$\int f(x)\, dx = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + k.$$

Prova.

Aplicando a regra da cadeia, a hipótese sobre F e novamente a regra da cadeia obtemos,

$$\begin{aligned}
(F \circ \varphi^{-1})'(x) &= F'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\
&= f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\
&= f(x) \cdot (\varphi \circ \varphi^{-1})'(x) \\
&= f(x) \cdot 1 \\
&= f(x) \clubsuit
\end{aligned}$$

Teorema da Mudança de Variável. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua, I um intervalo e a e b arbitrários em I . Seja $\varphi : [c,d] \to I$ tal que φ' é contínua e $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy.$$

Atenção. *Não é necessário $a < b$.*

Prova.

Como f, φ e φ' são contínuas, as duas integrais definidas acima existem. Ainda, por ser contínua f admite uma primitiva F e então, pelo primeiro Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ainda mais, pela regra da cadeia temos

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y) = f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y).$$

Então, aplicando novamente o primeiro TFC obtemos

$$\begin{aligned}\int_c^d f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy &= (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx \clubsuit\end{aligned}$$

9. Uma Função C^∞ mas não Aproximável via Fórmula de Taylor.

Exemplo 14. Uma função de classe C^∞ mas não analítica. A função

$$\Lambda(x) \;=\; \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{se } x \leq 0\,, \end{cases}$$

é tal que $\Lambda^{(n)}(0) = 0$ para todo n e de classe C^∞ na reta.

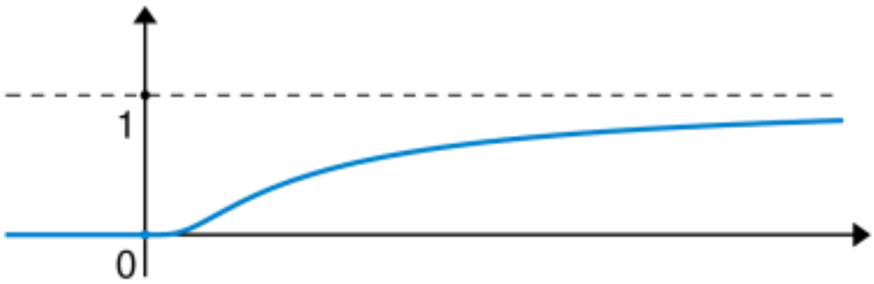

Figura 3: Gráfico de $\Lambda(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, se $x > 0$, com $\Lambda(x) = 0$ se $x \leq 0$.

Verificação. Seja $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

É claro que $\Lambda(1) = e^{-1}$. É também claro que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Cada derivada $\Lambda^{(n)}$ [com $\Lambda^{(0)} = \Lambda$] satisfaz

$$\Lambda^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x > 0, \text{ com } P_n \text{ um polinômio.}$$

Ainda,

$$\lim_{x \to 0^+} \Lambda^{(n)}(x) = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} P_n(y) = \lim_{y \to +\infty} \frac{P_n(y)}{e^y} = 0.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{\Lambda^{(n)}(x) - 0}{x - 0} &= \lim_{y \to +\infty} y e^{-y} P_n(y) \\ &= \lim_{y \to +\infty} \frac{y P_n(y)}{e^y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por indução segue que $\Lambda, \Lambda', \Lambda'', \Lambda^{(3)}, \ldots$ são todas contínuas na origem e portanto contínuas na reta. Logo, Λ é infinitamente derivável♣

10. O δ de Dirac.

Definição. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o **suporte** de f é o menor conjunto fechado que contém o conjunto no qual a função f não se anula. Temos a notação

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Exemplo 15. Seja $\Lambda = \Lambda(x)$ como no exemplo 14. Consideremos a função

$$\Phi(x) \;= \Lambda(1 - x^2).$$

A função Φ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \leq \Phi(x) \leq e^{-1} \leq 1 \;\text{ e }\; \mathrm{supp}(\Phi) = [-1, +1].$$

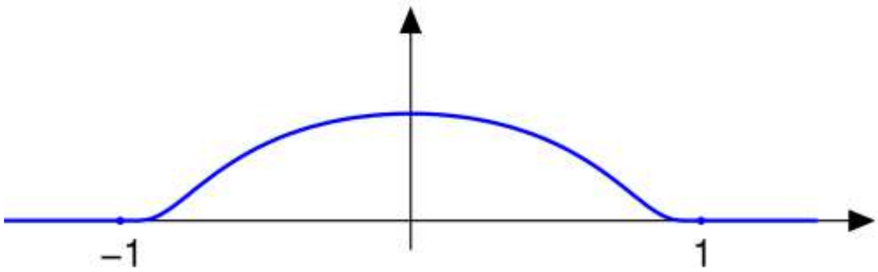

Figura 4: Gráfico da função Φ.

A expressão para Φ é

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \clubsuit \end{cases}$$

A seguir, consideremos o número

$$c = \int_{-1}^{+1} \Phi(x)dx > 0.$$

Definamos a função

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{c}.$$

Então, temos

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Dado um arbitrário $\epsilon > 0$, consideremos a função

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon}.$$

A função φ_ϵ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \leq \varphi_\epsilon(x) \leq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{e} \quad \text{supp}(\varphi_\epsilon)(x) = [-\epsilon, \epsilon].$$

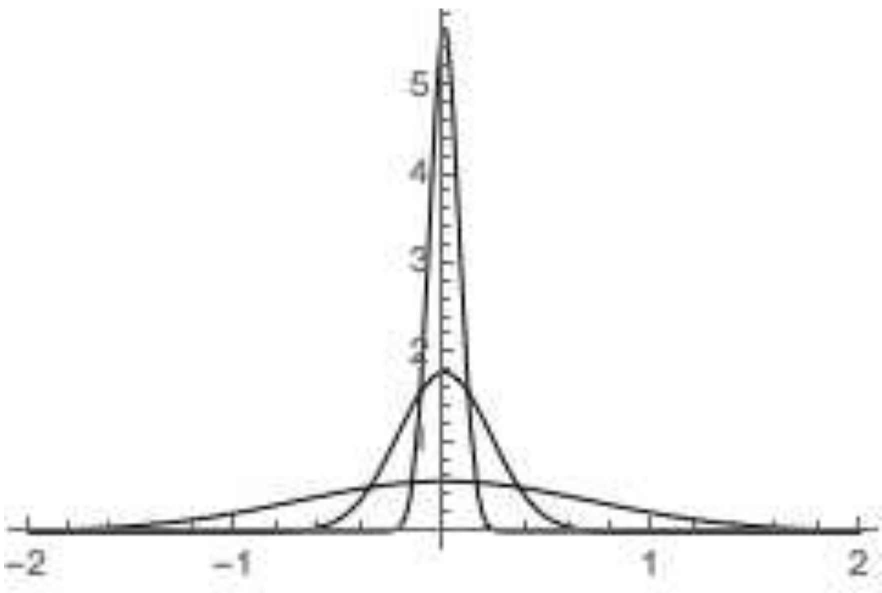

Figura 5: Ilustração para o gráfico de φ_ϵ, conforme $\epsilon \to 0^+$.

Ainda mais,

$$\begin{aligned}
\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{\epsilon} \epsilon\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{\epsilon} dt \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Teorema. *Seja* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Consideremos a família de funções*

$$\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \textit{onde } 0 < \epsilon < 1,$$

acima definidas. Então,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0).$$

Prova.

Pelo segundo TVM para integrais, existe um ponto $\overline{x} \in [-\epsilon, \epsilon]$, com $\overline{x} = \overline{x}(\epsilon)$ dependendo de ϵ, tal que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \\ &= f(\overline{x}).\end{aligned}$$

Como f é contínua na origem, temos que

$$f(\overline{x}) \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0) \clubsuit$$

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, infinitamente derivável e de suporte compacto (i.e., f é identicamente nula no complementar de algum intervalo fechado e limitado) definimos o δ **de Dirac**

$$\delta(f) = f(0).$$

Dizemos que a família de funções

$$\{\varphi_\epsilon : \ 0\epsilon < 1\}$$

se aproxima do δ de Dirac, se $\epsilon \to 0$. Escrevemos então

$$\varphi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} \delta.$$

11. A Primitiva $\int e^{-x^2}dx$ não é Elementar .

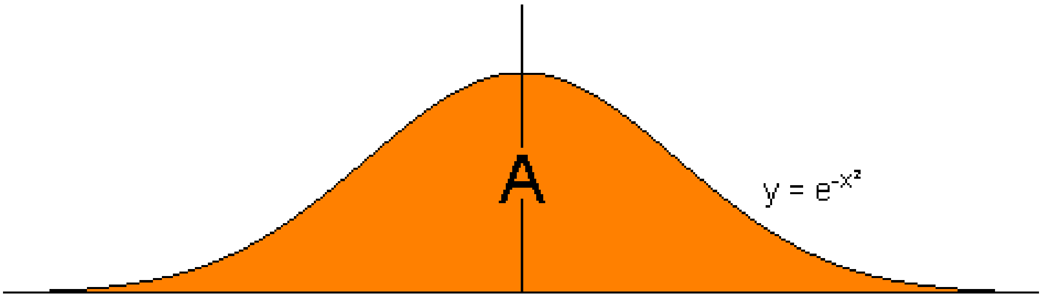

Figura 6: O gráfico de e^{-x^2} e a região A entre tal gráfico e o eixo Ox.

Uma função elementar, é uma função de uma variável (real ou complexa) que pode ser expressa com as quatro operações básicas da artimétrica, e pela composição da exponenciação, do logaritmo, das constantes e da radiciação.

As funções trigonométricas e as funções seno e cosseno hiperbólicos e suas inversas são também elementares pois todas elas são exprimíveis pela função exponencial complexa e pelo logaritmo.

O conjunto das funções elementares é fechado pelas quatro operações básicas, pela composição e pela derivação.

As funções elementares são analíticas exceto em um conjunto finito de pontos.

O conjunto das funções elementares não é fechado por limites, somas infinitas e integração.

O seguinte teorema se deve a Liouville.

Teorema (Liouville). *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções racionais, com $g(x)$ não constante. Suponhamos que*

$$\int f(x)e^{g(x)}dx$$

é uma função elementar. Então, existe uma função racional $R(x)$ tal que

$$\int f(x)e^{g(x)}dx = R(x)e^{g(x)}.$$

Utilizemos tal teorema de Liouville para provarmos o próximo resultado.

Corolário. *A primitiva*

$$\int e^{-x^2} dx$$

não é elementar.

Prova.

Suponhamos que a primitiva acima é elementar. Então, pelo teorema de Liouville existe uma função racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

com P e Q polinômios e Q não nulo, e com P e Q sem raízes em comum, satisfazendo

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-x^2}.$$

Obviamente $P(x)$ é não nulo. Derivando tal identidade encontramos

$$e^{-x^2} = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)} e^{-x^2} + \frac{P(x)}{Q(x)} \left(-2xe^{-x^2} \right).$$

Donde segue

$$Q^2(x) = P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) - 2xP(x)Q(x), \text{ para todo } x.$$

- ◇ O caso $Q(x)$ uma constante c, com $c \neq 0$. Então encontramos

  $$c^2 = cP'(x) - 2cxP(x),$$

  o que é impossível pois grau$(c^2) = 0$ e grau$[cP'(x) - 2cxP(x)] \geq 1$.

- ◇ O caso $Q(x)$ não constante. A identidada polinomial acima obtida é válida para todo x em $\mathbb{R}$. Logo, ela vale também para todo z em $\mathbb{C}$. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ [com existência garantida pelo TFA) tal que

  $$Q(\alpha) = 0.$$

  Seja m a multiplicidade algébrica de α como raíz de $Q(z)$. Pela identidade que estamos utilizando segue que

  $$(z - \alpha)^m \ \text{ divide } \ Q'.$$

  Logo, α é raíz de multiplicidade $m + 1$ de $Q(z)$ $\lightning$

A prova está encerrada$\clubsuit$

12. A identidade $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Esta seção utiliza coordenadas polares, integral imprópria e integral dupla.

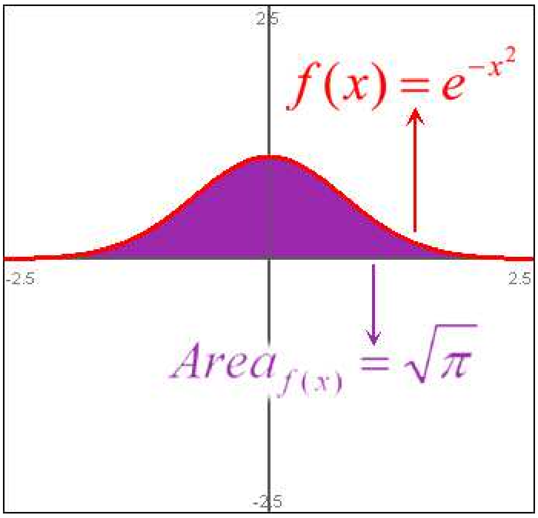

Figura 7: Ilustração para $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Apesar de não termos uma fórmula elementar para a função

$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt, \text{ onde } x \geq 0,$$

conseguimos computar a integral de e^{-x^2} em toda a reta. Notemos que

$$g \ \text{ é positiva e crescente em } (0, +\infty).$$

Assim, existe (como número real positivo ou como o valor $+\infty$) o limite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Como a função positiva e^{-x^2} é par, temos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

A seguir, computamos $I^2 = I.I$ e mostramos que $I^2 = \pi$.

Seja $r > 0$ e arbitrário. Notemos que

$$I^2 = I.I = \lim_{r\to+\infty} \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{r}^{r} e^{-y^2}dy\right)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \left[\iint\limits_{[-r,r]\times[-r,r]} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right].$$

Seja $0 = (0,0)$ a origem do plano $\mathbb{R}^2$. Sejam

$$D(0;r) = \{(,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq r\}$$

o disco de centro na origem e de raio r e o quadrado $Q_r = [-r,r] \times [-r,r]$ de centro na origem. Valem as relações

$$D(0;r) \subset Q_r \subset D(0;2r) \subset Q_{2r}.$$

Devido a tais relações, e a desigualdade $e^{-(x^x+y^2)} \geq 0$ em todo ponto (x,y), temos

$$\lim_{r\to+\infty} \left[\iint\limits_{Q_r} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right] = \lim_{r\to+\infty} \left[\iint\limits_{D(0;r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right].$$

Donde segue

$$I^2 = \lim_{r\to+\infty} \left[\iint\limits_{D(0;r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right].$$

Utilizando coordenadas polares escrevemos

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2+y^2 \\ \text{com } \rho > 0 \ \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

O determinante da matriz jacobiana da aplicação $J(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ é

$$\det J(\rho,\theta) = \rho.$$

Então, efetuando tal mudança de coordenadas encontramos

$$I^2 = \lim_{r\to\infty} \left[\iint\limits_{[0,r]\times[0,2\pi]} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta\right]$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \left(\int_0^r \rho e^{-\rho^2}dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\Big|_0^r\right)2\pi = \pi \clubsuit$$

Exercício. Mostre que a função

$$f(x) \;=\; \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \text{ se } x \neq 0\,, \\ 0\,, \text{ se } x = 0\,, \end{cases}$$

é tal que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n e de classe C^∞ na reta.

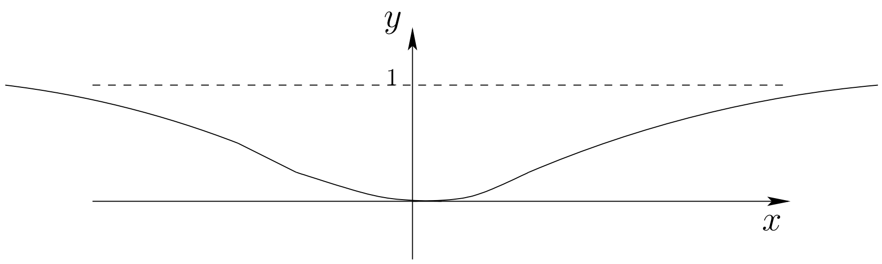

Figura 8: Gráfico de $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0$, com $f(0) = 0$.

Sugestão.

Por indução, as derivadas $f^{(n)}$, onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, satisfazem

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} R_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x \neq 0,$$

onde $R_n(x)$ é uma função racional.

A seguir, adapte a prova dada no exemplo 14.

Referências.

1. Guidorizzi, H. L., Um Curso de Cálculo, Vol. 1., 5ª edição, LTC, 2001.
2. Hairer E. and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer, 2000.
3. Spivak, M., *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, 2008.