Ano 2015

FRAÇÕES PARCIAIS E O TEOREMA DA DECOMPOSIÇÂO EM FRAÇÕES PARCIAIS

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira (oliveira@ime.usp.br)

1. Introdução.

No sistema decimal temos, por exemplo, a decomposição

$$\begin{aligned}\frac{2345}{10000} &= \frac{2000+300+40+5}{10000}\\ &= \frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{5}{10^4}.\end{aligned}$$

Como outro exemplo, decompondo um denominador em fatores primos temos

$$\begin{aligned}\frac{59}{108} &= \frac{59}{2^2 3^3}\\ &= \frac{0}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}.\end{aligned}$$

[É trivial efetuar a "prova dos nove". Como curiosidade, temos

$$\begin{cases}\frac{59}{108} &= \frac{54+5}{2^2 3^3} = \frac{2.3^3+2^2+1}{2^2 3^3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2 3^3}\\ \frac{1}{2^2 3^3} &= \frac{3-2}{2^2 3^3} = \frac{1}{2^2.3^2}-\frac{1}{2.3^3}\\ \frac{1}{2^2.3^2} &= \frac{3-2}{2^2.3^2} = \frac{1}{2^2 3}-\frac{1}{2.3^2}\\ \frac{1}{2.3^3} &= \frac{3-2}{2.3^3} = \frac{1}{2.3^2}-\frac{1}{3^3}\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{1}{2.3^2} &= \frac{3-2}{2.3^2} = \frac{1}{2.3}-\frac{1}{3^2}\\ \frac{1}{2^2.3} &= \frac{3-2}{2^2 3} = \frac{1}{2^2}-\frac{1}{2.3}\\ \frac{1}{2.3} &= \frac{3-2}{2.3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}.\end{cases}$$]

Adaptemos os métodos acima para um quociente de polinômios.

Preparação. Consideremos uma divisão de polinômios com coeficientes reais

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ onde } 0 \leq \text{grau}(P) < \text{grau}(Q).$$

O objetivo é escrever este quociente como um somatório de parcelas mais simples. Para iniciar, decompomos $Q(x)$ em um produto de fatores lineares da forma

$$(x-\alpha)^m,$$

com α uma raíz real de $Q(x)$ e $m = m(\alpha)$ a multiplicidade algébrica de α como solução de $Q(x) = 0$, e também de fatores quadráticos

$$(x^2 + ax + b)^n,$$

onde $x^2 + bx + c = 0$ não tem raízes reais (discriminante negativo) e n é a multiplicidade algébrica de $x^2 + bx + c$ na decomposição de Q.

Provaremos o que segue.

(1º) Cada fator linear $(x-\alpha)^m$ gera as m parcelas (no somatório procurado)

$$\frac{C_1}{(x-\alpha)}, \ldots, \frac{C_m}{(x-\alpha)^m},$$

onde C_1,...,C_m são constantes reais a serem determinadas.

(2º) Cada fator quadrático $(x^2+bx+c)^n$ gera as n parcelas (no referido somatório)

$$\frac{A_1x + B_1}{(x^2 + bx + c)}, \ldots, \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + bx + c)^n},$$

onde $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n$ são constantes reais a serem determinadas [logo, $A_jx + B_j$ é um polinômio de grau 0 ou de grau 1, para cada $j = 1, \ldots, n$].

(3º) A resposta procurada (isto é, o somatório) é então: o quociente

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

é uma soma de parcelas do tipo das obtidas no (1º) e no (2º) passos acima.

(4º) Para determinarmos as constantes reais surgidas existem vários métodos.

Métodos. Mencionemos, por enquanto, dois métodos.

- O Método dos Coeficientes Indeterminados. Este é o mais difundido e se aplica a todas as situações. Mas, às vezes exige muitos cômputos.
- O Método de Heaviside. Recomendável no caso em que o polinômio no denominador, $Q(x)$ [com a notação acima], tem somente raízes reais e simples.

Vejamos dois exemplos.

Exemplo E1. Decomponha em frações simples,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^2 + x - 2}.$$

Solução. Via método de Heaviside.

A divisão polinomial nos fornece um polinômio somado com uma função racional cujo grau do polinômio no numerador é menor que o grau do polinômio no denominador e então, fatorando tal denominador, encontramos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x^4 - 5x^3 + 13x - 12 \ + \frac{-6x + 15}{(x-1)(x+2)}.$$

Pelo teorema da decomposição em frações parciais temos

$$(E1.1) \qquad \frac{-6x + 15}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Multiplicando $(E1.1)$ por $(x-1)$ e então avaliando em $x = 1$ temos $A = 3$. Multiplicando $(E1.1)$ por $(x+2)$ e avaliando em $x = -2$ temos $B = -9$.

Resposta.

$$\frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^2 + x - 2} = 2x^4 - 5x^3 + 13x - 12 \ + \frac{3}{x-1} - \frac{9}{x+2} \ \clubsuit$$

Exemplo E2. Decomponha em frações simples o quociente

$$\frac{x^5 + x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}.$$

Solução. Via método dos coeficientes a determinar.

◇ Escrevemos $P(x) = x^5 + x$, $p(x) = (x^2+1)(x^2+2)^2$ e

$$\frac{x^5 + x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2} + \frac{ex+f}{(x^2+2)^2}.$$

Então, multiplicando ambos os membros por $p(x)$ resulta

$$x^5 + x = (ax+b)(x^2+2)^2 + (cx+d)(x^2+1)(x^2+2) + (ex+f)(x^2+1).$$

Efetuando as operações indicadas no segundo membro, escrevemos

$$x^5+x = (a+c)x^5+(b+d)x^4+(4a+3c+e)x^3+(4b+3d+f)x^2+(4a+2c+e)x+4b+2d+f,$$

e obtemos o sistema linear de 6 equações com 6 incógnitas:

$$(1)\ a+c=1\,, \quad (2)\ b+d=0\,, \quad (3)\ 4a+3c+e=0\,, \quad (4)\ 4b+3d+f=0,$$

$$(5)\ 4a+2c+e=1\,, \qquad (6)\ 4b+2d+f=1.$$

De (2) segue $d = -b$ e portanto (4) e (6) se escrevem, respectivamente, $b + f = 0$ e $2b + f = 0$ que é visivelmente um sistema determinado. Donde, $b = f = 0$ e então $d = 0$.

De (1) segue $c = 1 - a$ e então (3) e (5) se escrevem, respectivamente, $a + e = -3$ e $2a + e = -1$, cuja solução é dada por $a = 2$ e $e = -5$. Assim sendo temos $c = 1 - a = 1 - 2 = -1$, donde segue $c = -1$.

Consequentemente,

$$\frac{x^5 + x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2} - \frac{5x}{(x^2+2)^2}\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}♣$$

2. Prova do Teorema da Decomposição em Frações Parciais

Comentário histórico.

A história do Teorema da Decomposição em Frações Parciais está ligada à história do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). O matemático francês D'Alembert (1746), pesquisando métodos para integrar funções racionais, apresentou a primeira prova do Teorema Fundamental da Álgebra. A prova continha um erro que só veio a ser corrigido quase um século depois.

Retornemos à prova do teorema da decomposição em frações parciais.

Fixemos um polinômio não nulo $Q = Q(x)$ com coeficientes reais e com r distintos pares de raízes complexas conjugadas (raízes não reais)

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_r \pm i\beta_r$$

e com s distintas raízes reais

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_s.$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra podemos fatorar o polinômio real $Q(x)$ em seus fatores lineares e quadráticos (todos estes polinômios com coeficientes reais), com suas respectivas multiplicidades algébricas [isto é, as multiplicidades dos fatores lineares e quadráticos na decomposição de $Q(x)$], e obtemos

$$Q(x) = c\prod_{j=1}^{r}\Big((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\Big)^{m_j}\ \prod_{j=1}^{s}(x-\gamma_j)^{n_j}\,,\ \text{com } c \text{ uma constante real,}$$

onde m_j é a multiplicidade algébrica da raíz complexa $\alpha_j + i\beta_j$ [para $j = 1, \ldots, r$] e, analogamente, n_j é a multiplicidade algébrica da raíz real γ_j [para $j = 1, \ldots, s$].

Podemos agora enunciar e demonstrar o teorema da decomposição em frações parciais.

Teorema. Sejam $Q(x)$ um polinômio com coeficientes reais como acima e $P(x)$ um polinômio com coeficientes reais satisfazendo $0 \leq \text{grau}(P) < \text{grau}(Q)$. Então, existem e são únicos, números reais A_{jk}, B_{jk} e C_{jk} tais que

$$(T.1) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk} + B_{jk}\,x}{\Big((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\Big)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(x-\gamma_j)^k} .$$

Prova.

- Afirmação 1. Se γ é raiz real de multiplicidade n de $Q = Q(x)$ então, fatorando $Q(x) = (x-\gamma)^n q(x)$ com $q(x)$ um polinômio real e $q(\gamma) \neq 0$, segue que existe uma única constante real C e um único polinômio real $p(x)$, com $\text{grau}(p) < \text{grau}(Q) - 1$, satisfazendo

$$(T.2) \qquad \frac{P(x)}{(x-\gamma)^n q(x)} = \frac{C}{(x-\gamma)^n} + \frac{p(x)}{(x-\gamma)^{n-1}q(x)} .$$

Verificação da Afirmação 1.

Multiplicando $(T.2)$ pelo denominador comum, obtemos a equação polinomial

$$P(x) = Cq(x) + p(x)(x-\gamma).$$

Avaliando em $x = \gamma$ encontramos

$$C = \frac{P(\gamma)}{q(\gamma)}$$

e definimos o polinômio $p(x)$ como a divisão (exata) de $P(x) - Cq(x)$ por $(x-\gamma)$. As unicidades de C e $p = p(x)$ são óbvias.

- Afirmação 2. Definamos $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Se

$$Q(x) = \big((x-\alpha)^2 + \beta^2\big)^m q(x) \text{ e } q(\alpha + i\beta) \neq 0, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \in \mathbb{R}^*,$$

então existem duas únicas constantes reais A e B e um único polinômio real $p(x)$, com $\text{grau}(p) < \text{grau}(Q) - 2$, satisfazendo

$$\frac{P(x)}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^m\, q(x)} = \frac{A + Bx}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^m} + \frac{p(x)}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^{m-1}\, q(x)}.$$

Verificação da Afirmação 2.

Multiplicando pelo denominador comum, resolvemos a equação polinomial

$$P(x) \;=\; (A+Bx)q(x) \;+\; p(x)\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big).$$

Avaliando tal fórmula no número complexo $z_0 = \alpha + i\beta$ (ou em $z_0 = \alpha - i\beta$) determinamos constantes A e B reais[1] e definimos o polinômio real $p(x)$ como a divisão exata do polinômio real $P(x)-(A+Bx)q(x)$ pelo polinômio real $(x-\alpha)^2+\beta^2)$. A unicidade é elementar e encerra tal verificação.

Claramente, por sucessivas aplicações das Afirmações 1 e 2 obtemos $(T.1)$. Por favor, mostre que a unicidade dos coeficientes em $(T.1)$ (vide abaixo outra prova de tal fato) segue das unicidades vistas nas Afirmações 1 e 2 ■

Comentário. Mostremos uma variação do Método de Heaviside para determinar (unicamente) os coeficientes em $(T.1)$.

Computemos os coeficientes $C_{1n_1}, C_{1,n_1-1}, \ldots, C_{1,2}, C_{1,1}$, nesta ordem.

Utilizando a fatoração

$$Q(x) = (x-\gamma_1)^{n_1}Q_1(x), \text{ com } Q_1(x) \text{ um polinômio real tal que } Q_1(\gamma_1) \neq 0,$$

multipliquemos [vide equação $(T.1)$]

$$(T.3) \qquad \frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1}Q_1(x)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{jk}+B_{jk}\,x}{\big((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\big)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{C_{jk}}{(x-\gamma_j)^k}$$

por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e então avaliemos em $x=\gamma_1$. Para o primeiro membro obtemos

$$\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)}.$$

Quanto ao segundo membro, multiplicando a parcela

$$\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$$

[1]Pela equação $A+B(\alpha+i\beta) = \frac{P(z_0)}{q(z_0)} \in \mathbb{C}$ temos

$$A+B\alpha = \mathrm{Re}\left(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\right) \quad \text{e} \quad B\beta = \mathrm{Im}\left(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\right).$$

Se utilizarmos $z = \alpha - i\beta$ o resultado é o mesmo pois para tais $A, B \in \mathbb{R}$: $A+B\overline{z_0} = \overline{A+Bz_0} = \overline{\frac{P(z_0)}{q(z_0)}}$

por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e avaliando o resultado em $x=\gamma_1$ obtemos C_{1,n_1}. Todas as demais parcelas ao serem multiplicadas por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e então avaliadas em $x=\gamma_1$ produzem o número zero. Logo,

$$C_{1,n_1}=\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)}.$$

Então, passando a parcela

$$\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$$

ao primeiro membro e efetuando a subtração encontramos uma função racional com numerador e denominador divisíveis por $(x-\gamma_1)$ [vide Afirmação 1]:

$$\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1}Q_1(x)}-\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}=\frac{p_1(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1-1}Q_1(x)}\,,\ \text{com}\ \ \partial(p_1)<\partial(Q)-1.$$

Igualado o último membro acima com o que restou do segundo membro de $(T.3)$, recaímos no caso anterior e então de forma análoga achamos o coeficiente C_{1,n_1-1}. Iterando tal procedimento identificamos os demais coeficientes $C_{1,j's}$. É claro que de forma análoga obtemos todos os coeficientes $C_{i's,j's}$.

Similarmente (e utilizando a Afirmação 2) obtemos ordenadamente os pares de coeficientes (A_{i,m_i},B_{i,m_i}), $(A_{i,m_i-1},B_{i,m_i-1}),...,(A_{i,1},B_{i,1})$, $i=1,\ldots,l$. Verifique♣

Exemplo E3. Decomponha em frações simples,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2x^6-3x^5-9x^4+23x^3+x^2-44x+39}{x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4}.$$

Solução. Via a acima comentada variação do método de Heaviside.

A divisão polinomial nos dá uma função racional com o grau do polinômio no numerador menor que o daquele no denominador e, fatorando este,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=2x-5\ +\ \frac{6x^4-20x^2+4x+19}{(x-1)^3(x+2)^2}.$$

Pelo teorema da decomposição em frações parciais temos

$$(E3.1) \qquad \frac{6x^4-20x^2+4x+19}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+\frac{B_1}{x+2}.$$

Multiplicando $(E3.1)$ por $(x-1)^3$ e então avaliando em $x = 1$ temos $A_3 = 1$. Multiplicando $(E3.1)$ por $(x+2)^2$ e avaliando em $x = -2$ temos $B_2 = -1$.

Passando as parcelas

$$\frac{1}{(x-1)^3} \quad \text{e} \quad \frac{-1}{(x+2)^2}$$

do lado direito de $(E3.1)$ para o lado esquerdo de $(E3.1)$, encontramos

$$\frac{6x^4-20x^2+4x+19+(x-1)^3-(x+2)^2}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_1}{x+2}.$$

Donde segue

$$(E3.2) \qquad \frac{6x^2-5x-7}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_1}{x+2}.$$

Multiplicando $(E3.2)$ por $(x-1)^2$ e avaliando em $x = 1$ encontramos $A_2 = -2$.

Multiplicando $(E3.2)$ por $(x+2)$ e avaliando em $x = -2$ achamos $B_1 = 3$.

Substituindo $A_2 = -2$ e $B_1 = 3$ em $(E3.2)$ e a seguir passando os termos

$$\frac{-2}{(x-1)^2} \quad \text{e} \quad \frac{3}{x+2}$$

para o lado esquerdo de $(E3.2)$ e então simplificando encontramos

$$\frac{6x^2-5x-7+2(x+2)-3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3}{x-1} = \frac{A_1}{x-1}.$$

Portanto, $A_1 = 3$.

Resposta.

$$\frac{2x^6-3x^5-9x^4+23x^3+x^2-44x+39}{x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4} =$$

$$= 2x-5+\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{(x+2)^2}+\frac{3}{x+2} \clubsuit$$

Exemplo 4. Decomponha em frações simples o quociente

$$\frac{x^2+1}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}.$$

Solução. Via método de Heaviside.

O denominador fatora-se como

$$(x^4+5x^3+5x^2-5x-6) = (x+1)(x-1)(x+2)(x+3).$$

Logo, temos

$$(E4.1) \qquad \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x+3}.$$

Multiplicando $(E4.1)$ por $(x+1)$ e, então, computando em $x=-1$ achamos

$$A = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Multiplicando $(E4.1)$ por $(x-1)$ e, então, computando em $x=1$ achamos

$$B = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

Multiplicando $(E4.1)$ por $(x+2)$ e, então, computando em $x=-2$ obtemos

$$C = \frac{5}{3}.$$

Multiplicando $(E4.1)$ por $(x+3)$ e, então, computando em $x=-3$ obtemos

$$D = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}.$$

Resposta.

$$\frac{x^2+1}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6} = -\frac{1/2}{x+1}+\frac{1/12}{x-1}+\frac{5/3}{x+2}-\frac{5/4}{x+3} \clubsuit$$

Exemplo 5. Simplifique, aplicando o método de frações parciais,

$$\frac{1}{1+x^4}.$$

Solução. Via método dos coeficientes a determinar. Aritmética em $\mathbb{R}$.

Observemos que

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x).$$

Então pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples obtemos

$$(E5.1) \qquad \frac{1}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Multiplicando $(E5.1)$ por $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1) \\ &= (A+C)x^3+(A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D)x^2+(A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2})x+(B+D), \end{aligned}$$

e resolvemos o sistema de equações

$$A+C=0 \ , \ A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D=0 \ , \ A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0 \ \text{ e } \ B+D=1 \ .$$

Substituindo a primeira equação ($C=-A$) e a quarta equação na segunda equação, encontramos $2A\sqrt{2}+1=0$ e

$$A=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Em seguinda, substituindo a primeira equação na terceira equação, obtemos $B=D$ e desta forma, pela quarta equação, chegamos a

$$B=D=\frac{1}{2}.$$

Resposta.

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \clubsuit$$

Podemos também, se desejarmos, utilizar números complexos.

Antes de estudarmos o caso em que o polinômio $Q(x)$ tem raízes não reais (já abordamos tal situação no Exemplo 2) utilizando números complexs, apresentamos a seguir uma rápida revisão de números complexos.

3. REVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Seja $i \in \mathbb{C}$ tal que $i^2 = -1$. Utilizando a Fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \text{ onde } \theta \in \mathbb{R},$$

temos $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Indicando as coordenadas polares de $z \in \mathbb{C}$ por $r \in [0, +\infty)$ e $\theta \in \mathbb{R}$, se

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

vemos que $z = re^{i\theta}$. É óbvio que $|e^{i\theta}| = 1$ e consequentemente $r = |z|$.

Chamamos $(r, \theta)_o$ de forma polar de um número $z \in \mathbb{C}$ e identificamos

$$z = (r, \theta)_o \quad \text{se} \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Desta forma, se $z_1 = (r_1, \theta_1)_o$ e $z_2 = (r_2, \theta_2)_o$ temos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ e

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)_o \; .$$

Assim, obtemos a Fórmula de Moivre:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \;\text{ se }\; z = (r, \theta)_o \;, \forall n \in \mathbb{Z} \; .$$

Invertendo tal fórmula obtemos as n-raízes, $n \in \mathbb{N}$, de um número $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Radiciação. Se $n \in \mathbb{N}$ e $z = re^{i\theta} \neq 0$, as n soluções de $\omega^n = z = re^{i\theta}$ são

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\, e^{\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)i}, \text{ onde } k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

Chamamos tais soluções ω_k, onde $k = 0, \ldots, n-1$, de raízes n-ésimas de z.

Exemplo 6. Simplifique, aplicando o método de frações parciais,

$$\frac{1}{1+x^4}\ .$$

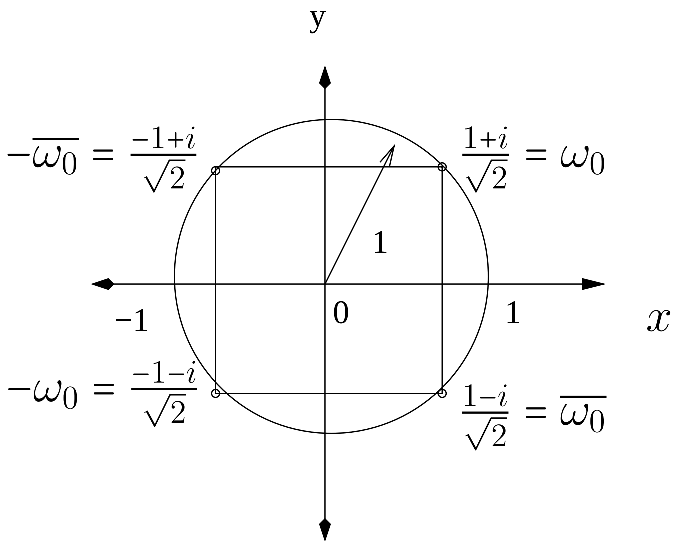

Figura 1: As quatro raízes quartas de $z = -1$.

Duas soluções. Vide Exemplo 5. Utilizemos aritmética complexa.

Observemos que, vide Figura 1 acima,

$$z^4 + 1 = 0 \Longrightarrow z^4 = -1 = e^{i\pi} \Longrightarrow z = \omega_k = e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})i} = e^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})i}\,, \quad k = 0,1,2,3.$$

Isto é,

$$z \ \in \ \left\{\omega_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}\,,\ \omega_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\overline{\omega_0}\,,\ \omega_2 = e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\omega_0\,,\ \omega_3 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \overline{\omega_0}\right\}.$$

O polinômio x^4+1 fatora-se então como

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)\cdot(x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

Pelo teorema da decomposição em frações parciais temos

$$(E6.1) \qquad \frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

◇ **Primeira solução.** (Não aplicando os já citados métodos.)

É fácil perceber que $A + C = 0$ e $B + D = 1$.

Computando a expressão em $(E6.1)$ em $x = i$ obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{Ai + B}{-\sqrt{2}i} + \frac{-Ai + (1 - B)}{\sqrt{2}i} = \frac{-2A}{\sqrt{2}} + \frac{1 - 2B}{\sqrt{2}i}.$$

Logo,

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ e } B = \frac{1}{2}.$$

Donde segue

$$C = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ e } D = \frac{1}{2}.$$

◇ **2ª solução.** Via uma variação do método de Heaviside. Aritmética em $\mathbb{C}$.

Escrevamos

$$\frac{1}{1 + x^4}$$

na forma

$$(E6.2) \qquad \frac{1}{(x - \omega_0)(x - \overline{\omega_0}) \cdot (x + \overline{\omega_0})(x + \omega_0)} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Multiplicando $(E6.2)$ por

$$x^2 - \sqrt{2}x + 1 = (x - \omega_0)(x - \overline{\omega_0})$$

e então avaliando em ω_0, obtemos

$$\frac{1}{2\,\mathrm{Re}(\omega_0) \cdot 2\omega_0} = A\omega_0 + B \Longrightarrow \frac{1}{4\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1 + i) + B \quad \text{ou,}$$

$$\frac{1}{2(1 + i)} = \frac{1 - i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} + B\right) + \frac{A}{\sqrt{2}}i \Longrightarrow A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \; B = \frac{1}{2}.$$

Multiplicando $(E6.2)$ por $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = (x + \overline{\omega_0})(x + \omega_0)$ e então avaliando em $-\omega_0$, obtemos

$$\frac{1}{-2\omega_0(-\omega_0 - \overline{\omega_0})} = -C\omega_0 + D \quad \text{ou,}$$

$$\frac{1}{4\omega_0\,\mathrm{Re}(\omega_0)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \left(-\frac{C}{\sqrt{2}} + D\right) - \frac{C}{\sqrt{2}}i \Longrightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{4}, \; D = \frac{1}{2}\ .$$

Resposta.

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \clubsuit$$

Abaixo, damos uma outra solução para a função racional no Exemplo E2.

Exemplo E7. Decomponha em frações simples o quociente

$$\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}.$$

Solução. Via uma variante do método de Heaviside. Aritmética em $\mathbb{C}$.

◇ Pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples temos,

$$(E7.1) \qquad \frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando $(E7.1)$ por $(x^2+2)^2$ e então computando em $x = i\sqrt{2}$ obtemos

$$\frac{(i\sqrt{2})^5+i\sqrt{2}}{-1} = Ei\sqrt{2}+F \Longrightarrow E=-5 \text{ e } F=0.$$

Pondo à esquerda em $(E7.1)$ o termo $-5x/(x^2+2)^2$ obtido à direita, temos

$$\frac{x^5+x+5x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{x^3+3x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Destaquemos

$$(E7.2) \qquad \frac{x^3+3x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Multiplicando $(E7.2)$ por x^2+1 e então computando em $x=i$, achamos

$$\frac{i^3+3i}{i^2+2} = Ai+B \Longrightarrow A=2 \text{ e } B=0.$$

Multiplicando $(E7.2)$ por x^2+2 e então avaliando em $x=\sqrt{2}i$, temos

$$\frac{(\sqrt{2}i)^3+3\sqrt{2}i}{-2+1} = C\sqrt{2}i+D \Longrightarrow C=-1 \text{ e } D=0.$$

Resposta.

$$\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{2x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+2}-\frac{5x}{(x^2+2)^2} \clubsuit$$

4. MÉTODO DAS DERIVADAS (para determinar os coeficientes)

Este método utiliza derivadas em $\mathbb{R}$ para computar os coeficientes na equação $(T.1)$ correspondentes às parcelas provenientes das raízes reais.

Computemos em $(T.1)$ os coeficientes $C_{1n_1}, \ldots, C_{1,1}$ relativos à raíz γ_1. Para simplificar escrevamos $n_1 = n$. Então, pela fatoração

$$Q(x) = (x-\gamma_1)^n Q_1(x), \text{ com } Q_1(x) \text{ um polinômio real e } Q_1(\gamma_1) \neq 0,$$

pela expressão em $(T.1)$ temos

$$\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^n Q_1(x)} = \frac{C_{1,n}}{(x-\gamma_1)^n} + \frac{C_{1,n-1}}{(x-\gamma_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{C_{1,1}}{(x-\gamma_1)^1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)},$$

com p_1 um polinômio real [e, é fácil ver, $\text{grau}(p_1) < \text{grau}(Q) - n$].

Assim, multiplicando por $(x-\gamma_1)^n$ chegamos a

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = C_{1,n} + C_{1,n-1}(x-\gamma_1) + C_{1,n-2}(x-\gamma_1)^2 + \cdots + C_{1,1}(x-\gamma_1)^{n-1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)}(x-\gamma_1)^n.$$

Computando a equação acima em γ_1 resulta

$$\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)} = C_{1,n}.$$

Computando a primeira derivada da equação acima em γ_1, obtemos

$$\left(\frac{P}{Q_1}\right)'(\gamma_1) = C_{1,n-1}.$$

Computando a segunda derivada da equação acima em γ_1, encontramos

$$\left(\frac{P}{Q_1}\right)''(\gamma_1) = 2C_{1,n-2}.$$

Por indução finita, computando a k-ésima derivada, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, da equação acima em γ_1 obtemos

$$\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1) = k! C_{1,n-k}.$$

Isto é,

$$C_{1,n-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1).$$

Exemplo 8. Decomponha em frações simples

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}.$$

Três soluções.

◇ **Primeira solução.** Não aplicando os citados métodos. Temos,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x-1)^3} &= \frac{[(x-1)+1]^2}{(x-1)^3}\\ &= \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^3}\\ &= \frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}.\end{aligned}$$

◇ **Segunda solução.** Via método dos coeficientes a determinar.

Multiplicando por $(x-1)^3$ a decomposição

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

obtemos

$$x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C = Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C).$$

Logo,

$$A = 1, \quad B = 2 \ \text{ e } \ C = 1.$$

◇ **Terceira solução.** Empregando derivadas.

Basta computar as derivadas de ordem 0, 1 e 2 de $F(x) = x^2$ em $x = 1$.

Obtemos

$$C = \frac{F(1)}{0!} = 1\,, \ B = \frac{F'(1)}{1!} = 2 \ \text{ e } \ A = \frac{F''(1)}{2!} = 1 \clubsuit$$

Existem ainda outros métodos para decompor uma função racional em soma de frações simples. Cada qual tem suas vantagens, sendo que a maior ou menor conveniência de um método depende do problema em questão e, é claro, de preferências individuais. Ainda, é conveniente ser "criativo".

BIBLIOGRAFIA

1. E. Hairer and G. Warner, *Analysis by its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1966, pp. 118-123.
2. G. F. Simmons, *Cálculo com Geometriz Analítica*, Vol. 1., Pearson Makron Books, 1987, pp. 494-504 e pp. 665-668.
3. G. B. Thomas, *Cálculo*, Vol. 1, Addison Wesley, 2009, pp. 568-569.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
e-mail: oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`