MAT 103 - Complementos de Matemática para Contabilidade - FEAUSP
Lista 6 de Exercícios - Segundo semestre de 2015
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Calcule as integrais definidas abaixo.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x+1)dx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2-1)\ dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(5x^3-\frac{1}{2}\right)\ dx$

d) $\displaystyle\int_{1}^{0} (2x+3)\ dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[8]{x}\ dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x+\sqrt[4]{x})\ dx$

g) $\displaystyle\int_{1}^{0} (x^7-x+3)\ dx$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x+1)^2\ dx$

i) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x-3)^2\ dx$

j) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1+t^2}{t^4}\ dt$

k) $\displaystyle\int_{0}^{3} (u^2-2u+3)\ du$

l) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \sqrt[3]{t}\ dt$

m) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1+3x^2}{x}\ dx$

n) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \mathrm{sen}3x\ dx$

o) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$

p) $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^{-2x}\ dx$

q) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\ dx$

r) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x^3e^{x^4}\ dx$

2. Calcule as integrais definidas.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\mathrm{sen}x+\mathrm{sen}2x)\ dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\ dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$ $\qquad\left[\textbf{Sugestão: } \cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right]$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^2 x\ dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x\ dx$

3. Calcule a área do conjunto dado. Esboce a região.

   a) A é limitado pelas retas $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ e pelo gráfico de $y = x^3$.

   b) A é limitado pelas retas $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.

   c) $A = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq 0\}$.

   d) $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

   e) $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq |\text{sen}x|,\ 0 \leq x \leq 2\pi\}$.

   f) A é limitado pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y = x^2 - x$, $0 \leq x \leq 2$.

   g) A é limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = 3 - 2x - x^2$, $-1 \leq x \leq 2$.

   h) A é limitado pelas retas $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^2 + 2x + 5$.

   i) A é limitado pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, $-1 \leq x \leq 1$.

   j) A é limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, $0 \leq x \leq 2$.

   k) A é limitado pelas retas $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \cos x$.

   l) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$.

   m) A é limitado pelas retas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \text{sen}x$ e $y = \cos x$.

   n) $A = \{(x, y) : x^2 + 1 \leq y \leq x + 1\}$.

   o) $A = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$.

   p) A é limitado pelas retas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \cos x$ e $y = 1 - \cos x$.

   q) $A = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } x^3 - x \leq y \leq -x^2 + 5x\}$.

4. Encontre as primitivas.

   a) $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{x + 1}\, dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x + 1}\, dx$

5. Encontre as primitivas.

   a) $\displaystyle\int xe^x\, dx$

   b) $\displaystyle\int x\ \text{sen}x\, dx$

   c) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

   d) $\displaystyle\int x\ \ln x\, dx$

   e) $\displaystyle\int \ln x\, dx$

   f) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$

   g) $\displaystyle\int x\ sec^2 x\, dx$

   h) $\displaystyle\int x\ (\ln x)^2\, dx$

   i) $\displaystyle\int (\ln x)^2\, dx$

   j) $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx$

   k) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\, dx$

   l) $\displaystyle\int x^3 \cos x^2\, dx$

   m) $\displaystyle\int e^{-x} \cos 2x\, dx$

   n) $\displaystyle\int x^2 \text{sen}x\, dx$

- Suponha α, β, m e n são constantes reais, com $\alpha \neq \beta$. Mostre que existem constantes reais A e B satisfazendo

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

- Sejam $\alpha \neq 0$, β, m e n constantes reais. Mostre as fórmulas abaixo.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-\alpha^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha}\ \ln\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right| + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\alpha^2+(x+\beta)^2}\,dx = \frac{1}{\alpha}\ \text{arctg}\left(\frac{x+\beta}{\alpha}\right) + k.$

c) $\displaystyle\int \frac{mu+n}{1+u^2}\,du = \frac{m}{2}\ \ln\,(1+u^2) + n\ \text{arctg}u + k$

6. (Método das frações parciais) Encontre as primitivas.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x(x-2)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-x-2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-1)^2\ (x+2)^2}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-2)^3}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{x^5+3}{x^3-4x}\,dx$

o) $\displaystyle\int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}\,dx$

p) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$

q) $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3}\,dx$

r) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}\,dx$

7. Calcule as áreas das regiões abaixo (suponha $a>0$ e $b>0$).

$$(1)\quad E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}.$$

$$(2)\quad A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\geq\sqrt{1+y^2}\ \text{e}\ 2x+y\leq 2\}.$$

EXTRA

1. (Fórmula de Taylor de ordem 1, com resto integral) Se f'' é contínua em $[a,\ b]$,

$$f(b) = f(a) + f'(a)\ (b-a) + \int_a^b (b-t)\ f''(t)\ dt.$$

2. (Fórmula de Taylor de ordem 2, com resto integral) Se f''' é contínua em $[a,\ b]$,

$$f(b) = f(a) + f'(a)\ (b-a) + \frac{f''(a)}{2}\ (b-a)^2 + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}\ f'''(t)\ dt.$$

3. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2, de f em volta de x_0 dado.

a) $f(x) = \ln(1+x)$ e $x_0 = 0$

b) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$

e) $f(x) = \cos x$ e $x_0 = 0$

f) $f(x) = \sin x$ e $x_0 = 0$

4. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

a) $\ln 1{,}3$

b) $e^{0{,}03}$

c) $\sqrt[3]{8{,}2}$

d) $= \sqrt{4{,}1}$

e) $\cos 0{,}2$

f) $\sin 0{,}1$