Complementos de Matemática para Contabilidade - MAT 103 - FEAUSP

REGRA DA CADEIA E TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Segudno semestre de 2015 - diurno

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

REGRA DA CADEIA

Teorema. *Sejam f e g funções diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Então, $f \circ g$ é diferenciável e*

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prova.

Fixado x em $\mathbb{R}$ e definindo $y = g(x)$, temos

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{k} = f'(y).$$

Tal equação define uma função "erro" $E(k)$ satisfazendo

$$f(y+k) = f(y) + f'(y)k + E(k)k, \text{ com } \lim_{k \to 0} E(k) = 0 = E(0).$$

Então, dado $h \neq 0$, definindo $k = g(x+h) - g(x)$ temos

$$(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x) =$$

$$= f'\big(g(x)\big)[g(x+h) - g(x)] + E\big(g(x+h) - g(x)\big)[g(x+h) - g(x)].$$

Donde,

$$\frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} =$$

$$= f'\big(g(x)\big)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + E\big(g(x+h) - g(x)\big)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Como $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} g'(x)$ e $[g(x+h) - g(x)] \xrightarrow{h \to 0} 0$ (pois g é contínua em x, já que g é derivável em x) e a função E é contínua na origem, concluímos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = f'\big(g(x)\big)g'(x) + 0.g'(x).$$

Isto é, $(f \circ g)$ é derivável em x e $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$♣

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Seja I um intervalo aberto e $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ contínua e inversível. Então,

(a) f é estritamente crescente ou f é estritamente decrescente.

(b) $J = f(I)$ é um intervalo aberto.

(c) $g = f^{-1} : J \to I$ é contínua.

(d) Se f é derivável em x, com $f'(x) \neq 0$, então g é derivável em $y = f(x)$ e

$$g'(y) = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)}.$$

Prova.

(a) Suponhamos $x_1 < x_2 < x_3$, com $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2) > f(x_3)$. Seja y tal que $\max\big(f(x_1), f(x_3)\big) < y < f(x_2)$. Então, pelo teorema do valor intermediário $y \in f\big((x_1, x_2)\big)$ e $y \in f\big((x_2, x_3)\big)$ ↯. Também a função $-f$ é contínua e inversível e também não pode ocorrer $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_2) < f(x_3)$. Segue então que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

(b) Pelo teorema do valor intermediário, $J = f(I)$ é um intervalo. Por (a), f é estritamente crescente/decrescente. Logo, J não pode conter extremidades.

(c) Trocando f por $-f$, se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que f é estritamente crescente. Consideremos então $y \in J$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $[g(y) - \epsilon, g(y) + \epsilon] \subset I$. Existem então y_1 e y_2 tais que $g(y_1) = g(y) - \epsilon$ e $g(y_2) = g(y) + \epsilon$. Logo, $g\big([y_1, y_2]\big) = [g(y) - \epsilon, g(y) + \epsilon]$.

(d) Dado $y_0 = f(x_0)$ e $y \neq y_0$, temos que $g(y) \to g(y_0) = x_0$ se $y \to y_0$. Então,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))} \clubsuit$$