

No plano euclidiano consideremos dois pontos (**focos**) distintos  $F_1$  e  $F_2$ .

### ELIPSE

- (1) Se  $2a$  é um comprimento fixo e maior que a distância entre  $F_1$  e  $F_2$ , o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é  $2a$  é uma *elipse*.

A equação padrão da elipse é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

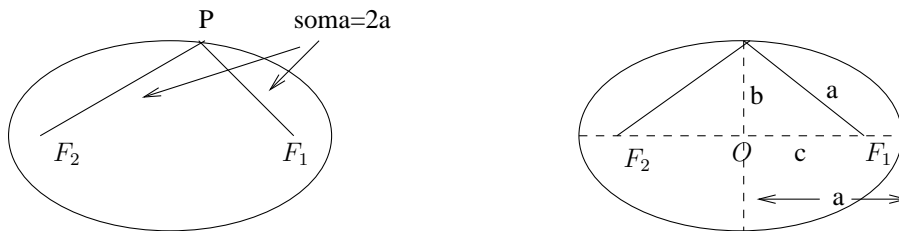


Figura 1: Desenho de uma elipse no plano euclidiano (à esquerda).  
 Desenho de uma elipse no plano cartesiano (à direita).

**Prova.**

Seja  $s$  a reta pelos focos (desenhe) e  $O$  o ponto médio entre os focos.

Trace por  $O$  a reta  $t$ , perpendicular a  $s$  e mediatriz do segmento  $\overline{F_1F_2}$ .

Só há 2 pontos em  $t$  com soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  igual a  $2a$  (ambos distam  $a$  de cada foco) e simétricos em relação à reta  $s$  (contém os focos).

Por semelhança de triângulos é fácil ver que se  $P$  é um ponto da elipse, então o ponto  $P'$ , o simétrico de  $P$  em relação à reta  $s$ , também pertence à elipse. Logo, a elipse é simétrica em relação a  $s$ .

Para o mesmo  $P$ , temos que o ponto  $P''$ , simétrico de  $P$  em relação à reta  $t$  (perpendicular ao segmento  $\overline{F_1F_2}$ ), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é  $2a$ .

A figura tem eixos de simetria perpendiculares ( $t$  e  $s$ ) e um centro natural. Para desenhá-la, escolhamos um sistema de coordenadas cartesianas  $Oxy$  tal que  $Ox$ , o eixo  $x$ , corresponda à reta  $t$ ,  $Oy$  à reta  $s$  e adotemos  $O$ , o ponto médio entre os focos, como a origem. Assim  $O = (0, 0)$ .

Nesse sistema temos os seguintes elementos para uma elipse (vide figura):

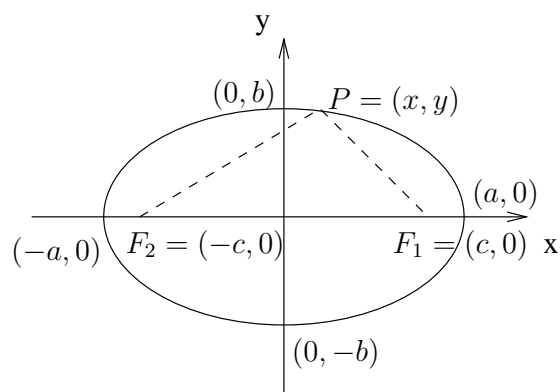


Figura 2: Focos, Vértices e Polos - Elipse

- Focos:  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ , com  $c > 0$ .
- Vértices:  $A_1 = (-a, 0)$  e  $A_2 = (a, 0)$ .
- Polos:  $B_1 = (0, -b)$  e  $B_2 = (0, b)$ , com  $b > 0$ .
- Eixo maior:  $\overline{A_1A_2}$ .
- Eixo-menor:  $\overline{B_1B_2}$ .
- Semi-eixo maior é o número  $a$ .
- Semi-eixo menor é o número  $b$ .
- Distância focal é o número  $2c$ .
- Semi-distância focal é o número  $c$ .
- Excentricidade é o número  $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo maior}} < 1$ .

É claro que temos os comprimentos  $|\overline{B_2F_1}| = |\overline{B_2F_2}| = a$ . Donde segue

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

A equação da elipse adquire então a forma:

$$(2) \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Isolando o segundo radical e efetuando o quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

e assim,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

e então chegamos às equações

$$(3) \quad |\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

e

$$(4) \quad |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

onde (4) é obtida de (3), pois  $|\overline{PF_2}| = 2a - |\overline{PF_1}|$ .

O quadrado das equações (3) e (4) fornecem as equações

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = a^2 \mp 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

e simplificando,

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Lembrando que  $a^2 = b^2 + c^2$  obtemos, finalmente,

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (2) implica (5).

Não é difícil verificar que (5) implica (2) e assim, adotamos (5) como forma reduzida (padrão) da equação da elipse.

## HIPÉRBOLE

- (2) O lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença de suas distâncias aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é constante e igual a  $2a$ , onde  $a > 0$ , é uma hipérbole.

A equação padrão da hipérbole é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

### Observação 1.

Se um ponto  $P$ , no plano, forma um triângulo com os focos (isto é,  $P$ ,  $F_1$  e  $F_2$  não colineares), pela desigualdade triangular temos  $|\overline{PF_1}| < |\overline{PF_2}| + |\overline{F_1F_2}|$ . Logo,  $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| < |\overline{F_1F_2}|$  e, analogamente,  $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| < |\overline{F_1F_2}|$ . Assim,

$$| |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| | < |\overline{F_1F_2}|.$$

A condição de existência da hipérbole é então:  $2a < |\overline{F_1F_2}|$ .

### Observação 2.

Para um ponto  $P$  na hipérbole temos

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a \quad \text{ou} \quad |\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a.$$

Assim, a equação da hipérbole, não utilizando coordenadas, é,

$$(H) \quad |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \pm 2a.$$

O ramo direito (esquerdo) da hipérbole é obtido atribuindo o sinal  $+$  ( $-$ ) na equação (H).

### Prova.

Seja  $Oxy$  um sistema de coordenadas cartesianas com o eixo  $x$  contendo o segmento  $\overline{F_1F_2}$  e por eixo  $y$  a reta mediatriz deste segmento. Vide figura na próxima página.

Supondo  $|\overline{F_1 F_2}| = 2c$  ( $0 < a < c$ ) temos :  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ ,  $c > 0$ .

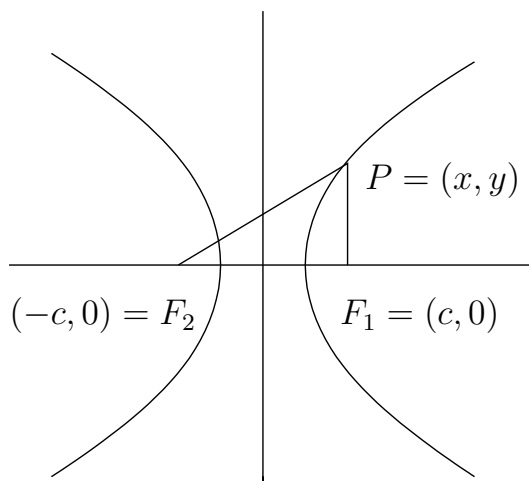


Figura 3: Hipérbole-Focos

Por (H), a equação da hipérbole em coordenadas cartesianas é,

$$(1) \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Passando o segundo radical para o segundo membro e então elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = [\pm 2a + |\overline{PF_1}|]^2 = 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}| + (x-c)^2 + y^2 ,$$

donde

$$4cx = 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}|$$

e então, as fórmulas dos raios focais são

$$(2) \quad |\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \left( \frac{c}{a}x - a \right)$$

e

$$(3) \quad |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm \left( \frac{c}{a}x + a \right) ,$$

onde (3) é obtida de (2), visto que  $|\overline{PF_2}| = |\overline{PF_1}| \pm 2a$ . Procurando manter uma notação salientamos que, assim como em (H), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da hipérbole e o negativo ao ramo esquerdo.

Os quadrados destas equações (2) e (3) fornecem

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \mp 2cx + a^2,$$

que reduzimos a

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

ou

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Pela condição de existência,  $0 < a < c$ , temos  $c^2 - a^2 > 0$  e escrevemos,

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

[vide triângulo retângulo de catetos  $a$  e  $b$  e hipotenusa  $c$  na Figura 3 a seguir] e substituindo em (4) encontramos

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (1) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (1) e assim, adotamos (5) como forma padrão da equação de uma hipérbole.

### Elementos de uma hipérbole:

- Focos:  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ , com  $c > 0$ .
- Centro: o ponto médio do segmento  $\overline{F_1F_2}$ .
- Vértices:  $A_1 = (a, 0)$  e  $A_2 = (-a, 0)$ , com  $a > 0$ .
- Eixo real: o segmento  $\overline{A_1A_2}$  e, também, o comprimento,  $2a$ , deste segmento.
- Semi-eixo real: o número  $a$ .
- Eixo principal: a reta contendo os focos e o eixo real.
- Eixo transversal ou imaginário ou conjugado: a reta mediatriz de eixo real.
- Distância focal: o número  $2c = |\overline{F_1F_2}|$ .
- Semi-distância focal: o número  $c$ .

- Semi-eixo transverso: o número  $b > 0$  definido pela relação  $b^2 = c^2 - a^2$ .
- Assíntotas: as retas  $y = \frac{b}{a}x$  e  $y = -\frac{b}{a}x$ .
- Excentricidade: é o número  $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo real}} > 1$ .

Note também o triângulo retângulo de vértices em  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  e  $(a, b)$ .

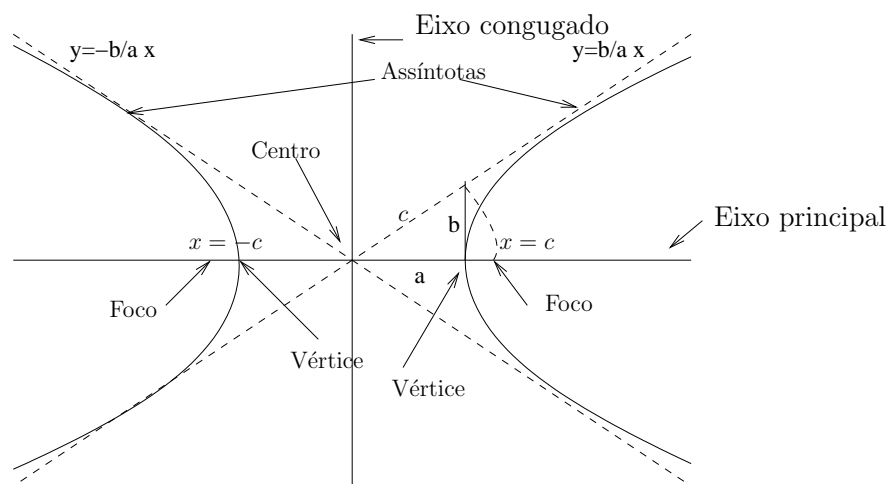


Figura 4: Elementos da hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

A figura abaixo destaca o denominado retângulo fundamental.

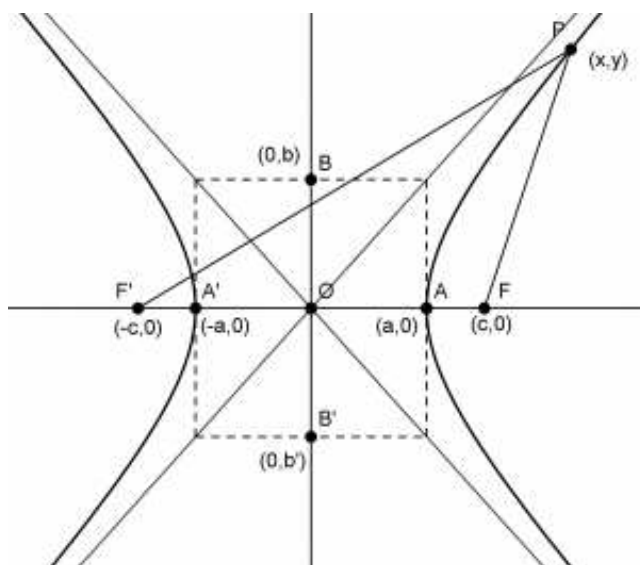


Figura 5: Retângulo fundamental e assíntotas da hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

## PARÁBOLA

- (3) Fixados no plano euclidiano, um ponto  $F$  (foco) e uma reta  $d$  (reta diretriz), com  $F \notin d$ , o lugar geométrico dos pontos tais que suas distâncias ao foco  $F$  e à reta diretriz  $d$  são iguais é uma **parábola**.

A equação padrão da parábola é, em coordenadas cartesianas,

$$x^2 = 4py, \text{ onde } p > 0.$$

### Observação.

A parábola é simétrica em relação à reta pelo foco  $F$  e perpendicular à diretriz  $d$ . Esta reta pelo foco é o eixo de simetria da parábola. O ponto médio entre o foco  $F$  e a projeção de  $F$  sobre  $d$  (isto é, o ponto equidistante entre o foco e a reta diretriz) é o ponto da parábola mais próximo de  $d$  e é chamado **vértice da parábola**.

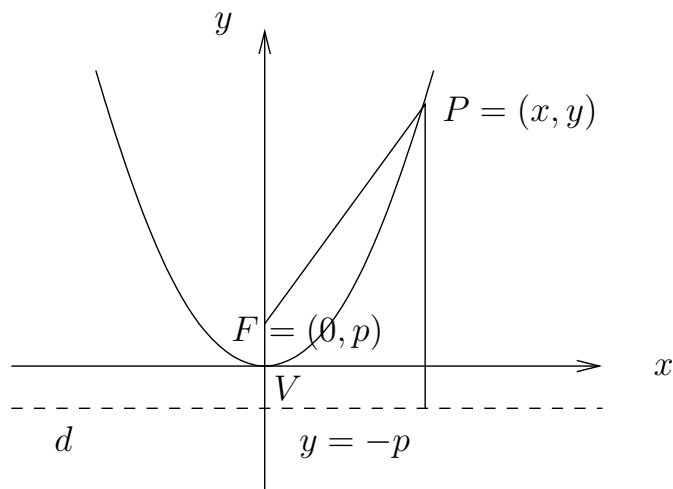


Figura 6: Parábola

### Prova.

Seja  $Oxy$  um sistema cartesiano de coordenadas tal que:

- (i) o eixo  $y$  corresponde ao eixo de simetria
- (ii) a origem ao vértice,
- (iii) o eixo  $x$  à reta pela origem, paralela a  $d$  e,
- (iv) orientemos o eixo  $y$  tal que  $F = (0, p), p > 0$ .



Assim, a equação da reta diretriz  $d$  é dada por

$$y = -p.$$

Seja  $P = (x, y)$  um ponto arbitrário da parábola temos, pela definição,

$$(1) \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = y + p$$

e elevando a equação acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$(2) x^2 = 4py .$$

Notemos que (1) e (2) são equivalentes.

**Observação.**

A constante  $p > 0$  é a distância do vértice ao foco e, também, do vértice à diretriz.

Trocando-se a posição da parábola em relação aos eixos coordenados, sua equação muda.

Três outras posições simples, com as correspondentes equações são:

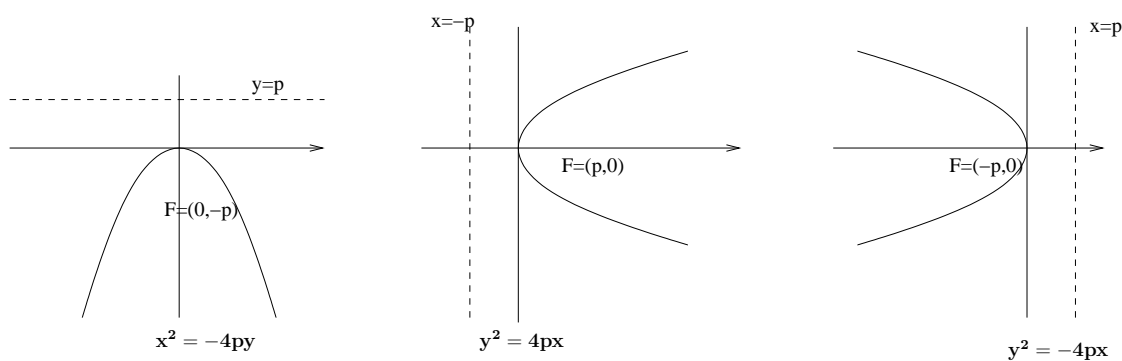


Figura 7: posições e equações - parábolas

*Oswaldo Rio Branco de Oliveira*

*Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo*

*oliveira@ime.usp.br*