Ano 2015

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Teorema (Weierstrass). *Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua no compacto K de $\mathbb{R}^n$. Então, f assume valor máximo absoluto e valor mínimo absoluto em K.*

Prova. Inicialmente, mostremos que f é limitada.

- f é limitada. Suponhamos, por absurdo, f ilimitada. O compacto K está contido em um cubo compacto C_0, de arestas paralelas aos eixos coordenados e de comprimento L. O cubo C_0 é a união de 2^n cubos compactos de arestas de comprimento $L/2$. Então, f é ilimitada na intersecção de K com algum destes 2^n cubos. Seja C_1 um tal cubo. Iterando o procedimento obtemos uma sequência $C_0, C_1, \ldots$ de cubos compactos com arestas de comprimento $L/2^n$, com C_{j+1} contido em C_j para todo $j \geq 0$, com f ilimitada em cada intersecção $K \cap C_n$. Pelo Princípio dos Intervalos Encaixantes temos
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \{p\}, \text{ com } p \text{ em } \mathbb{R}^n.$$
Dado n, existe x_n em $K \cap C_n$ tal que
$$|f(x_n)| > n.$$
Temos
$$|x_n - p| \leq \frac{L\sqrt{2}}{2^n} \quad \text{e} \quad \lim x_n = p.$$
Ainda, como K é fechado, $p \in K$. Pela continuidade de f segue
$$|f(p)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty \lightning$$

- Os pontos de máximo/mínimo. Como $f(K)$ é limitado em $\mathbb{R}$, pela propriedade do supremo existe $M = \sup f(K)$, o supremo de $f(K)$. Suponhamos, por absurdo, $f(x) < M$ para todo x em K. Então,
$$\frac{1}{M - f(x)}, \text{ com } x \text{ variando em } K,$$
é contínua e, pela definição de supremo, ilimitada $\lightning$

Logo, existe a em K com $f(a) = M$. O valor mínimo de f é o oposto do valor máximo de $-f$ ♣

Máximos e mínimos, locais e absolutos,
de uma função f em $C^1(K;\mathbb{R})$, K um compacto.

Definições topológicas. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

- O ponto P de A, é um ponto interior de A se existe um raio $r > 0$ e uma bola aberta $B(P;r)$ centrada em P e contida em A.
- O ponto P de $\mathbb{R}^n$ é um ponto de fronteira de A se toda bola aberta, não vazia, centrada em P intersecta A e também $\mathbb{R}^n \setminus A = A^C$, o complementar de A. Isto é, se para todo $r > 0$, temos

$$B(P;r) \cap A \neq \varnothing \;\text{ e também }\; B(P;r) \cap A^C \neq \varnothing.$$

- O interior de A é o conjunto $\mathrm{int}(A) = \{x :\ x \text{ é ponto interior de } A\}$.
- A fronteira de A é o conjunto $\partial A = \{x : x \text{ é ponto de fronteira de } A\}$.

Dado P em A, ocorre uma só das possibilidades: ou $P \in \mathrm{int}(A)$ ou $P \in \partial A$.

Notemos que:

(A) Pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo (absolutos).

(B) Os pontos de máximo e mínimo locais e interiores a K são pontos críticos e nestes o gradiente se anula. Assim, adotamos a tática abaixo.

  (1) Restringindo f a $\mathrm{int}(K)$ determinamos os pontos críticos.

  (2) Achamos os possíveis pontos de máximo e mínimo de f sobre ∂K, ou por inspeção direta ou por multiplicadores de Lagrange.

  (3) Por fim, comparamos os valores de f nos pontos obtidos acima.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`