MAT 111 - CÁLCULO I - IAG

1º SEMESTRE de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

FÓRMULAS / FRAÇÕES PARCIAIS

1. Dados $\alpha\,,\beta\,,m\,,n\in\mathbb{R}$, existem $A\,,B\in\mathbb{R}$ tais que

$$(a)\qquad \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{x-\alpha}\ +\ \frac{B}{x-\beta}$$

$$(b)\qquad \frac{mx+n}{(x-\alpha)^2}\ =\ \frac{A}{x-\alpha}\ +\ \frac{B}{(x-\alpha)^2}\ .$$

2. Dados $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,m\,,n\,,p\in\mathbb{R}$, com α, β e γ distintos entre si, existem $A\,,B\,,C\in\mathbb{R}$ tais que

$$(a)\qquad \frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}\ =\ \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma}$$

$$(b)\qquad \frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2}\ =\ \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{(x-\beta)^2}\ .$$

3. Dados $m,n,p,a,b,c\in\mathbb{R}$ tais que $\Delta=b^2-4ac<0$, existem $A,B,C\in\mathbb{R}$ tais que

$$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}\ =\ \frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\ .$$

Prova:

1(a). Multiplicando a identidade por $(x-\alpha)$ e então computando em $x=\alpha$ temos

$$A=\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}\ .$$

Analogamente, multiplicando a identidade por $(x-\beta)$ e então computando em $x=\beta$,

$$B=\frac{m\beta+n}{\beta-\alpha}\ .$$

É fácil ver que $mx+n=\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}(x-\beta)+\frac{m\beta+n}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$ e, portanto, 1(a) está satisfeita.

1(b). Multiplicando a identidade por $(x-\alpha)^2$ temos $mx+n=A(x-\alpha)+B$. Logo,

$$A=m\ \text{ e }\ B=m\alpha+n\ .$$

É óbvio que para tais valores de A e B, 1(b) está satisfeita.

2(a). Multiplicando a identidade por $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ temos,

$$mx^2 + nx + p = A(x-\beta)(x-\gamma) + B(x-\alpha)(x-\gamma) + C(x-\alpha)(x-\beta) \ .$$

Computando tal identidade em $x = \alpha$, $x = \beta$ e $x = \gamma$ temos, respectivamente,

$$A = \frac{m\alpha^2 + n\alpha + p}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \ , \ B = \frac{m\beta^2 + n\beta + p}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \ , \ C = \frac{m\gamma^2 + n\gamma + p}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \ .$$

Para mostramos que tal terna satisfaz o desejado analisemos o sistema linear oriundo da identificação dos coeficientes na identidade polinomial acima:

$$\begin{cases} A \ + \ B \ + \ C & = \ m \\ -(\beta+\gamma)A - (\alpha+\gamma)B - (\alpha+\beta)C & = \ n \\ \beta\gamma A \ + \ \alpha\gamma B \ + \ \alpha\beta C & = \ p \ . \end{cases}$$

Trocando o sinal na segunda linha, não é difícil verificar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} \ = \ (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \neq 0 \ .$$

Portanto, o sistema têm solução única, a qual é a terna A, B, C já identificada.

2(b). Multiplicando a identidade por $(x-\alpha)(x-\beta)^2$ temos,

$$mx^2 + nx + p = A(x-\beta)^2 + B(x-\alpha)(x-\beta) + C(x-\alpha) \ .$$

Computando em $x = \alpha$ e $x = \beta$ e notando que $A + B = m$ temos, respectivamente,

$$A = \frac{m\alpha^2 + n\alpha + p}{(\alpha-\beta)^2} \ , \ B = m - A \ , \ C = \frac{m\beta^2 + n\beta + p}{\beta-\alpha} \ .$$

Mostremos que tal terna satisfaz o desejado analisando o sistema linear oriundo da identificação dos coeficientes na última identidade polinomial acima:

$$\begin{cases} A \ + \ B & = \ m \\ -2\beta A - (\alpha+\beta)B + C & = \ n \\ \beta^2 A \ + \ \alpha\beta B \ - \ \alpha C & = \ p \ , \end{cases}$$

cujo determinante é (verifique):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2\beta & -(\alpha+\beta) & 1 \\ \beta^2 & \alpha\beta & -\alpha \end{vmatrix} \ = \ (\alpha-\beta)^2 \neq 0 \ .$$

Portanto, o sistema têm solução única, a qual é a terna A, B, C já identificada.

3. Multiplicando a identidade por $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ temos,

$$mx^2+nx+p = A(ax^2+bx+c)+(Bx+C)(x-\alpha)\ .$$

Avaliando em $x=\alpha$ e notando que $m=aA+B$ e $n=bA-\alpha B+C$ temos,

$$A=\frac{m\alpha^2+n\alpha+p}{a\alpha^2+b\alpha+c}\ ,\ B=m-aA\ ,\ C=n-bA+\alpha B\ .$$

Analogamente aos casos 2(a) e 2(b), tal terna satisfaz o desejado pois o sistema linear obtido a partir da identificação dos coeficientes polinomiais e seu determinante são:

$$\left\{\begin{array}{lcl} aA\ +\ B & = & m \\ bA-\alpha B+C & = & n \\ cA\ -\ \alpha C & = & p \end{array}\right. ,\qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & -\alpha & 1 \\ c & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = a\alpha^2+b\alpha+c\neq 0\ .$$

Portanto, o sistema têm solução única, a qual é a terna A,B,C já identificada ■