TEORIA DE SOMAS X TEORIA DA MEDIDA

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Instituto de Matemática e Estatística - USP - São Paulo

Ano 2015

OBJETIVO

Nesta notas apresentamos o que segue.

- ⋄ A Teoria de Somas (não ordenadas) e sua relação com a Teoria de Séries.
- ⋄ Clássicos teoremas da Teoria da Medida (teorema de Tonelli, teorema de Fubini, lema de Fatou e os teoremas da convergência monótona e da convergência dominada) transpostos para a Teoria de Somas Não Ordenadas.
- ⋄ (Apêndice.) A aritmética na reta estendida $[-\infty, +\infty]$ e os conceitos de limite inferior e limite superior de uma sequência na reta estendida.

Sumário

Capítulo 1

Séries e Somas (não ordenadas)

1.1 Séries

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e uma sequência (a_n), real ou complexa.

A série de termo geral a_n [ou série gerada pela sequência (a_n)] é o par ordenado

$$\big((a_n), (s_n)\big),$$

com (s_n) a sequência das somas parciais de (a_n) e

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n$$

a soma parcial de ordem n da série. [Notemos que explicitamos como somar os termos de (a_n). Agradeço ao prof. Jorge Aragona por tal esclarecimento.]

Tal série é dita convergente se (s_n) converge em $\mathbb{K}$ e, neste caso, $s = \lim s_n$ é a soma da série indicada por

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

A série é dita divergente se (s_n) é divergente.

Abusando da notação, denotamos uma série arbitrária $\big((a_n), (s_n)\big)$ por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty.$$

Se a série é de números reais e $\lim s_n = \pm\infty$, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \pm\infty.$$

Dado p em $\mathbb{N}$, definimos a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ como

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n, \text{ onde } b_n = 0, \text{ se } n < p, \text{ e } b_n = a_n \text{ se } n \geq p.$$

Para investigar a convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ podemos ignorar qualquer quantidade finita de seus termos pois temos

$$s_n = s_p + \sum_{m=p+1}^{n} a_m, \text{ para todo } n > p,$$

e é claro que existe $\lim s_n$ se e só se existe

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=p+1}^{m=n} a_m.$$

Isto é, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e só se a série $\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$ converge. Se uma destas converge, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n.$$

Uma série complexa $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge se e somente se suas partes real e imaginária, dadas pelas séries reais

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n),$$

convergem e então segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

1.1 Proposição. *Suponhamos $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e somente se a sequência das somas parciais $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ é limitada.*

Prova.

Trivial, devido à propriedade do supremo♣

Definição. *A série complexa* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é*

- absolutamente convergente *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty$.
- condicionalmente convergente *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é convergente e* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

No Teorema 1.12 veremos que as séries absolutamente convergentes são convergentes. Um exemplo clássico de série condicionalmente convergente é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(série harmônica alternada).}$$

1.2 Proposição (Critério da Comparação). *Sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *séries complexas, tais que*

$$|a_n| \leq c|b_n|, \text{ para algum } c > 0 \text{ e para todo } n > n_0 \text{ (para algum } n_0 \text{ fixo),}$$

e também $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < \infty$. *Então,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty.$$

Prova. Trivial♣

1.2 Somas Não Ordenadas em $\mathbb{C}$

A Definição 1.5 de famílias somáveis [em $\mathbb{K}$] a seguir, equivale à usual. De fato, decorre da definição clássica de somabilidade que uma família $(v_j)_J$ em um espaço vetorial de dimensão finita normado e completo $(V, \|\cdot\|)$ [i.e., um espaço em que as sequências de Cauchy convergem] é uma família somável se e somente se ela é absolutamente somável [i.e., $\sum_J \|v_j\| < \infty$]. Com a definição aqui adotada, tal equivalência se mantém. Vide Seção 1.4 (Apêndice).

Seja X um conjunto arbitrário e J um conjunto de índices arbitrário. Uma família em X, indexada em J, é uma função $x : J \to X$. Indicamos a família x por

$$(x_j)_{j\in J} \quad \text{ou} \quad (x_j)_J \quad \text{ou, brevemente,} \quad (x_j).$$

Dada uma família (p_j) contida em $[0,+\infty]$, definimos

$$\sum_{j\in J} p_j = \sup\left\{\sum_{j\in F} p_j :\ F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \text{ em } [0,+\infty].$$

Tal sup é finito se e somente se existe um real $M \geq 0$ tal que

$$\sum_{j\in F} p_j \leq M, \text{ para todo subconjunto finito } F \text{ contido em } J.$$

Também escrevemos $\sum_J p_j$ para $\sum_{j\in J} p_j$. Se J é subentendido, escrevemos

$$\sum p_j.$$

1.3 Proposição. *Sejam $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$ duas famílias em $[0,+\infty]$. Então,*

(a) $\sum(p_j + q_j) = \sum p_j + \sum q_j$.

(b) $\sum \lambda p_j = \lambda \sum p_j$, *para todo λ em $[0,+\infty)$.*

(c) (Propriedade Comutativa) *Se $\sigma : \mathcal{K} \to J$ é uma bijeção, então*

$$\sum_J p_j = \sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)}.$$

Prova.

(a) e (b). Triviais

(c) São iguais os conjuntos sobre os quais computamos $\sum_J p_j$ e $\sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)}$♣

Dada uma família $(p_j)_J$ em $[0,+\infty]$, se $\sum_J p_j$ é finito (um número real), dizemos que $(p_j)_J$ é uma família somável e que sua soma é o número

$$\sum_J p_j.$$

Escrevemos $\sum_J p_j < \infty$, indicando que $(p_j)_J$ é (família) somável.

1.4 Teorema (Associatividade). *Seja $(p_j)_J$ uma família em $[0,+\infty]$ e J uma reunião de conjuntos J_k, com k em $\mathcal{K}$, dois a dois disjuntos. Então,*

$$\sum_J p_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j.$$

Prova. Mostremos duas desigualdades.

- Dado F finito e contido em J, por hipótese existem índices distintos $k_1,\ldots,k_l$, todos em $\mathcal{K}$, tal que $F \subset J_{k_1} \cup \ldots \cup J_{k_l}$. Donde segue

$$\sum_F p_j = \sum_{F\cap J_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F\cap J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_{J_{k_1}} p_j + \;\cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j$$

  e então, pela definição de $\sum_J p_j$,

$$\sum_J p_j \;\leq\; \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j.$$

- Dados índices distintos $k_1,\ldots,k_l$ em $\mathcal{K}$ e conjuntos finitos F_{k_r}, com $F_{k_r} \subset J_{k_r}$ se $1 \leq r \leq l$, os conjuntos $J_{k_1},\ldots,J_{k_l}$ são dois a dois disjuntos e portanto os conjuntos $F_{k_1},\ldots,F_{k_l}$ também. Sendo assim, temos

$$\sum_{F_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_J p_j\;.$$

  Então, fixando os conjuntos $F_{k_2},\ldots,F_{k_l}$ e computando o supremo sobre a família dos conjuntos finitos F_{k_1} contidos em J_{k_1} obtemos a desigualdade

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{F_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \leq \sum_J p_j.$$

  Argumentando analogamente $(l-1)$-vezes obtemos

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{J_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_J p_j.$$

  Por fim, como $\{k_1,k_2,\ldots,k_l\}$ é qualquer subconjunto finito de $\mathcal{K}$ concluímos

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j \;\leq\; \sum_J p_j \;\clubsuit$$

Seja $x \in \mathbb{R}$. Suas partes positiva e negativa são, respectivamente,

$$p = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0 \\ 0\,, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad q = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Temos,

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq |x| \\ 0 \leq q \leq |x| \end{cases} , \quad \begin{cases} x = p - q \\ |x| = p + q \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p = \frac{|x|+x}{2} \\ q = \frac{|x|-x}{2}. \end{cases}$$

1.5 Definição. *Seja J um conjunto de índices.*

- *Uma família (x_j) de números reais é* somável *se as famílias (p_j) e (q_j) das partes positivas e negativas de x_j, com j em J, respectivamente, são somáveis. Se (x_j) é somável, sua* soma (não ordenada) *é*

$$\sum x_j = \sum p_j - \sum q_j.$$

- *Uma família (z_j) de números complexos é* somável *se as famílias $\big(Re(z_j)\big)_J$ e $\big(Im(z_j)\big)_J$, das partes reais e imaginárias de z_j, com j em J, respectivamente, são somáveis. Se (z_j) é somável, sua* soma (não ordenada) *é*

$$\sum z_j = \sum Re(z_j) + i \sum Im(z_j).$$

- *Uma família (z_j), de números reais ou complexos, é uma família* absolutamente somável *se a família $(\,|z_j|\,)_J$ é somável. Isto é, se*

$$\sum |z_j| < \infty \ .$$

1.6 Teorema. *Seja* (z_j) *uma família de números complexos. São equivalentes:*

(a) (z_j) *é somável.*

(b) (z_j) *é absolutamente somável.*

Prova.

Consideremos as famílias de números reais $\big(\mathrm{Re}(z_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(z_j)\big)_J$ e as famílias de suas partes positivas, denotadas (p_j) e (P_j), respectivamente, e de suas partes negativas, denotadas (q_j) e (Q_j), também respectivamente. Para todo j em J temos

$$(1.6.1) \quad 0 \leq \min\{p_j, q_j, P_j, Q_j\} \leq \max\big\{p_j, q_j, P_j, Q_j\big\} \leq |z_j| \leq p_j + q_j + P_j + Q_j\ .$$

Logo,

$$\sum |z_j| \text{ é finita se e somente se } \sum p_j, \sum q_j, \sum P_j \text{ e } \sum Q_j \text{ são finitas.}$$

Donde concluímos que a família $(|z_j|)$ é somável se e somente se a família (z_j) é somável♣

1.7 Corolário. *Seja* $(z_j)_J$ *somável e* $\mathcal{K} \subset J$*. Então, a família*

$$(z_k)_{k\in\mathcal{K}}$$

é somável.

Prova.

Pelo teorema (1.6) temos $\sum_J |z_j| < \infty$. É fácil ver que

$$\sum_{\mathcal{K}} |z_k| \leq \sum_J |z_j|.$$

Utilizando novamente o teorema 1.6, concluímos que $(z_k)_{\mathcal{K}}$ é somável♣

1.8 Proposição. *Sejam* $(z_j)_J$ *e* $(w_j)_J$ *famílias somáveis em* $\mathbb{C}$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Então, as famílias* $(z_j + w_j)_J$ *e* $(\lambda z_j)_J$ *são somáveis e valem as propriedades:*

(a) $\sum(z_j + w_j) = \sum z_j \; + \; \sum w_j$.

(b) $\sum \lambda z_j = \lambda \sum z_j$.

Prova. Exercício.

1.9 Teorema (Propriedade Comutativa). *Seja* $(z_j)_J$ *uma família somável arbitrária de números complexos e* $\sigma : \mathcal{K} \to J$ *uma bijeção. Então,*

$$\sum_J z_j = \sum_{k \in \mathcal{K}} z_{\sigma(k)}.$$

Prova. Exercício.

1.10 Teorema (Lei Associativa para Somas Não Ordenadas). *Seja* $(z_j)_J$ *uma família somável em* $\mathbb{C}$. *Suponha* J *uma união de conjuntos* J_k, *com* k *em* $\mathcal{K}$, *dois a dois disjuntos. Então, a família* $(z_j)_{j \in J_k}$ *é somável, para todo* k *em* $\mathcal{K}$, *e*

$$\sum_J z_j = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{J_k} z_j.$$

Prova.

Devido à definição de somável para famílias complexas e à linearidade da soma, podemos supor (z_j) somável e

$$(z_j)_J \subset [0, \infty).$$

Pela associatividade para somas de números positivos (Teorema 1.4), concluímos a prova deste teorema♣

1.11 Proposição. *Sejam $(z_j)_J$ e $(w_k)_K$ famílias somáveis em $\mathbb{C}$. As famílias*

$$(\overline{z_j}) \quad e \quad (z_j w_k)_{J\times K}$$

são então somáveis e valem as propriedades abaixo.

$$(a) \qquad \overline{\sum z_j} = \sum \overline{z_j}.$$

$$(b) \qquad \sum_{J\times K} z_j w_k = \left(\sum z_j\right)\left(\sum w_k\right).$$

$$(c) \qquad \left|\sum z_j\right| \leq \sum |z_j|.$$

Prova.

(a) Pela definição da soma da família (z_j) e por linearidade, segue

$$\overline{\sum z_j} = \sum \mathrm{Re}(z_j) - i\sum \mathrm{Im}(z_j) = \sum[\mathrm{Re}(z_j) - i\mathrm{Im}(z_j)] = \sum \overline{z_j}.$$

(b) Temos $\sum_{J\times K} |z_j|\,|w_k| \leq \left(\sum |z_j|\right)\left(\sum |w_k|\right)$. Logo, a família $(z_j w_k)_{J\times K}$ é somável. Pela propriedade associativa (1.10) segue

$$\sum_{J\times K} z_j w_k = \sum_{j\in J}\sum_{K} z_j w_k = \sum_{j\in J}\left(z_j \sum_K w_k\right) = \left(\sum_K w_k\right)\left(\sum_J z_j\right).$$

(c) Temos

$$\begin{aligned}\left|\sum z_j\right|^2 &= \left(\sum_{j\in J} z_j\right)\left(\overline{\sum_{k\in J} z_k}\right) = \left(\sum z_j\right)\left(\sum \overline{z_k}\right)\\ &= \sum_{J\times J} z_j \overline{z_k}.\end{aligned}$$

Logo, $\sum_{J\times J}(z_j\overline{z_k})$ é um número real e a parte imaginária desta soma é nula. Logo, $\sum_{J\times J}\mathrm{Im}(z_j\overline{z_k}) = 0$. Donde segue

$$\left|\sum z_j\right|^2 = \sum_{J\times J}\mathrm{Re}[z_j\overline{z_k}] \leq \sum_{J\times J}|\mathrm{Re}[z_j\overline{z_k}]|$$

$$\leq \sum_{J\times J}|z_j|\,|z_k| = \left(\sum |z_j|\right)\left(\sum |z_k|\right) = \left(\sum |z_j|\right)^2 \clubsuit$$

1.3 Somas x Séries.

1.12 Teorema. *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *uma série complexa. São equivalentes,*

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) A família $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é somável.*

Ocorrendo (a) ou (b), segue que a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum z_n.$$

Prova.

Decompondo z_n em suas partes real e imaginária e estas em suas partes positiva e negativa concluímos que, graças às desigualdades (1.6.1), à definição de família somável complexa (e de sua soma) e às propriedades de linearidade das séries (absolutamente) convergentes, podemos supor $z_n = p_n$ em $[0,+\infty)$.

Seja (s_n) a sequência das somas parciais de $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$. Fixemos n em $\mathbb{N}$ e um subconjunto finito $F \subset \mathbb{N}$, ambos quaisquer. Seja $\max(F)$ o máximo de F. Temos,

$$s_n = \sum_{\{1,\dots,n\}} p_j \le \sum_{\mathbb{N}} p_n \quad \text{e} \quad \sum_F p_j \le s_{\max F} \le \sum_{n=1}^{+\infty} p_n.$$

Donde segue

$$\sum_{j=1}^{+\infty} p_n \le \sum p_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \clubsuit$$

Definição. *Uma série complexa* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é* comutativamente convergente *se para toda* permutação *(ou, bijeção)* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_{\sigma(n)}$$

é convergente. Esta última série é um rearranjo *da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.

1.13 Teorema. *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *uma série real. São equivalentes:*

(a) A série dada é absolutamente convergente.

(b) A série é comutativamente convergente [e a soma independe do rearranjo].

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) Segue do Teorema 1.12 e da propriedade comutativa para a família então somável (x_n).

(b) $\Rightarrow$(a). Por contradição.

Suponhamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge comutativamente e $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| = +\infty$. Sejam p_n e q_n as partes positiva e negativa de x_n, para todo n. Então,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(p_n - q_n) \text{ é finita e } \sum_{n=0}^{+\infty}(p_n + q_n) = +\infty.$$

Segue então (trivialmente) que ambas, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n$, divergem.

A seguir, reordenamos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ da seguinte forma.

- ◇ Na etapa 0, coletamos os primeiros termos $x_n \geq 0$, com soma > 1.
- ◇ Na etapa 1, coletamos os primeiros termos estritamente negativos cuja soma com os já coletados é < 0.
- ◇ Na etapa 2, subtraídos de $\mathbb{N}$ os índices já selecionados, coletamos os próximos termos $x_n \geq 0$ cuja soma com os já coletados é > 1.
- ◇ Iterando, o rearranjo obtido é tal que a sequência (S_n) de suas somas parciais satisfaz

$$S_{2n} > 1 \ \text{ e } \ S_{2n+1} < 0, \text{ para todo } n.$$

Logo, (S_n) diverge♣

1.4 Apêndice. Somas × Somabilidade Clássica.

1.14 Teorema. *Seja $(z_j)_J$ uma família complexa. Então, (z_j) é somável se e somente se existe um número complexo z tal que para todo $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset J$ satisfazendo a condição*

$$\left|\sum_{j\in F} z_j - z\right| < \epsilon, \ \textit{para todo } F \textit{ finito e tal que } F_\epsilon \subset F \subset J.$$

Prova. Como usual, escrevamos $z_j = x_j + iy_j$ e $z = x + iy$.

Notemos que valem hipóteses análogas para a família (x_j) e o número x e para a família (y_j) e o número y. Ainda, (z_j) é somável se e só se (x_j) e (y_j) são somáveis. Logo, basta analisarmos a família (x_j).

($\Rightarrow$) Neste caso a família (x_j) e as famílias (p_j) e (q_j), das partes positivas e negativas de x_j, são todas somáveis. Então, pela desigualdade triangular vemos que podemos supor $x_j \geq 0$ para todo j. Assim, por hipótese temos

$$\sum_J x_j = x \in [0, +\infty).$$

Dado $\epsilon > 0$, a definição de $\sum x_j$ garante um conjunto finito $F_\epsilon \subset J$ tal que

$$x - \epsilon < \sum_{F_\epsilon} x_j \leq x.$$

Donde então segue $x - \epsilon < \sum_F x_j \leq x$, para todo F finito tal que $F_\epsilon \subset F \subset J$.

($\Leftarrow$) Por hipótese, (dado $\epsilon = 1$) existe um subconjunto finito $G \subset J$ tal que

$$\text{(1.14.1)} \qquad \left|\sum_F x_j - x\right| < 1, \text{ para todo } F \text{ finito tal que } G \subset F \subset J.$$

Seja F um arbitrário subconjunto finito de J, com F disjunto de G e tal que $x_j = p_j \geq 0$ para todo $j \in F$. Devido a (1.14.1) temos

$$\sum_{F\cup G} x_j < 1 + x \ \text{ e então } \ \sum_F p_j < \left(1 + x - \sum_G x_j\right).$$

A arbitrariedade de F garante [na segunda desigualdade use $p_j = 0$ se $x_j < 0$]

$$\sum_{\{j:x_j\geq 0\}\setminus G} p_j < \left(1 + x - \sum_G x_j\right) \ \text{ e então } \ \sum_{J\setminus G} p_j \leq \left(1 + x - \sum_G x_j\right).$$

É então claro que $\sum_J p_j$ é finita. Investiguemos $\sum q_j$. Trocando (x_j) por $(-x_j)$ segue que $\sum_J q_j$ também é finita. Logo, (x_j) é somável♣

Capítulo 2

Somas x Teoria da Medida

Enfoquemos alguns teoremas da Teoria da Medida na teoria de somas.

2.1 Tonelli e Fubini

2.1 Teorema (Tonelli, para somas não ordenadas). *Sejam J e K conjuntos de índices. Seja $(p_{jk})_{J\times K}$ uma família arbitrária em $[0,+\infty]$. Então,*

$$\sum_{J\times K} p_{jk} = \sum_{J}\sum_{K} p_{jk} = \sum_{K}\sum_{J} p_{jk}.$$

Prova.

Segue da propriedade associativa para somas não ordenadas de valores não negativos e das partições

$$J\times K = \dot{\bigcup_{j\in J}} \{j\}\times K = \dot{\bigcup_{k\in K}} J\times\{k\} \clubsuit$$

2.2 Teorema (Fubini, para somas não ordenadas). *Sejam J e K conjuntos de índices. Seja $(z_{jk})_{J\times K}$ uma família somável e complexa. Então,*

$$\sum_{J\times K} z_{jk} = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} z_{jk} = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} z_{jk}.$$

Prova.

Segue da propriedade associativa para famílias somáveis de números complexos e das partições

$$J\times K = \dot{\bigcup_{j\in J}} \{j\}\times K = \dot{\bigcup_{k\in K}} J\times\{k\} \clubsuit$$

2.2 Fatou

Por definição, o limite inferior de uma sequência real é o menor valor de aderência da sequência. Isto é, o limite inferior de tal sequência é o menor valor $L \in [-\infty, +\infty]$ que é limite de alguma subsequência da sequência considerada. De forma análoga, o limite superior de uma sequência real é o maior valor de aderência desta sequência. Portanto, uma sequência real é convergente a um valor na reta estendida se e somente se o seu limite inferior coincide com o seu limite superior. Vide Apêndice - Capítulo 3 - A reta Estendida.

Dada uma sequência real $(x_n)_{\mathbb{N}}$ utilizamos as notações abaixo para o limite inferior e para o limite superior, conforme a conveniência,

$$\liminf x_n = \underline{\lim}\, x_n \quad \text{e} \quad \limsup x_n = \overline{\lim}\, x_n.$$

Dadas duas sequências reais (x_n) e (y_n) tais que a soma de seus limites inferiores está bem definida na reta estendida $[-\infty, +\infty]$, é conhecida a desigualdade

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf (x_n + y_n). \tag{2.3.1}$$

2.3 Lema de Fatou, para somas não ordenadas. *Seja J um conjunto de índices qualquer. Seja $(p_{nj})_{\mathbb{N}\times J}$ uma familia de números reais em $[0, +\infty)$. Então,*

$$\sum_J \underline{\lim}\, p_{nj} \leq \underline{\lim} \sum_J p_{nj}.$$

Prova.

Pela desigualdade (2.3.1), dado um subconjunto finito $F \subset J$ temos

$$\sum_{j\in F} \underline{\lim}\, p_{nj} \leq \underline{\lim} \sum_{j\in F} p_{nj} \leq \underline{\lim} \sum_J p_{nj}.$$

Variando F obtemos

$$\sum_J \underline{\lim}\, p_{nj} \leq \underline{\lim} \sum_J p_{nj} \clubsuit$$

2.3 Convergências Monótona e Dominada

2.4 Teorema da Convergência Monótona, para somas não ordenadas. *Seja* $(p_{nj})_{\mathbb{N}\times J}$ *uma familia de números reais maiores ou iguais a zero, com* J *um conjunto de índices qualquer. Suponhamos que*

$$p_{nj} \nearrow b_j \text{ se } n \to \infty.$$

Então,

$$\sum_J b_j = \lim_{n\to+\infty} \sum_J p_{nj}.$$

Prova.

Pelo Lema de Fatou (para somas não ordenadas), e observando que temos $\underline{\lim}\, p_{nj} = b_j$ para todo j em J, segue diretamente a desigualdade

$$\sum_J b_j \leq \underline{\lim} \sum_J p_{nj}.$$

Vejamos a desigualdade contrária. É trivial que

$$\sum_J p_{nj} \leq \sum_J b_j, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\overline{\lim} \sum_J p_{nj} \leq \sum_J b_j.$$

Assim, tais limites inferior e superior coincidem. Concluímos então

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_J p_{nj} = \sum_J b_j \; \clubsuit$$

2.5 Teorema da Convergência Dominada, para somas não ordenadas. *Seja* $(x_{nj})_{\mathbb{N}\times J}$ *uma família real, com* J *um conjunto de índices qualquer. Suponhamos que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_{nj} = x_j \ \textit{para todo}\ j \in J.$$

Suponhamos também que para quaisquer n *e* j *temos*

$$|x_{nj}| \leq r_j, \ \textit{com}\ \sum_J r_j < \infty.$$

Nestas condições, a família $(x_j)_J$ *é somável e*

$$\sum_J x_j = \lim_{n\to+\infty} \sum_J x_{nj}.$$

Prova.

- $\diamond$ A família (x_j) é somável. Pois, como é claro, temos $|x_j| \leq r_j$ para todo j. Analogamente, a família $(x_{nj})_J$ é somável para cada n fixado.

- $\diamond$ Fixado j temos

  $$r_j - x_{nj} \geq 0 \ \text{ e } \ r_j + x_{nj} \geq 0 \ \text{ e ainda } \ \lim(r_j - x_{nj}) = r_j - x_j \ \text{ e } \ \lim(r_j + x_{nj}) = r_j + x_j.$$

  Pelo lema de Fatou segue

  $$\sum_J (r_j - x_j) \leq \underline{\lim} \sum_J (r_j - x_{nj}) \quad \text{e} \quad \sum_J (r_j + x_j) \leq \underline{\lim} \sum_J (r_j + x_{nj}).$$

  Propriedades para somas e para limites inferiores garantem

  $$\sum_J r_j - \sum_J x_j \leq \sum_J r_j + \underline{\lim} \sum_J (-x_{nj}) \quad \text{e} \quad \sum_J r_j + \sum_J x_j \leq \sum_J r_j + \underline{\lim} \sum_J x_{nj}.$$

  Podemos cancelar $\sum r_j$ (cheque). Propriedades de $\liminf$ e $\limsup$ garantem

  $$-\sum_J x_j \leq -\overline{\lim} \sum_J x_{nj} \quad \text{e} \quad \sum_J x_j \leq \underline{\lim} \sum_J x_{nj}.$$

  Donde segue

  $$\sum_J x_j \leq \underline{\lim} \sum_J x_{nj} \leq \overline{\lim} \sum_J x_{nj} \leq \sum_J x_j \ \clubsuit$$

Capítulo 3

Apêndice. A Reta Estendida

3.1 A Reta Estendida

Definimos a reta estendida por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

[a reta acrescida dos **valores** $+\infty$ e $-\infty$]. Também indicamos $\overline{\mathbb{R}}$ por $[-\infty, +\infty]$. Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ definimos

$$a < b \text{ se: } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b, \text{ ou } a = -\infty \text{ e } b \neq -\infty, \text{ ou } a \neq +\infty \text{ e } b = +\infty.$$

A relação de ordem acima definida sobre $\overline{\mathbb{R}}$ é **total** [isto é, dados a e b, ambos na reta estendida, temos $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$] e **completa** [isto é, todo subconjunto não vazio A da reta estendida admite um único supremo, $\sup A$, e um único ínfimo, $\inf A$]. Notemos também que $+\infty$ [respectivamente, $-\infty$] é um majorante [respectivamente, minorante] de qualquer subconjunto da reta estendida.

Estão bem definidas, de maneira óbvia, a adição

$$+ : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(\pm\infty, \mp\infty)\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

e a multiplicação $\cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(0, \pm\infty), (\pm\infty, 0)\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Por conveniência definimos

$$0. \pm \infty = 0 \text{ e } \pm \infty.0 = 0.$$

3.2 Sequências na Reta Estendida.

Consideremos X um conjunto não vazio. Uma sequência em X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Indicamos a sequência x por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_n = x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Também denotamos x por $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ou, brevemente, (x_n).

Seja (x_n) uma sequência em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Temos as seguintes definições.

- (x_n) converge a $L \in \mathbb{R}$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos
$$|x_n - L| < \epsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$
- (x_n) converge [na reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$] a $+\infty$ se, para todo real $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos $x_n > M$, para todo $n \geq N$.
- (x_n) converge [em $\overline{\mathbb{R}}$] a $-\infty$ se a sequência $(-x_n)$ converge a $+\infty$.
- (x_n) diverge [na reta estendida] se (x_n) não converge a nenhum valor em $\overline{\mathbb{R}}$ [números também são valores].

Se (x_n) converge a algum valor $L \in \overline{\mathbb{R}}$, pomos $\lim x_n = L$ ou
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$
ou, brevemente, $x_n \to L$.

Suponhamos que a sequência (x_n) é real. Temos as seguintes definições.

- Se $\lim x_n = \pm\infty$, dizemos também que (x_n) diverge [em $\mathbb{R}$] a $\pm\infty$.
- Se (x_n) não converge a um número real, dizemos que (x_n) diverge [em $\mathbb{R}$].

O conjunto das sequências reais e convergentes em $\mathbb{R}$, munido das operações
$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \quad \text{e} \quad \lambda(x_n) = (\lambda x_n), \text{ onde } \lambda \in \mathbb{R},$$
é um espaço vetorial real e temos
$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n \quad \text{e} \quad \lim \lambda x_n = \lambda \lim x_n.$$

Quanto à multiplicação e ao quociente, de sequências reais e convergentes, temos as propriedades

$$\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n) \quad \text{e} \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \text{ se } y_n \neq 0\,, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e } y \neq 0.$$

Seja X um conjunto e (x_n) uma sequência em X. Dado um subconjunto infinito de índices $\{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ em $\mathbb{N}$, dizemos que a sequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de (x_n). Brevemente, escrevemos (x_{n_k}).

Observação 1. Seja (x_n) uma sequência em $[-\infty, +\infty]$. São equivalentes as afirmações abaixo.

- $x_n \to L$.
- Toda subsequência (x_{n_j}) converge a L.
- Toda subsequência $(x_{n_j}) = (y_j)$ admite uma subsequência $y_{j_k} \xrightarrow{k\to+\infty} L$.

Valor de Aderência. Dizemos que $L \in [-\infty, +\infty]$ é um valor de aderência de (x_n) se existe uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to L$, se $k \to +\infty$.

Uma sequência $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ é crescente [decrescente] se temos

$$x_{n+1} \geq x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \;\; [x_{n+1} \leq x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}].$$

Ainda, (x_n) é estritamente crescente [estritamente decrescente] se

$$x_{n+1} > x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \;\; [x_{n+1} < x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}].$$

Dizemos que (x_n) é monótona se (x_n) é crescente ou decrescente.

Suponhamos que (x_n) é uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \to p^+$. Notemos que existe uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(y_j) = (x_{\sigma(j)})$ é descrescente e $y_j \to p^+$. Alerta: a sequência $(x_{\sigma(j)})$ pode não ser uma subsequência de (x_n).

Para melhor explorarmos as propriedades relativas aos valores de aderência de uma sequência, é útil o teorema que segue.

3.1 Teorema. *Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ admite uma subsequência monótona.*

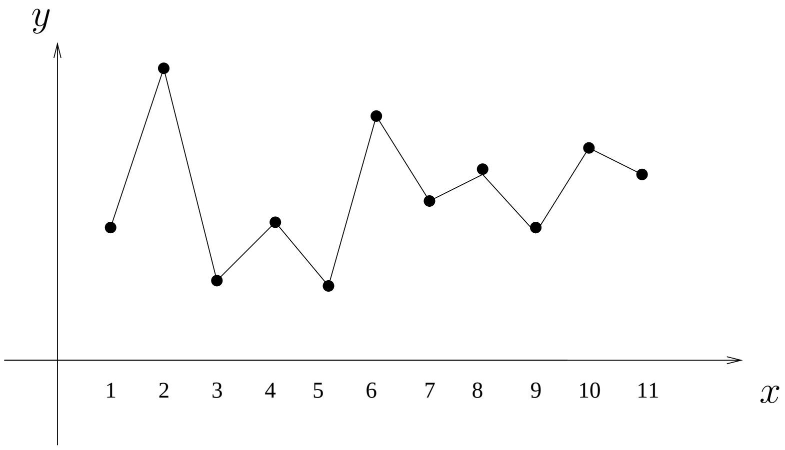

Figura 3.1: Função poligonal conectando os pontos $(n, x_n) \in \mathbb{R}^2$

Prova. (Vide figura 3.1.)

Seja $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n > x_m, \text{ para todo } m > n\}$.

Se M é infinito, temos $M = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$ e (x_{n_k}) decresce. Se M é finito, seja $n_1 = 1 + \max M$. Então, $n_1 \notin M$ e existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$ e, analogamente, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Por recursão, construímos uma subsequência (x_{n_k}) crescente ♣

Toda sequência (x_n) em $\overline{\mathbb{R}}$ tem um valor de aderência em $\overline{\mathbb{R}}$. De fato, consideremos o conjunto

$$J = \{n : x_n = +\infty \text{ ou } x_n = -\infty\}.$$

Se J é infinito, então ou $-\infty$ ou $+\infty$ [ou ambos] é valor de aderência de (x_n). Se J é finito, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que a subsequência $(x_n)_{n \geq N}$ é real. Assim, se $(x_n)_{n \geq N}$ é ilimitada superiormente, ou inferiormente, em $\mathbb{R}$, então $+\infty$, ou $-\infty$, é valor de aderência de $(x_n)_{n \geq N}$ e, portanto, de (x_n) também. Se $(x_n)_{n \geq N}$ é limitada em $\mathbb{R}$, pelo Teorema 3.1 segue que $(x_n)_{n \geq N}$ tem uma subsequência monótona e limitada em $\mathbb{R}$ e portanto convergente em $\mathbb{R}$. Logo, $(x_n)_{n \geq N}$ tem um valor de aderência em $\mathbb{R}$ e, portanto, a sequência (x_n) também tem.

A seguir, dada $(x_n)_{\mathbb{N}}$ em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, consideremos o conjunto (não vazio)

$$\mathcal{L} = \{L \in [-\infty, +\infty] : L \text{ é valor de aderência de } (x_n)\}.$$

Definimos

$$\liminf x_n = \inf \mathcal{L} \quad \text{e} \quad \limsup x_n = \sup \mathcal{L}, \text{ ambos em } [-\infty, +\infty].$$

Observação 2. Para todo $N \in \mathbb{N}$, as sequências $(x_n)_{\mathbb{N}}$ e $(x_n)_{n>N}$ tem os mesmos valores de aderência e, portanto, os mesmos $\liminf$ e $\limsup$.

3.2 Teorema. *Seja (x_n) um sequência na reta estendida.*

(a) $\alpha = \liminf x_n$ é (o menor) valor de aderência de (x_n).

(b) $\beta = \limsup x_n$ é (o maior) valor de aderência de (x_n).

(c) $\lim x_n = L$ se e somente se $\liminf x_n = \limsup x_n = L$.

(d) Se (x_n) é limitada em $\mathbb{R}$, então $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$ são reais.

Prova.

(a)
- ◇ Caso $\alpha = -\infty$. É claro que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ com $x_{n_1} < -1$. Pela Observação 2, a sequência $(x_n)_{n>n_1}$ tem os mesmos valores de aderência que (x_n) e então existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} < -2$. Iterando, obtemos $x_{n_j} \to -\infty$.
- ◇ Caso α real. Por definição de ínfimo, existe um valor de aderência de $(x_n)_{\mathbb{N}}$ em $[\alpha, \alpha+1)$. Logo, existe n_1 tal que $x_{n_1} \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$. Como o $\liminf$ da subsequência $(x_n)_{n>n_1}$ é também α, por um raciocínio análogo ao anterior concluímos que existe um índice $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in (\alpha - 1/2, \alpha + 1/2)$. Iterando tal processo obtemos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a α.
- ◇ Caso $\alpha = +\infty$. Então, $\mathcal{L} = \{+\infty\}$. Pela Observação 1, $x_n \to +\infty$.

(b) Basta trocar (x_n) por $(-x_n)$.

(c) São equivalentes: $\alpha = \beta = L$, o único valor de aderência é L, e $x_n \to L$.

(d) Trivial♣

Se (x_n) é uma sequência real ilimitada superiormente na reta [respectivamente, ilimitada inferiormente na reta], temos $\limsup x_n = +\infty$ [respectivamente, $\liminf x_n = -\infty$].

Dada uma sequência (x_n) na reta estendida, utilizamos as notações

$$\overline{\lim}\, x_n = \limsup(x_n) = \limsup x_n \quad \text{e} \quad \underline{\lim}\, x_n = \liminf(x_n) = \liminf x_n.$$

Observação 3. Uma sequência (x_n) tem uma subsequência convergente a L em $\mathbb{R}$ se e só se, dados quaisquer $\epsilon > 0$ e N em $\mathbb{N}$, existe $n > N$ tal que

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

Verifique, é trivial.

3.3 Teorema. *Seja (x_n) uma sequência em $\overline{\mathbb{R}}$. Valem as identidades*

$$\liminf x_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{j\geq n} x_j = \lim_{n\to+\infty} \inf_{j\geq n} x_j \quad e \quad \limsup x_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{j\geq n} x_j = \lim_{n\to+\infty} \sup_{j\geq n} x_j.$$

Prova.

Trocando (x_n) por $(-x_n)$, vemos que basta analisar $\liminf x_n$. Pela Observação 2, para todo n temos

$$\inf_{j\geq n} x_j \leq \liminf(x_j)_{j\geq n} = \liminf x_n.$$

Logo,

$$a = \sup_{n\geq 1} \inf_{j\geq n} x_j \leq \liminf x_n.$$

Só resta vermos que a é valor de aderência de (x_n).

◇ Caso $a = -\infty$. É claro que

$$\inf_{j>n} x_j = -\infty, \text{ para todo } n.$$

Logo, existe $j_1 > 1$ tal que $x_{j_1} < -1$. Então, temos

$$\inf_{j>j_1} x_j = -\infty$$

e existe $j_2 > j_1$ tal que $x_{j_2} < -2$. Iterando, obtemos $x_{j_k} \to -\infty$ e portanto $-\infty$ é valor de aderência de (x_n).

- Caso a real. Sejam $\epsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$. Como $(\inf_{j>n} x_j) \nearrow a$, segue que existe $m > N$ tal que
$$a - \epsilon < \inf_{j>m} x_j \leq a.$$
Por definição de ínfimo, existe $n > m > N$ tal que
$$a - \epsilon < \inf_{j>m} x_j \leq x_n < a + \epsilon.$$
Pela Observação 3, o número real a é valor de aderência de (x_n).

- Caso $a = +\infty$. Temos
$$x_n \geq \inf_{j\geq n} x_j \quad \text{e} \quad \inf_{j\geq n} x_j \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$
Donde segue $x_n \to +\infty$♣

Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências reais. Se a soma de limites inferiores está bem definida, temos (cheque)
$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf (x_n + y_n).$$

Agradecimentos. Agradeço a Leandro Cândido por me chamar a atenção para o "Teorema da Covergência Dominada para séries numéricas".

Referências.

1. de Oliveira, Oswaldo R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv (2012). Available at http://arxiv.org/abs/1207.1472v2.
2. Tao, T., *An Introduction to Measure Theory*, GSM Vol. 126, AMS, 2011.

Departamento de Matemática - Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil
http://www.ime.usp.br/~oliveira *oliveira@ime.usp.br*