Anos 2016 e 2022

SÉRIES NUMÉRICAS - SOMAS NÃO ORDENADAS

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Capítulo 1 - Séries.

Capítulo 2 - Séries, Comutatividade e Associatividade.

Capítulo 1

SERIES

1.1 - Introdução

Talvez o mais antigo e famoso argumento envolvendo um somatório infinito seja o paradoxo "Dicotomia", de Zenão de Eléia (entre 490 e 485 - c. 430 a.C.),

"Um corredor nunca pode chegar ao fim
de uma corrida pois antes de chegar
ao fim, ele precisa chegar ao meio.
Depois, ao meio do que falta
e assim sucessivamente ad infinitum".

Atualmente, interpretamos tal paradoxo como o cômputo do somatório dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão

$$r = \frac{1}{2}$$

e, é claro, tal soma é 1. Isto é,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

Porém, para Zenão um somatório infinito não poderia ter soma finita.

Quase um século após Zenão, Eudoxo (408-355? a.C.) utilizou somatórios infinitos e computou áreas e volumes (método da exaustão).

Somatórios infinitos enumeráveis são a base do cálculo integral e surgem também com a fórmula de Taylor (e outros processos de aproximação)

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots.$$

Tendo definido uma forma de somar, dada uma sequência investigaremos se é possível atibuir a ela um valor (a soma da série) e veremos que com frequência não seremos capazes de responder qual é este valor. Citemos e traduzamos Beardon [2, p. 61], "*Enquanto frequentemente precisamos saber se uma dada série converge ou não, com frequência temos pouco ou zero interesse no valor exato da soma infinita. Em outras palavras, a existência da soma infinita é em geral mais importante que o seu valor. De fato, exemplos em que obtemos uma forma explícita para o valor da soma infinita são bem raros, e na maioria dos casos onde a soma é importante, temos que recorrer a métodos computacionais para estimá-la.*"

O axioma/propriedade do supremo é a ferramenta teórica a indicar a soma de uma série de termos positivos. Na prática, comparamos a série com uma série geométrica para decidir se existe ou não a soma da série. Séries de números reais que apresentam termos positivos e termos negativos requerem, em geral, cuidados extras e para estas mostraremos uns poucos critérios e o Teorema de Riemann[1].

Apresentamos também uma seção dedicada à importante representação decimal de um número real.

Séries de números complexos são redutíveis a duas séries de números reais.

Neste texto apresentaremos também a série binomial complexa, que é uma série de potências. Entretanto, um estudo mais geral das importantes Séries de Potências Complexas requer uma abordagem mais específica.

As séries condicionalmente convergentes e as séries absolutamente convergentes são analisadas mais detidamente no segundo e último capítulo (Somas Não Ordenadas).

Este material também não contém um estudo das importantes Séries de Fourier (séries de funções trigonométricas).

[1]G. F. B. Riemann (1826-1866) criou a geometria depois utilizada na física relativística.

1.2 - Elementos

Definições. *Uma* sequência *em* $\mathbb{R}$, *ou em* $\mathbb{C}$, *é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *ou uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, *indicada* $x = (x_n)$, *com* $x_n = x(n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Escrevemos então,* $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *e ainda,* $(x_n) = (x_n)_{\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Ainda mais,*

- *Se* $\{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ *é um subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$, *então* $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ *é uma* subsequência *da sequência* (x_n).

- (x_n) *é uma* sequência real crescente [descrescente] *se* $x_n \geq x_m$ $[x_n \leq x_m]$ *para todo* $n \geq m$, *onde* n *e* m *pertencem a* $\mathbb{N}$.

Notemos que toda subsequência é uma sequência.

Exemplos. Temos, em $\mathbb{R}$, os exemplos abaixo de sequências e subsequências.

- Se $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(x_n) = (1, 2, 3, \ldots)$ é a sequência estritamente crescente dos naturais.

- Se $y_n = 2n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então (y_n) é a subsequência dos pares da sequência dos naturais.

- Se $r \in \mathbb{R}$ e $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então (s_n) é a sequência das somas finitas das progressões geométricas de razão r, de 1 a r^n.

- Se $x_n = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
é a sequência dos inversos dos naturais.

- Se $x_n = \sqrt[n]{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $(x_{2n+1}) = (\sqrt[2n+1]{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência da sequência $(\sqrt[n]{n})$.

Definições. *Seja* (x_n) *uma sequência real (isto é,* $x_n \in \mathbb{R}$ *para todo* n*), ou uma sequência complexa (isto é,* $x_n \in \mathbb{C}$ *para todo* n*). Dizemos que a sequência* (x_n)

- converge a $L \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $L \in \mathbb{C}$*) se para todo* $\epsilon > 0$ *existe um índice* n_0 *tal que temos* $|x_n - L| < \epsilon$ *para todo* $n \geq n_0$*. Temos então a notação*
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L.$$
- diverge *se não existe* $L \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $L \in \mathbb{C}$*) tal que* $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$*.*
- *Seja* (x_n) *uma sequência real. Dizemos que* (x_n) diverge a $+\infty$ *se para todo* $M \in \mathbb{R}$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > M$ *se* $n \geq n_0$*. Utilizamos então a notação*
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$
- *Seja* (x_n) *uma sequência real. Dizemos que* diverge a $-\infty$ *se para todo* $M \in \mathbb{R}$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < M$ *se* $n \geq n_0$*. Utilizamos então a notação*
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$
- *Seja* $(x_n) = (z_n)$ *uma sequência complexa. Dizemos que* (z_n) diverge a $+\infty$ *se* $(|z_n|)$ *diverge a* $+\infty$*. Utilizamos então a notação*
$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty.$$

Exemplos. Seguem exemplos de sequências reais convergentes e divergentes.

- Se $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.
- Se $|r| < 1$ e $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-r}.$$
- Se $x_n = 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$
- Se
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$
então segue
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Consideremos uma sequência $(a_n)_{\mathbb{N}}$, real ou complexa.

A série de termo geral a_n [ou série gerada pela sequência $(a_n)_{\mathbb{N}}$, também denotada (a_n)] é o par ordenado

$$\big((a_n),(s_n)\big),$$

com $(s_n) = (s_n)_{\mathbb{N}}$ a sequência das somas parciais de (a_n) e

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n$$

a soma parcial de ordem n da série. [Destaquemos que com a expressão para a soma parcial estamos explicitando como somar os termos da sequência (a_n).]

Tal série é dita convergente se (s_n) converge a um número (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e

$$s = \lim s_n \quad \text{(se existir o limite)}$$

é a soma da série indicada por

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

A série é dita divergente se a sequência (s_n) é divergente. Neste caso, dizemos que a soma da série não existe.

Abusando da notação, denotamos uma série arbitrária $\big((a_n),(s_n)\big)$ por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty.$$

Ainda, dado p em $\mathbb{N}$, definimos a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ como

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n, \text{ onde } b_n = 0, \text{ se } n < p, \text{ e } b_n = a_n \text{ se } n \geq p.$$

Para investigar a convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ podemos ignorar qualquer quantidade finita de seus termos pois temos

$$s_n = s_p + \sum_{m=p+1}^{n} a_m, \text{ para todo } n > p,$$

e é claro que existe $\lim s_n$ se e somente se existe

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=p+1}^{m=n} a_m.$$

Isto é, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e somente se a série $\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$ converge. Se uma destas converge, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n.$$

Uma série complexa $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge se e somente se suas partes real e imaginária, dadas pelas séries reais $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$, convergem e então segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Teorema. *Suponhamos $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é convergente se e somente se a sequência das somas parciais $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ é uma sequência limitada.

Prova. Imediata aplicação do Axioma/Propriedade do Supremo ♣

Corolário (Critério da comparação para séries de termos positivos). *Suponhamos $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.*

Prova. Segue diretamente do teorema acima ♣

Proposição (Propriedades de linearidade). *Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ duas séries convergentes de números complexos e seja λ um número complexo. Então, as séries $\sum_{n=0}^{+\infty}(z_n + w_n)$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda z_n$ são convergentes e satisfazem*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(z_n + w_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda z_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} z_n.$$

Prova. Exercício (segue das propriedades de linearidade para limites de sequências).

Proposição (Critério do termo geral). *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série (real ou complexa) convergente. Então,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Prova.

É óbvio que $s_{n+1} - s_n = a_n$. Por hipótese, existe a (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tal que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = a.$$

É fácil ver que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{n+1} = a$. Segue então

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_n \ = a - a = 0 \clubsuit$$

Definição. Uma sequência (a_n) é de Cauchy se dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|a_n - a_m| < \epsilon, \text{ para quaisquer } n, m \geq n_0.$$

Proposição (Critério de Cauchy para séries). *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série em $\mathbb{C}$. Tal série converge se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que temos*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon, \ \textit{para quaisquer } n > n_0 \textit{ e } p \in \mathbb{N}.$$

Prova. Seja s_n a n-ésima soma parcial da série dada.

É evidente a identidade $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$. Logo, a série dada satisfaz a desigualdade desejada se e só se (s_n) é de Cauchy.

Uma sequência real é convergente se e somente se ela é de Cauchy. [Por hora, assumamos este muito importante e clássico teorema (que está provado na seção 1.4 "Resultados sobre Sequências e os Testes da Raiz e da Razão")].

Por extensão, uma sequência em $\mathbb{C}$ é convergente se e só se ela é de Cauchy.

Portanto, são equivalentes: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ satisfaz a desigualdade desejada, a sequência (s_n) é de Cauchy, (s_n) converge e a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge $\clubsuit$

Definições. *A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, em $\mathbb{C}$, é*

- **absolutamente convergente** *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty$.
- **condicionalmente convergente** *se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge mas $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \infty$.*

Logo mais veremos que as séries absolutamente convergentes convergem e estudaremos o exemplo clássico de série condicionalmente convergente. A saber,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(série harmônica alternada).}$$

Exemplo 1. Temos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ diverge pois } \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \neq 0.$$

Exemplo (Série Geométrica). A série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

satisfaz

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \text{se } |z| < 1\,, \text{ e } \; \text{diverge se } |z| \geq 1.$$

Prova.

Pela fórmula para a soma de uma progressão geométrica finita temos,

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}\,, \text{ se } z \neq 1\,,$$

e já vimos que $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$, se $|z| < 1$. Logo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}\,, \text{ se } |z| < 1.$$

Se $|z| \geq 1$ temos $\lim_{n\to+\infty} z^n \neq 0$ e, pelo critério do termo geral, a série diverge ♣

Exemplo 2. A Figura abaixo, ilustra geométricamente a série geométrica e real

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n, \text{ com } 0 < r < 1.$$

Se θ é o ângulo indicado, por semelhança de triângulos temos

$$\frac{1 + r + \cdots + r^n + \cdots}{1} = \frac{1}{1-r} = \frac{r}{r - r^2} = \cdots = \frac{r^n}{r^n - r^{n+1}} = \cdots.$$

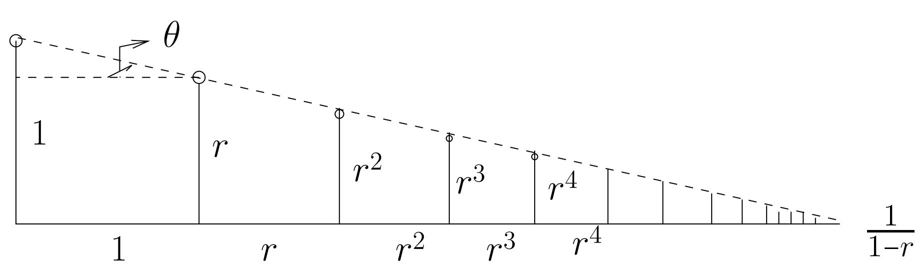


Figura 1.1: Série Geométrica de Razão $0 < r < 1$.

Várias das funções usualmente estudadas apresentam um desenvolvimento em séries. Vejamos algumas delas.

Definição. A série de Taylor[2] *de uma função $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ infinitamente derivável (que indicamos $f\in C^\infty$) em torno de um ponto x_0, calculada em um ponto x, é*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

A série de Taylor de f avaliada em x pode convergir ou não ao valor $f(x)$ e pode até mesmo divergir.

O polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de x_0 é

$$P_n(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

O erro cometido ao aproximarmos $f(x)$ por $P_n(x)$ é

$$R_n(x)=\ f(x)-P_n(x).$$

A série de Taylor de f no ponto x converge a $f(x)$ se e somente se

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0.$$

Neste texto utilizamos as fórmulas de Taylor com resto infinitesimal, integral, de Cauchy e de Lagrange. Tais fórmulas estão apresentadas em

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-FORMULATAYLOR.pdf`

Definição. *A* **série de Maclaurin**[3] *de uma função $f:(-r,r)\to\mathbb{R}$, com $r>0$ e $f\in C^\infty$, é a série de Taylor de f em torno do ponto $x=0$.*

---

[2] B. Taylor (1715). Tal série já era conhecida pelo escocês J. Gregory (1638-1675) e, na Índia, antes de 1550.

[3] O escocês C. Maclaurin (1698-1746), em 1742. Alguns matemáticos a anteciparam e Gregory já as conhecia para $\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{arcsec} x$ e $\arctan x$, vide Exemplo sobre a função arco tangente. Clio, a musa da história, é com frequência caprichosa ao batizar teoremas.

Exemplos 3 (As séries de Taylor-Maclaurin para as funções exponencial real, seno real e cosseno real). *Seguem as séries de Maclaurin das funções reais e^x, sen$\,x$ e $\cos x$.*

(a) Pela que já estudamos sobre a função exponencial real segue

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange para a função $\operatorname{sen} x$ na origem temos, fixado $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(0) + \operatorname{sen}'(0)x + \operatorname{sen}''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \operatorname{sen}^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \operatorname{sen}^{(k+1)}(\overline{x})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

para algum $\overline{x}$ entre 0 e x. É claro que $\operatorname{sen}n^{(2n)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x$ e também $\operatorname{sen}^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ e assim, $\operatorname{sen}^{(2n)}(0) = 0$ e $\operatorname{sen}^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Ainda mais, é óbvio que

$$\left| \operatorname{sen}^{(k+1)}(\overline{x})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$$

sendo que temos

$$\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \to 0 \text{ se } k \to +\infty.$$

Logo,

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(c) Similarmente a (b) temos

$$\begin{cases} \cos^{(2n)} x = (-1)^n \cos x, \ \cos^{(2n+1)} x = (-1)^{n+1} \sin x, \\ \\ \cos^{(2n)} 0 = (-1)^n \text{ e } \cos^{(2n+1)} 0 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \clubsuit$$

Exemplo 4 (A série harmônica). *A série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge[4]. Verifique.

Exemplo 5 (Série harmônica generalizada). *A série harmônica generalizada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p},$$

converge se $p > 1$ *e diverge se* $p \leq 1$.

Prova.

Fixo $p > 1$, se s_{2^n-1} é a $(2^n - 1)$-ésima soma parcial da série temos

$$\begin{aligned}
s_{2^n-1} = 1 &+ \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) \\
&+ \cdots + \left[\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right] \\
&< \ 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m < \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}, \ \text{para todo } n.
\end{aligned}$$

Sendo assim, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

é uma série de termos positivos, a sua sequência (s_n) das somas parciais é limitada e portanto a série converge. Desta forma, se $p \leq 1$ temos

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$$

e portanto a série dada diverge.

[4]N. Oresme (1323?-1382), parisiense e bispo católico, provou este resultado em 1350, um grande feito à época.

Exemplo 6 (Série para logaritmo e a série harmônica alternada). *Mostremos a convergência da série para a função* $\ln x$*, chamada* série de Mercator*(1668)*[5]*,* *e a convergência condicional da* série harmônica alternada*, dadas por*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots\,, \ -1 < \ x \leq \ 1, \ e$$

$$\ln 2 \quad = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \ (-1)^n \frac{1}{n+1} \ + \cdots .$$

Prova.

Vale a progressão geométrica

$$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-t)^n = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}, \text{ com } t \neq -1.$$

Destacando $1/(1+t)$ e integrando obtemos, para cada $x \in (-1,1]$,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt.$$

◇ Caso $x \in [0,1]$. Para $0 \leq t \leq x \leq 1$ (vide figura) temos $1 \leq 1+t$.

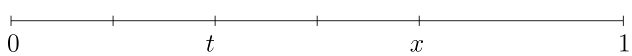


Figura 1.2: A disposição $0 \leq t \leq x \leq 1$.

Donde concluímos

$$\left| \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt \right| \leq \int_0^x t^{n+1}\,dt = \frac{x^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

◇ Caso $x \in (-1,0)$. Para $-1 < x \leq t \leq 0$ (vide figura),

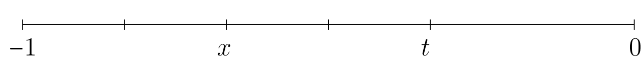


Figura 1.3: A disposição $-1 < x \leq t \leq 0$.

encontramos

$$0 < 1+x \leq 1+t \leq 1, \qquad 1 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x} \ \text{ e então}$$

$$\left| \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt \right| \leq \frac{1}{1+x} \int_x^0 |(-t)^{n+1}|\,dt = \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{(1+x)(n+2)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \ ♣$$

[5] O danês N. Mercator (1620-1687), que desenhou as fontes de Versailles. Pietro Mengoli (1625-1686), também danês e um dos principais precursores do estudo de séries infinitas, obteve o mesmo resultado e chamou de logaritmo natural os valores determinados por tal série.

Exemplos 7 (Série para arco tangente e a série de Leibniz). *Mostremos a convergência da série para* $\arctan x$, *dita* série de Gregory*(1671)*[6] *e da* série de Leibniz, *dadas respectivamente por*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \ |x| \leq 1\,,$$

$$\text{(Leibniz)} \quad \frac{\pi}{\mathbf{4}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots.$$

Prova.

Similarmente ao último exemplo acima, integrando

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}, \text{ com } t \in \mathbb{R},$$

encontramos

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Concluímos então mostrando que para $|x| \leq 1$ a parcela contendo a integral na equação acima tende a zero se $n \to +\infty$.

De fato, obtemos

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2(n+1)}\,dt \right| \leq \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right| \leq \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \,\clubsuit$$

Observação. A série de Leibniz converge condicionalmente pois, claramente,

$$\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n}$$

e, utilizando o Exemplo acima temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

[6] Gregory foi o introdutor do termo convergência e deduziu a série de Leibniz antes que este.

1.3 - Critérios da Comparação

Dado $z \in \mathbb{C}$, temos

$$0 \leq \max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|).$$

Teorema. *Toda série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ (em $\mathbb{C}$) absolutamente convergente é convergente.*

Prova.

- A série complexa dada origina duas séries em $\mathbb{R}$. A saber,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

  Logo, a série dada converge absolutamente se e somente se sua parte real e sua parte imaginária convergem absolutamente [devido às desigualdades $\max(|\mathrm{Re}(z_n)|, |\mathrm{Im}(z_n)|) \leq |z_n| \leq |\mathrm{Re}(z_n)| + |\mathrm{Im}(z_n)|$]. Portanto, sem perda de generalidade podemos supor a série em $\mathbb{R}$.

  Consideremos então uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$, com cada $a_n \in \mathbb{R}$. Temos $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ e então, como a série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2|a_n|$ converge, pelo critério da comparação segue que a série de números positivos $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + |a_n|)$ converge. Portanto, como a série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-|a_n|)$ é convergente, concluímos que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + |a_n|) + \sum_{n=0}^{+\infty}(-|a_n|)$$

  também converge ♣

Seguem resultados que desde o Critério da Comparação abaixo até os Critérios da Razão e da Raiz, não dependem da relação de ordem em $\mathbb{R}$ e sim da função módulo e, portanto, valem em $\mathbb{C}$.

Proposição (Critério da Comparação). *Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ séries em $\mathbb{C}$. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| \leq c|b_n|$, para todo $n > n_0$, e $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < \infty$ então temos*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty.$$

Prova. Segue do critério de comparação para séries de termos positivos e das propriedades de linearidade♣

Exemplo 8. *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} sen\,\frac{1}{n}$$

é convergente.

Prova.

Pela conhecida desigualdade

$$|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta|, \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R},$$

segue

$$\left|\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Exemplo 5 segue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Então, pelo Critério da Comparação, e como convergência absoluta implica em convergência, concluímos que a série dada converge ♣

Exemplo 9. *Temos,*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} = +\infty.$$

Prova.

Como

$$e^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} \geq n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

computando o logaritmo natural nos dois lados desta inequação obtemos

$$\ln n \leq n \quad \text{e} \quad \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mas, pelo Exemplo 4 a série harmônica diverge. Isto é,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

e assim a série dada diverge ♣

O critério que segue guarda semelhanças com o critério da comparação (para séries quaisquer) que acabamos de mostrar. Entretanto, é útil enunciá-lo à parte.

Proposição (Critério da Comparação no Limite). *Sejam*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n, \ \text{com cada } b_n \neq 0,$$

séries complexas satisfazendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = L \in [0,+\infty].$$

Então, vale o que segue.

(a) Se $L = 0$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.

(b) Se $0 < L < +\infty$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge se, e só se, $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ converge.

(c) Se $L = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ diverge, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

Prova.

(a) Se $L = 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que temos $|a_n| \leq |b_n|$ para todo $n \geq n_0$. Logo,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

(b) Neste caso, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ temos

$$|b_n|\frac{L}{2} \leq |a_n| \ \leq \frac{3L}{2}|b_n|.$$

A tese segue então do critério da comparação para séries de termos positivos.

(c) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $|a_n| \geq |b_n|$. Logo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \geq \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| = +\infty \ \clubsuit$$

Exemplo 10. *Temos,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{13n^3 + 2n - 3}{n^7 + 4n^5 - 3n^2 + 20} < \infty.$$

Prova.

Como a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

é convergente (já mostramos) e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{13n^3+2n-3}{n^7+4n^5-3n^2+20}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4(13n^3 + 2n - 3)}{n^7 + 4n^5 - 3n^2 + 20} = \lim_{n\to+\infty} \frac{13 + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{3}{n^5} + \frac{20}{n^7}} = 13\,,$$

pelo Critério da Comparação no Limite segue que a série dada, de termos positivos, é convergente ♣

Exemplo 11. *A sequência* $(\sqrt[n]{n})$ *satisfaz*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Prova. Exercício ♣

Exemplo 12. *Temos,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = +\infty.$$

Prova.

Pelo Exemplo 11 segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Já vimos que a série harmônica diverge. Isto é,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Logo, pelo Critério da Comparação no Limite, a série dada diverge ♣

1.4 - Resultados sobre Sequências e os Testes da Raiz e da Razão

Teorema. *Toda sequência real (x_n) admite uma subsequência monótona (isto é, crescente ou decrescente).*

Prova. Chamemos o índice n de um "ponto de pico (cimo)" da sequência (x_n) se ocorre $x_n > x_m$ para todo $m > n$.

- Se (x_n) tem uma quantidade infinita de pontos de pico, $\{n_1 < n_2 < \cdots\}$, então a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente decrescente pois temos

$$x_{n_1} > x_{n_2} > \cdots.$$

- Se (x_n) tem uma quantidade finita de pontos de pico, seja n_1 um natural estritamente maior que todos os pontos de pico de (x_n). Como n_1 não é um ponto de pico então existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$ e, como n_2 também não é ponto de pico segue que existe $n_3 > n_2$, $n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Iterando, temos uma subsequência crescente da sequência (x_n)♣

Lema. *Se (x_n) é real, crescente [decrescente] e limitada. então (x_n) é convergente.*

Prova.

Como $(-x_n)$ é crescente se (x_n) é decrescente, basta supormos (x_n) crescente. Então, pela propriedade do supremo segue que existe

$$\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta - \epsilon < x_{n_0} \leq \beta$. Vide figura.

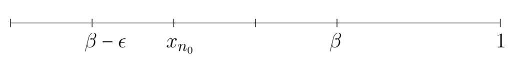


Figura 1.4: A disposição $\beta - \epsilon < x_{n_0} \leq \beta$

Então, como (x_n) é crescente, para todo $n \geq n_0$ temos $\beta - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \beta$, o que implica $|x_n - \beta| < \epsilon$ se $n \geq n_0$♣

Teorema. *Toda sequência real limitada admite uma subsequência convergente.*

Prova. Segue do teorema e do lema imediatamente anteriores ♣

Teorema. *Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Então, (x_n) é convergente se e somente se (x_n) é de Cauchy.*

Prova.

$(\Rightarrow)$ Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim x_n = x$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que temos

$$|x_n - x| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Logo, para todo $n \geq n$ e todo $m \geq n_0$ temos

$$|x_n - x| < \epsilon \text{ e } |x_m - x| < \epsilon,$$

e então

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < 2\epsilon.$$

$(\Leftarrow)$ Dado $\epsilon = 1$, existe n_0 tal que temos

$$|x_n - x_m| < 1, \text{ para quaisquer } n \geq n_0 \text{ e } m \geq n_0.$$

Donde segue

$$|x_n - x_{n_0}| < 1, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Isto mostra que a sequência (x_n) é limitada.

Então, pelo teorema imediatamente anterior, a sequência (x_n) tem uma subsequência (x_{n_k}) que é convergente a um real x.

Mostremos que a sequência (x_n) converge a x. Consideremos um arbitrário $\epsilon > 0$. Então, existe um índice k_0 tal que temos

$$|x_{n_k} - x| < \epsilon \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Por hipótese, (x_n) é de Cauchy. Logo, existe também um índice n_0 tal que temos

$$|x_n - x_m| < \epsilon \text{ para todos } n \geq n_0 \text{ e } m \geq n_0.$$

Consideremos $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $k^* > k_0$ e $n_{k*} > n_0$. Então, para todo $n > n_{k*}$ temos

$$|x_n - x_{n_{k*}}| < \epsilon \text{ com } |x_{n_{k*}} - x| < \epsilon.$$

Donde segue

$$|x_n - x| < 2\epsilon, \text{ para todo } n > n_{k*}.$$

Isto mostra que (x_n) é convergente (converge a x) ♣

Já vimos que toda sequência real tem uma subsequência monótona. Assim, admitindo $-\infty$ e $+\infty$ como valores (não números) para limites, toda sequência real tem uma subsequência convergente na reta estendida $[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Doravante, as sequências reais que divergem a $+\infty$, ou a $-\infty$, são interpretadas como sequências que convergem na reta estendida.

Definições e Notações. *Consideremos uma sequência real* (x_n).

- *Um valor* $L \in [-\infty, +\infty]$ *é um* **valor de aderência** *de* (x_n) *se existe uma subsequência* (x_{n_k}) *que converge a* L.

- *Consideremos o conjunto*

$$\mathcal{L} = \{L \in [-\infty, +\infty] : \ L \text{ é valor de aderência de } (x_n)\}.$$

  Temos $\mathcal{L} \neq \varnothing$ *(pois toda sequência real tem subsequência convergente).*

  Denotemos o ínfimo e o supremo, na reta estendida, de $\mathcal{L}$ *por*

$$\inf \mathcal{L} = \liminf x_n = \underline{\lim} x_n \quad \text{e} \quad \sup \mathcal{L} = \limsup x_n = \overline{\lim} x_n.$$

Das propriedades abaixo, utilizaremos mais a Propriedade (e). A leitura da prova das demais pode ser adiada para quando necessário. Por completitude, enunciamos e provamos todas as principais propriedades.

Propriedades. *Seja* (x_n) *uma sequência real e* $L \in [-\infty, +\infty]$.

(a) *Se* (x_{n_k}) *é uma subsequência convergente a* L*, então*

$$\liminf x_n \leq L \leq \limsup x_n.$$

(b) *Se* (x_n) *converge a* L*, então toda subsequência de* (x_n) *converge a* L.

(c) *A sequência real* (x_n) *converge a* L *se e somente se* L *é o único valor de aderência de* (x_n)*. Isto é,*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L \iff \liminf x_n = \limsup x_n = L.$$

(d) *O* $\limsup x_n$ *e o* $\liminf x_n$ *são ambos valores de aderência de* (x_n)*. Assim,* $\limsup x_n$ *é o* maior valor de aderência *de* x_n *e, por outro lado,* $\liminf x_n$ *é o* menor valor de aderência *de* x_n.

(e) *Suponhamos* $\limsup x_n$ *real. Então, dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que temos*

$$x_n < \limsup x_n + \epsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

Verificações.

(a) É evidente. Pois, neste caso, $L \in \mathcal{L}$.

(b) Caso $L \in \mathbb{R}$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que temos: $|x_n - L| < \epsilon$ se $n \geq n_0$.

Seja (x_{n_k}) uma subsequência qualquer de (x_n). Por definição de subsequência, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Então, para todo $k \geq k_0$ temos

$$n_k \geq n_{k_0} > n_0 \text{ e } \ |x_{n_k} - L| < \epsilon.$$

Logo, (x_{n_k}) converge a L.

Caso $L = +\infty$. Deixo à leitora verificar tal caso.

Caso $L = -\infty$. Trocando (x_n) por $(-x_n)$ reduzimos este caso ao anterior.

(c) Analisemos a "ida" e a "volta".

($\Rightarrow$) Por (b), toda subsequência de (x_n) converge a L. Logo, $\mathcal{L} = \{L\}$ e consequentemente $\limsup x_n = \liminf x_n$.

($\Leftarrow$) Caso $L \in \mathbb{R}$. Consideremos $\epsilon > 0$ e o intervalo aberto $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Consideremos o conjunto de índices

$$J = \{j \in \mathbb{N} : x_j \notin (L - \epsilon, L + \epsilon)\}.$$

Suponhamos (por contradição) que J é um conjunto infinito de índices, digamos $J = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$, vemos que existe uma subsequência (x_{n_j}) fora de $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, Seja $(y_j) = (x_{n_j})$. Então, como toda sequência admite subsequência convergente, segue que existe uma subsequência (y_{j_k}) convergente a um valor fora do intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Portanto,

$$(x_{n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$$

é uma subsequência de (x_n) convergente a um valor distinto de L↯

O argumento acima mostra que J é finito. Seja N o máximo de J. Então, para todo $n > N$ temos que $n \notin J$ e portanto $x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$. Consequentemente, a sequência (x_n) converge a L.

Casos $L = +\infty$ e $L = -\infty$. Deixamos à leitora.

(d) Caso $\limsup x_n$ real. Escrevamos $\limsup x_n = \beta$.

Então, pela definição de supremo segue que existe uma sequência de valores de aderência $l_1, l_2, l_3, \ldots$ satisfazendo

$$\beta - \frac{1}{n} < l_n \leq \beta.$$

Como existe uma subsequência de (x_n) que converge a l_1, seque que existe um índice n_1 tal que $x_{n_1} \in (\beta - 1, \beta + 1)$.

Como existe uma subsequência de (x_n) que converge a l_2, seque que existe um índice $n_2 > n_1$ tal que

$$x_{n_2} \in \left(\beta - \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}\right).$$

Por iteração, encontramos uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ satisfazendo

$$x_{n_j} \in \left(\beta - \frac{1}{j}, \beta + \frac{1}{j}\right).$$

Donde segue que (x_{n_j}) converge a β. Logo, β é valor de aderência.

Caso $\limsup x_n = +\infty$. Analisemos dois sub-casos.

Sub-caso $\mathcal{L} \cap \mathbb{R}$ limitado superiormente. Isto é, suponhamos que o conjunto formado pelos valores de aderência reais é um conjunto limitado.

Então, como $\sup \mathcal{L} = \limsup x_n = +\infty$ e $\mathcal{L} \cap \mathbb{R}$ é limitado superiormente, segue imediatamente que $+\infty \in \mathcal{L}$. Isto é, $+\infty$ é um valor de aderência da sequência (x_n).

Sub-caso $\mathcal{L} \cap \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Então, existe uma sequência de valores de aderência reais $(l_1, l_2, l_3, \ldots)$ tal que $\lim_{k \to \infty} l_k = +\infty$.

Para $k = 1$, como l_1 é um valor real de aderência, existe um índice n_1 tal que $x_{n_1} \in (l_1 - 1, l_1 + 1)$.

Para $k = 2$, como l_2 é um valor real de aderência, existe um índice $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in (l_1 - 1/2, l_1 + 1/2)$.

Por iteração, encontramos uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ tal que

$$x_{n_k} \in \left(l_k - \frac{1}{k}, l_k + \frac{1}{k}\right), \text{ para todo } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Caso $\limsup x_n = -\infty$. Seja L um valor de aderência arbitrário. Utilizando a propriedade (a) segue que

$$-\infty \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq -\infty.$$

Logo, $-\infty$ é o único valor de aderência de (x_n) e

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Isto é, a sequência (x_n) converge na reta estendida ao valor $-\infty$.

Casos $\liminf x_n$ real, $\liminf x_n = -\infty$, e $\liminf x_n = +\infty$. Basta aplicar os resultados anteriores à sequência $(-x_n)$. Notemos que (por favor, cheque)

$$\limsup(-x_n) = -\liminf x_n \quad \text{e} \quad \liminf(-x_n) = -\limsup x_n.$$

(e) Basta ver que no caso contrário existe então um valor de aderência de (x_n) que supera $\limsup x_n$, o que é uma contradição♣

O Teste (geral) da Raiz, enunciado abaixo, é também chamado *Critério de Cauchy (1821)*. Eis o enunciado (traduzido) de Cauchy:

> "Ache o limite ou os limites para os quais a expressão $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ converge quando n cresce indefinidamente e denote por k o maior destes limites, ou, em outras palavras, o limite dos maiores valores da dita expressão. A série será convergente se $k < 1$ e divergente se $k > 1$".

A seguir apresentamos os Testes da Raiz e da Razão. A apresentação destes dois testes inclui duas formas gerais, as quais utilizam os conceitos $\limsup$ e $\liminf$. Com frequência, mas não sempre, podemos substituir estes dois limites pelo limite usual. Abaixo, enfatizamos tais fatos e relacionamos estes três citados limites ($\limsup$, $\liminf$, e o limite usual) com os dois citados testes (nas suas formas gerais e nas suas formas não gerais).

As verificações que seguem para os Testes da Raiz e da Razão utilizam tão somente a Propriedade (e) [e sua análoga para o $\liminf x_n$], para os valores de aderência de uma sequência, provada acima.

Teorema (Teste da Raiz, geral). *Sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *uma série complexa e*

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = R \in [0, +\infty].$$

(a) Se $R < 1$*, a série dada é absolutamente convergente.*

(b) Se $R > 1$*, a série dada é divergente.*

(c) Se $R = 1$*, o teste é ineficiente.*

Prova.

(a) Seja λ tal que $0 \leq R < \lambda < 1$. Vide figura.

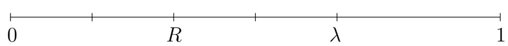


Figura 1.5: A disposição $0 \leq R < \lambda < 1$

Por definição de lim sup existe n_0 tal que se $n \geq n_0$ então $\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda$ e

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda^n < \infty.$$

(b) Pela definição de lim sup existe uma subsequência (a_{n_k}) satisfazendo

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1, \text{ para todo } k.$$

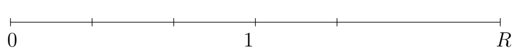


Figura 1.6: A disposição $1 < R$

Donde, $|a_{n_k}| > 1$ se $k \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim a_n \neq 0$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

(c) Observemos que

$$\text{a série harmônica } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge enquanto a série } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \clubsuit$$

Teste da Raiz (simplificado). Suponha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = R \in [0, +\infty]$. Se $R < 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge. Se $R > 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge. Se $R \notin \{0, 1, \infty\}$, interpretamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ se comporta como a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} R^n$.

Teorema (Teste da Razão, geral)[7]**.** *Dada* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *em* $\mathbb{C}$*, com* $a_{n's} \neq 0$*, sejam*

$$r = \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad e \quad R = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\ .$$

(a) *Se* $R < 1$*, a série dada é absolutamente convergente.*

(b) *Se* $r > 1$*, a série dada é divergente.*

(c) *Se* $r \leq 1 \leq R$*, o teste é ineficiente.*

Prova.

(a) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $R < \lambda < 1$ (vide figura).

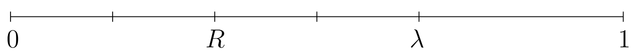


Figura 1.7: A disposição $R < \lambda < 1$

Pelas propriedades de lim sup, existe n_0 tal que para $n > n_0$ temos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \lambda.$$

Então, para $n > n_0$ obtemos a desigualdade

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}|a_{n_0}| \leq \lambda^{n-n_0}|a_{n_0}|,$$

donde segue

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < +\infty.$$

(b) Existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica (vide figura)

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1.$$

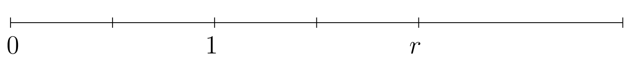


Figura 1.8: A disposição $1 < r$

Donde segue $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq |a_{n_0}| > 0$.

(c) Os exemplos para o Teste da Raiz (geral) servem aqui♣

Teste da Razão (simplificado). Se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \in [0, +\infty]$, então $r = R = \rho$. Se $\rho < 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge. Se $\rho > 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge. Se $\rho \notin \{0, 1, +\infty\}$, interpretamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ se comporta como a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n$.

[7] Também dito **Critério de d'Alembert**. Este teste já era conhecido antes de d'Alembert.

Teorema (Comparação entre os limites da razão e da raiz, para sequências). *Seja (x_n) uma sequência limitada em $(0,+\infty)$. Temos,*

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \ \leq\ \liminf \sqrt[n]{x_n} \ \leq\ \limsup \sqrt[n]{x_n} \leq\ \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad .$$

Em particular,

$$se \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in [0,+\infty] \quad então \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Prova.

◇ Basta provar

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} \leq\ \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

pois assim, para a sequência

$$\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

teremos

$$\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{x_n}} \leq \limsup \frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

Logo, das identidades

$$\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{x_n}} = \frac{1}{\liminf \sqrt[n]{x_n}} \quad \text{e} \quad \limsup \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n}}$$

segue a desigualdade para o $\liminf$.

◇ Então, é suficiente provarmos que

$$c > q = \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \text{implica} \quad \limsup \sqrt[n]{x_n} \leq c.$$

Dado $c > q$, onde q é o maior valor de aderência da sequência

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{\mathbb{N}},$$

sabemos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p \quad \text{implica} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c.$$

Logo, para $n > p$ segue

$$\frac{x_{p+1}}{x_p} \leq c\,, \frac{x_{p+2}}{x_{p+1}} \leq c\,, \ldots., \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq c.$$

Multiplicando estas desigualdades membro a membro obtemos

$$\frac{x_n}{x_p} \leq c^{n-p} = \frac{c^n}{c^p}.$$

Pondo

$$k = \frac{x_p}{c^p}$$

vemos que k independe de n e, $x_n \leq k\,c^n$, para todo $n > p$. Assim, vale a desigualdade $\sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{k}\,c$ para todo $n > p$. Portanto, como $\lim \sqrt[n]{k} = 1$, concluímos que

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup(\sqrt[n]{k}\,c) = \lim \sqrt[n]{k}c = c \clubsuit$$

Adendo. Vale então a propriedade

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0, +\infty] \ \text{ implica } \ \lim \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Logo mais, nesta seção, vemos outra prova deste fato.

Exemplo 13. *Consideremos* $0 < a < b$ *e a sequência*

$$(x_n) = (a, ab, a^2b, a^2b^2, a^3b^2, a^3b^3, \ldots).$$

Se n *é par, encontramos*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a, \quad x_n = (ab)^{\frac{n}{2}} \quad e \quad \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}.$$

Se n *é ímpar, encontramos*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = b, \quad x_n = (ab)^{\frac{n-1}{2}}a \quad e \quad \sqrt[n]{x_n} = (ab)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}\sqrt[n]{a} = \sqrt{ab}\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[2n]{ab}}.$$

Por fim temos,

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} = \min(a,b)\,, \quad \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = \max(a,b)\,, \quad \lim \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab} \clubsuit$$

Pelo Exemplo 13 (vide também o Exemplo 14) vemos que pode existir o limite da raiz e sem que exista o da razão. O Teste da Razão é em geral mais "fácil". Porém, o Teste da Raiz é mais eficiente.

Exemplos 14. *As séries abaixo convergem pelo teste da raiz enquanto o teste da razão é inconclusivo para ambas.*

(a) Consideremos a série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots .$$

Vale o que segue (cheque).

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{e}$$

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

(b) Consideremos a série

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots .$$

Vale o que segue.

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8},$$

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \text{ se } n \text{ é ímpar,}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{4}}{2} \text{ se } n \text{ é par e}$$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \clubsuit$$

Exemplo 15. *Vale o que segue.*

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty, \quad \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty \ \text{ e } \ \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Prova.

- Aplicando o teste da razão à série dada encontramos

$$\lim \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, n^n} = \lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

  Logo, a série diverge.

- Comparando limites da razão e da raiz, para sequências (v. teorema), segue

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

- Para finalizar, notemos que

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim \frac{1}{n} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 0.e = 0 \clubsuit$$

Exemplo 16. *A série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n z^n, \ \textit{onde } z \in \mathbb{C},$$

converge absolutamente se $|z| < 1$ *e diverge se* $|z| \geq 1$.

Prova.

Pelo teste da raiz (é também fácil aplicar o da razão) encontramos

$$\lim \sqrt[n]{n|z|^n} = |z| \lim \sqrt[n]{n} = |z| \ \text{ e } \ \sum_{n=0}^{+\infty} |nz^n| < \infty \ \text{ se } |z| < 1.$$

Por outro lado, se $|z| \geq 1$ obtemos

$$|z|^n \geq 1, \quad \lim n|z|^n = +\infty, \quad \lim n z^n \neq 0 \ \text{ e } \ \sum_{n=0}^{+\infty} n z^n \ \text{ diverge} \clubsuit$$

Exemplos 17. *As séries complexas obtidas das séries de Taylor na origem de*

$$e^x, \quad \operatorname{sen} x \quad e \quad \cos x,$$

trocando a variável $x \in \mathbb{R}$ pela variável $z \in \mathbb{C}$ convergem absolutamente em $\mathbb{C}$.

Prova.

Sendo as séries, respectivamente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

(vide Exemplo 3), basta mostrar que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} < \infty.$$

De fato, as outras duas séries são, em valor absoluto, majoradas por esta. Aplicando o Teste da Razão encontramos

$$\lim \left| \frac{z^{n+1} n!}{(n+1)!z^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}^* \clubsuit$$

Exemplos 18. *As séries complexas obtidas das séries reais*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad e \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

trocando a variável real x pela variável $z \in \mathbb{C}$, convergem absolutamente na bola

$$B(0;1) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}.$$

Prova.

As séries a considerar são, respectivamente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Fixemos $z \in \mathbb{C}$ com $0 < |z| < 1$. Pelo teste da razão temos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|z|^{n+2}(n+1)}{(n+2)|z|^{n+1}} = |z| \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{|z|^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)|z|^{2n+1}} = |z|^2.$$

Aplicando o Teste da Razão conscluímos que as séries complexas consideradas convergem absolutamente se $|z| < 1$ $\clubsuit$

A seguir, mostramos uma versão mais fraca do "teorema comparando os limites da razão e da raiz, para sequências". Esta versão não utiliza os conceitos de "lim sup" ou "lim inf" e não se aplica ao caso em que "o limite L é igual a $+\infty$".

Proposição. (Igualdade entre os limites da razão e da raiz, para sequências).

$$\text{Se} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L, \quad \text{com } L \text{ real}, \quad \text{então} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, seja $0 < \delta < \epsilon$ e n_0 tal que para cada $n \geq n_0$ temos

$$L - \delta < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \delta.$$

Logo,

$$(L-\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}| \leq |a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\cdot\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}|a_{n_0}| \leq (L+\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}|$$

e, ainda para $n > n_0$,

$$\frac{(L-\delta)^n}{(L-\delta)^{n_0}} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{(L+\delta)^n}{(L+\delta)^{n_0}} \ .$$

Sendo $L - \delta < \ L \ < L + \delta$ temos (omitimos o caso $L = 0$, que é similar)

$$\frac{(L-\delta)^n}{L^{n_0}} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{(L+\delta)^n}{L^{n_0}}.$$

Então, definindo

$$\alpha = \frac{|a_{n_0}|}{L^{n_0}}$$

encontramos

$$\sqrt[n]{\alpha}(L-\delta) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\alpha}(L+\delta), \text{ para todo } n > n_0.$$

Como

$$\frac{L-\epsilon}{L-\delta} < 1 < \frac{L+\epsilon}{L+\delta} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1,$$

fixamos $N > n_0$ tal que

$$\text{se } n > N \text{ então } \frac{L-\epsilon}{L-\delta} < \sqrt[n]{\alpha} < \frac{L+\epsilon}{L+\delta}.$$

Assim procedendo, concluímos com

$$(L-\epsilon) < \sqrt[n]{\alpha}(L-\delta) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\alpha}(L+\delta) < (L+\epsilon), \text{ para todo } n > N \ \clubsuit$$

1.5 - Critério da Integral

Proposição (Critério da Integral). *Sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$*, com* $a_n \geq 0$ *para todo* n*, uma série e* $f : [p, +\infty) \to [0, +\infty)$*, contínua e decrescente, com* $a_n = f(n)$ *se* $n \geq p$*. Então,*

$$\text{a integral } \int_p^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge se e só se a série } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

Prova. Pode ser útil acompanhar a demonstração com a figura abaixo.

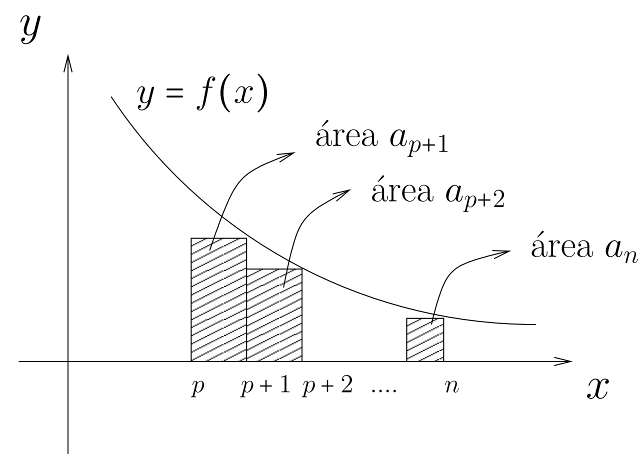


Figura 1.9: Ilustração para o Critério da Integral.

Se $k \geq p$ e $x \in [k, k+1]$, então temos

$$a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k, \quad a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq a_k \quad \text{e}$$

$$\sum_{k=p}^{n} a_{k+1} \leq \sum_{k=p}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\, dx = \int_p^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=p}^{n} a_k \ .$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e somente se

$$\lim_{n \to +\infty} \int_p^{n+1} f(x)\, dx = \int_p^{+\infty} f(x)\, dx < \infty \ \clubsuit$$

Uma função como no critério acima sempre existe mas, em geral, não é útil. Basta definir f em $[n, n+1]$ tendo por gráfico o segmento unindo os pontos (n, a_n) e $(n+1, a_{n+1})$.

Exemplo 19. *Pelo critério da integral a série harmônica generalizada*

$$\sum^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \ \textit{com } p \in \mathbb{R},$$

converge se e somente se $p > 1$.

Prova.

De fato, se $p \leq 0$ é óbvia a divergência. Se $p > 0$, a função real e contínua

$$[1, +\infty) \ni x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^p}$$

é decrescente. Vide figura abaixo

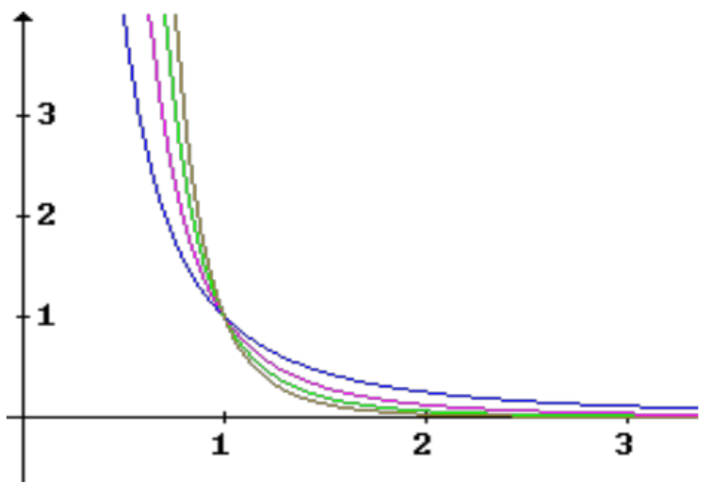


Figura 1.10: Gráficos para $\frac{1}{x^p}$, com $p < 1$, $p = 1$ e $p > 1$.

O resultado segue então da fórmula

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{M \to +\infty} \frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_1^M = \lim\limits_{M \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{M^{p-1}}}{p-1}, \ p \neq 1, \\ \\ \lim\limits_{M \to +\infty} \ln\Big|_1^M = \lim\limits_{M \to +\infty} \ln M, \ p = 1 \clubsuit \end{cases}$$

Exemplo 20. *Supondo $\alpha, \beta > 0$, temos*

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} < \infty$$

se e somente se vale uma das condições: $\alpha > 1$ ou então, $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

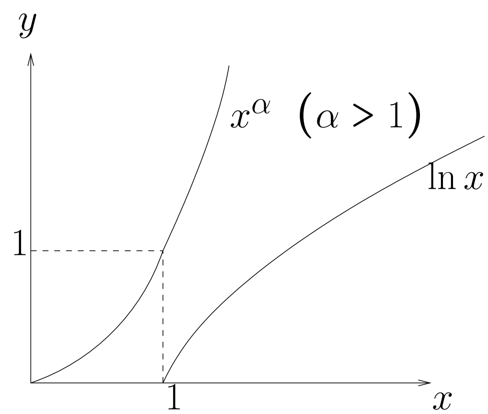


Figura 1.11: Gráficos de x^α, com $\alpha > 1$, e de $\ln x$.

Prova.

- O caso $\alpha > 1$. Este é trivial e segue do critério da comparação, pois temos

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{com} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \text{ convergente.}$$

- O caso $0 < \alpha \leq 1$. Como a função

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}, \text{ onde } x \geq 3,$$

é contínua e decrescente, analisemos a integral

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx.$$

Com a mudança de variável $y = \log x$ obtemos

$$x = e^y, \quad \frac{dx}{dy} = e^y \quad \text{e}$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{e^y}{e^{\alpha y} y^\beta} dy = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)y}}{y^\beta} dy.$$

- ◇ O sub-caso $\alpha < 1$. Dado $N \in \mathbb{N}$, com $N > \beta$, existe uma constante $c_N > 0$ tal que temos

$$e^{(1-\alpha)y} \geq c_N y^N, \text{ para todo } y \geq 0.$$

Então segue

$$\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)y}}{y^\beta} dy = +\infty$$

e pelo Critério da Integral concluímos que a série diverge.

- ◇ O sub-caso $\alpha = 1$. Temos

$$\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy < \infty \text{ se e só se } \beta > 1 \clubsuit$$

Abaixo está hachurada a região dos parâmetros $\alpha, \beta > 0$ tais que a série no exemplo imediatamente acima converge.

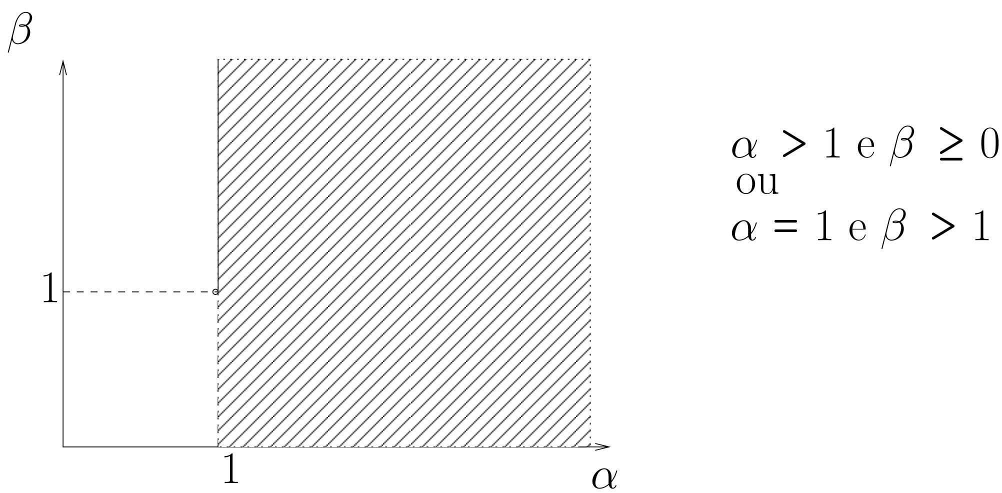


Figura 1.12: $\left\{(\alpha,\beta) : \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} < \infty\right\}$.

As **séries de Abel** são as séries do tipo

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}, \text{ onde } \beta > 0.$$

Pelo exemplo acima, tais séries convergem se $\beta > 1$ e divergem se $\beta = 1$.

1.6 - Critério de Raabe

Os critérios a seguir são um refinamento do critério da razão.

Proposição (Critério de Comparação de Razões). *Sejam*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_k \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_k$$

duas séries em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. *Suponhamos que exista* $p \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|, \ para\ todo\ k\ \geq p.$$

Vale o que segue.

$$Se\ \sum_{n=0}^{+\infty} |b_k|\ converge,\ então\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_k|\ converge.$$

Dito de outra forma, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_k| = +\infty \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{+\infty} |b_k| = +\infty.$$

Prova.

Da hipótese temos, para cada $k \geq p$, a desigualdade

$$\left|\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{a_k}{b_k}\right|.$$

Logo, para $k \geq p$ temos que

$$\text{a sequência } \frac{|a_k|}{|b_k|} \text{ decresce, } \frac{|a_k|}{|b_k|} \leq \frac{|a_p|}{|b_p|} \text{ e então } |a_k| \leq \frac{|a_p|}{|b_p|}|b_k|.$$

Pelo critério da comparação, segue a tese ♣

Proposição (Critério de Raabe). *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *uma série complexa, com* $|a_n| \neq 0$ *para cada* n, *satisfazendo*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = L \in [-\infty, +\infty].$$

As seguintes afirmações são verdadeiras.

(a) *Se* $L > 1$, *a série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) *Se* $L < 1$, *série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ *diverge. Pode ocorrer que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *convirja.*

(c) *Se* $L = 1$, *o critério é ineficiente.*

Prova.

(a) Seja α tal que $1 < \alpha < L$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual temos

$$k\left(1 - \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right) > \alpha, \text{ para todo } k \geq N.$$

Logo, para tais valores de k encontramos

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 - \frac{\alpha}{k}.$$

Para continuarmos façamos uma observação.

Observação. Para $\alpha > 1$, $x \geq -1$ e $f(x) = (1+x)^\alpha$ temos $f'' \geq 0$, $f'(0) = \alpha$, a concavidade do gráfico de f voltada para cima e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1)$ dada pela equação $y = 1 + \alpha x$. Logo, $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

Assim, utilizando tal desigualdade para o ponto

$$x = -\frac{1}{k}$$

obtemos

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 - \frac{\alpha}{k} \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^\alpha = \frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(k-1)^\alpha}} = \frac{b_{k+1}}{b_k}, \text{ onde } b_k = \frac{1}{(k-1)^\alpha}.$$

Como temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad (\text{pois } \alpha > 1),$$

pelo critério da comparação entre razões segue que $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ é convergente.

(b) Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq N$ temos

$$k\left(1 - \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right) \leq 1.$$

Assim,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} = \frac{b_{k+1}}{b_k}, \text{ onde } b_{k+1} = \frac{1}{k}.$$

Como a série harmônica diverge, pelo Critério de Comparações de Razões segue que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ diverge.}$$

No Exemplo 28 veremos que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \text{com } -1 < \alpha < 0\,,$$

é condicionalmente convergente. No Exemplo 23 veremos que tal série satisfaz a condição

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \alpha + 1 < 1, \text{ onde } a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}.$$

(c) **Exemplo 21.** A série (vide Exemplo 20)

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

diverge pois

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty.$$

O que ocorre se aplicarmos o teste de Raabe? Simplificando a expressão na condição no teste de Raabe para tal série obtemos

$$k\left(1 - \frac{k \ln k}{(k+1)\ln(k+1)}\right) = \frac{k}{k+1}\left[\frac{(k+1)\ln(k+1) - k\ln k}{\ln(k+1)}\right].$$

Como

$$\frac{k}{k+1} \xrightarrow{k \to +\infty} 1,$$

estudamos a fração entre colchetes na expressão acima,

$$\frac{(k+1)\ln(k+1) - k\ln k}{\ln(k+1)} = \frac{\ln(k+1)^{k+1} - \ln k^k}{\ln(k+1)}$$

$$= \frac{\ln(k+1)\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}{\ln(k+1)}.$$

Mudando para variável contínua encontramos a indeterminação

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicamos então e regra de L'Hospital.

Pela regra de L'Hospital segue

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\ln(x+1)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{(x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}}{\frac{1}{x+1}}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x+(x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x\frac{(-1)}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right]\right\}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left\{1+(x+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]\right\}\\
&= \lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\ln(e)=1.
\end{aligned}$$

Em suma, para este problema o Teste de Raabe é ineficiente♣

Exemplo 22. A série (vide Exemplo 20)

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2}$$

é convergente pois

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx=\int_{\log 2}^{+\infty}\frac{1}{y^2}\,dy<\infty.$$

O que no informa o Teste de Raabe? Simplificando a expressão na condição no teste de Raabe para tal série, obtemos

$$\begin{aligned}
I(k) &= k\left(1-\frac{k\ln^2 k}{(k+1)\ln^2(k+1)}\right)\\
&= \frac{k}{k+1}\left[\frac{(k+1)\ln^2(k+1)-k\ln^2 k}{\ln^2(k+1)}\right]\\
&= \frac{k}{k+1}\left[1+\frac{k\ln^2(k+1)-k\ln^2 k}{\ln^2(k+1)}\right].
\end{aligned}$$

É trivial que

$$\lim\frac{k}{k+1}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}=1.$$

Assim, simplificando a análise de $I(k)$ encontramos

$$\frac{k\ln^2(k+1) - k\ln^2 k}{\ln^2(k+1)} = k\,\frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln(k+1)}\,\frac{\ln(k+1) + \ln k}{\ln(k+1)}.$$

Donde segue

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln(k+1) + \ln k}{\ln(k+1)} = 2.$$

Concluindo, temos

$$\lim_{k\to+\infty} k\,\frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln(k+1)} = \lim_{k\to+\infty} k\frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k+1)}$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}{\ln(k+1)} = 0$$

e $\lim I(k) = 1$.

Isto é, para este problema o Teste de Raabe é ineficiente♣

Exemplo 23. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Então, a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|$$

é convergente se $\alpha > 0$ e divergente se $\alpha < 0$.

Prova.

Seja a_n o termo geral da série dada. Temos, para $n \to +\infty$,

$$n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = n\left(1-\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\right)$$

$$= n\left(1-\frac{n-\alpha}{n+1}\right) \longrightarrow \alpha+1.$$

A afirmação segue então imediatamente do Critério de Raabe ♣

1.7 - A Série Binomial Real

A descoberta da fórmula binomial é atribuída a Newton (em uma carta de 1664 ou 1665) que nunca a publicou ou provou e, ainda, outros já a haviam estudado. O destaque de Newton deve-se a ele ter mostrado que as séries infinitas não deviam ser vistas como aproximações mas como outras formas das funções que representam e, além disso, estabelecido regras operatórias para séries reais da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(hoje chamadas séries de potências) tais como divisão e multiplicação. Abel mostrou a série binomial complexa para $(1+z)^\sigma$, *com* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, *e* $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, *sujeita a uma definição apropriada de* $(1+z)^\sigma$.

Definição. Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, definimos o coeficiente binomial

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}, \text{ com } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Teorema (Fórmula Binomial). *Fixemos um expoente arbitrário* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. *Consideremos a função* $f(x) = (1+x)^\alpha$, *onde* $x \in (-1,1]$. *Vale o que segue.*

$$(a) \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \text{ se } x \in (-1,1).$$

No ponto $x = 1$ *temos*

$$(b) \qquad 2^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}, \text{ se } \alpha > 0.$$

Prova.

◇ Seja $n \in \mathbb{N}$. A função $f(x) = (1+x)^\alpha$ satisfaz

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)](1+x)^{\alpha-n}.$$

Temos $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]$ e $f^{(0)}(0) = 1$. Donde

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Seja $x \in (-1,1]$. A fórmula de Taylor com resto integral fornece

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n + R_N(x), \quad \text{com } R_N(x) = \int_0^x \frac{f^{(N+1)}(t)}{N!}(x-t)^N\,dt.$$

Notemos que

$$(1.7.1) \quad \begin{cases} \frac{f^{(N+1)}(t)}{N!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-N)}{N!}(1+t)^{\alpha-N-1} = \alpha\binom{\alpha-1}{N}(1+t)^{\alpha-N-1}, \\ \\ R_N(x) = \alpha\binom{\alpha-1}{N}\int\limits_0^x (1+t)^{\alpha-N-1}(x-t)^N\,dt. \end{cases}$$

(a) Fixemos $x \in (-1,1)$. Provemos que $R_N(x) \to 0$ se $N \to +\infty$.

Analisemos o valor absoluto no integrando em (1.7.1). Isto é, analisemos

$$(1+t)^{\alpha-1}\left|\frac{x-t}{1+t}\right|^N.$$

Primeiro. É evidente que $t \mapsto (1+t)^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln(1+t)}$ é bem definida, não nula, estritamente positiva e monótona no intervalo $[-|x|,|x|\,] \subset (-1,+1)$. Portanto, existe uma constante $C = C(x)$ satisfazendo

$$(1+t)^{\alpha-1} \leq C \text{ para todo } t \in [-|x|,|x|\,].$$

Segundo. O caso x positivo e $t \in [0,x]$. Então temos

$$\frac{|x-t|}{1+t} = \frac{x-t}{1+t} \leq \frac{x}{1+t} \leq x.$$

Terceiro. O caso x negativo e $-1 < x \leq t \leq 0$. Então temos

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leq \frac{t-x}{1+t} \leq \frac{t|x|+|x|}{1+t} = |x|.$$

Resumindo, obtemos

$$\left|(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^N\right| \leq C|x|^N, \text{ para todo } t \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Donde segue

$$|R_N(x)| \leq C\left|\alpha\binom{\alpha-1}{N}\right||x|^{N+1}.$$

Mostremos, com o teste da razão, a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n,\ \text{ se } |x|<1.$$

De fato, basta observar que

$$\left|\frac{\binom{\alpha-1}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha-1}{n}x^n}\right| = \left|\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n-1+1)n!}{(n+1)!(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}x\right|$$

$$= \left|\frac{\alpha-n-1}{n+1}x\right| \xrightarrow{n\to+\infty} |x|,\ \text{ se } |x|<1.$$

Portanto, a série converge e seu termo geral tende a 0. Logo,

$$\lim R_N(x) = 0.$$

(b) O caso $x=1$ e $\alpha>0$. Por (1.7.1), para todo N grande o suficiente segue

$$|R_N(1)| \leq \alpha\left|\binom{\alpha-1}{N}\right|\int_0^1(1-t)^N dt = \frac{\alpha\left|\binom{\alpha-1}{N}\right|}{N+1}.$$

O coeficiente binomial é limitado. De fato, denotando (a simbologia é usual) $[\![\alpha]\!]$ o menor número natural que é maior ou igual a α, encontramos

$$\left|\binom{\alpha-1}{N}\right| = \left|\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-1-N+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots N}\right|$$

$$= \left|(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{[\![\alpha]\!]}\right)\left(1-\frac{\alpha}{[\![\alpha]\!]+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)\right|$$

$$\leq \left|(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{[\![\alpha]\!]}\right)\right|.$$

Logo,

$$R_N(1) \xrightarrow{N\to+\infty} 0\ \clubsuit$$

Exemplo 24. *Seja $x\in(-1,1)$. Vale a fórmula*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}x^{2n}.$$

Prova.

Mera consequência do Teorema (Fórmula) Binomial pois,

$$(-1)^n\binom{-1/2}{n} = (-1)^n\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{(1/2)(3/2)\cdots(1/2+n-1)}{n!} = \frac{1/2\cdot3/2\cdots(2n-1)/2}{n!} =$$

$$= \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n\,n!} = \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)},\ \text{ se } n\neq0\ \clubsuit$$

1.8 - Série Telescópica, Critérios de Dirichlet e Abel.

Proposição (Série Telescópica). *Seja $(b_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência complexa. Então, a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$$

converge se e somente se a sequência (b_n) converge e, neste caso, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_0 - \lim b_n.$$

Prova.

Trivial pois a série $\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ converge se e somente se a sequência das somas parciais

$$s_n = (b_0 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}, \text{ onde } n \in \mathbb{N},$$

converge e, sendo este o caso, o limite da série é

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = b_0 - \lim b_n \clubsuit$$

Exemplo 25 (Uma série telescópica). *Temos,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Prova.

Basta notar que

$$\lim_{N\to+\infty} s_N = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1 \clubsuit$$

A seguir, veremos o critério de Dirichlet. O alemão P. G. L. Dirichlet (1805-1859) é o precursor do conceito de função como correspondência.

Proposição (Critério de Dirichlet). *Em* $\mathbb{R}$*, consideremos* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *uma série (não necessariamente convergente) com sequência das somas parciais* (s_n) *limitada e* (b_n) *uma sequência decrescente tal que* $\lim b_n = 0$*. Então,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \ \textit{é convergente.}$$

Prova.

Temos $a_1b_1 + a_2b_2 = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)b_2 = s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2$,
$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2 + a_3b_3 = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + s_3b_3$,
e, de forma geral (verifique a fórmula, a indução é simples) segue

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + s_nb_n.$$

Para $M \in \mathbb{R}$ tal que $|s_n| \leq M$ temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} |s_{i-1}(b_{i-1} - b_i)| \leq M \sum_{n=2}^{\infty} (b_{i-1} - b_i) = Mb_1.$$

Donde segue que a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i)$$

é absolutamente convergente e portanto convergente. Desta forma, como $\lim s_nb_n = 0$, concluímos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_n$ é convergente ♣

No resultado abaixo pedimos menos de (b_n), porém exigimos mais de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Proposição (Critério de Abel). *Em* $\mathbb{R}$*, sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *convergente e* (b_n) *uma sequência decrescente de números positivos (não é necessário* $\lim b_n = 0$*). Então,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \ \textit{converge.}$$

Prova.

Para $c = \lim b_n$, é claro que $(b_n - c) \searrow 0$ [i.e, a sequência decresce e converge a 0]. Logo, pelo Critério de Dirichlet $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(b_n - c)$ converge e, devido à hipótese, $\sum_{n=0}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ também. Assim, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_n$ converge♣

O norueguês N. H. Abel (1802-1829), aos 19 anos, provou a impossibilidade da resolução por radicais das equações algébricas de grau maior ou igual a cinco. O italiano P. Ruffini (1765-1822) dera uma prova (1799) de tal resultado, menos satisfatória e que passara despercebida.

1.9 - Critério (Leibniz) para Série Alternada

Proposição (Critério de Leibniz). *Se* (b_n) *é decrescente e* $\lim b_n = 0$*, então*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n b_n \text{ converge.}$$

Prova. Consequência direta do critério de Dirichlet ♣

Como direta (e famosa) aplicação do Critério de Leibniz temos que

$$\text{a série harmônica alternada } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} \text{ converge.}$$

Refinemos o critério de Leibnitz e apresentemos uma outra prova (mais geométrica).

Proposição (Critério de Leibniz - 1682). *Seja* (a_n) *uma sequência decrescente tal que* $\lim a_n = 0$*. Seja* $m \in \mathbb{N}$*. Então, a série*

$$(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ converge e}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n - s_m\right| \leq a_{m+1}, \quad \text{onde } s_m = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{m+1}a_m.$$

Prova.

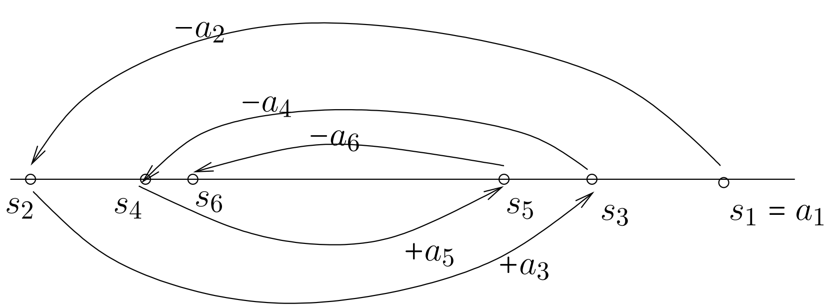


Figura 1.13: Critério de Leibniz.

Seja (s_n) a sequência das somas parciais da série considerada.

Claramente, a sequência $s_{2n} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ é crescente. Ainda claramente, a sequência $s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1})$ é decrescente.

Observemos que

$$\begin{cases} 0 \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq s_1 = a_1, \\ \\ 0 \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}. \end{cases}$$

Logo, (s_{2n}) e (s_{2n+1}) são monótonas, limitadas e convergentes e tem mesmo limite α. Portanto, a série em consideração é convergente.

Seja m par ou não, α está entre s_m e s_{m+1} e $|\alpha - s_m| \leq |s_m - s_{m+1}| = a_{m+1}$ ♣

Exemplo 26. *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \mathit{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \ \mathit{onde}\ \alpha > 0,$$

converge absolutamente se $\alpha > 1$ *e condicionalmente se* $0 < \alpha \leq 1$.

Prova.

Claramente

$$\text{sen}\frac{1}{n^\alpha} > 0, \ \text{se } \alpha > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{sen}\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$$

e pelo Critério do Limite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}\frac{1}{n^\alpha} < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty.$$

Logo, a série dada converge absolutamente se e só se $\alpha > 1$.

Ainda, como $\text{sen}'0 = \cos 0 = 1 > 0$, a função $\theta \mapsto \text{sen}\theta$ é crescente num intervalo centrado em 0 e

$$\left(\text{sen}\frac{1}{n^\alpha}\right) \searrow 0, \ \text{se } \alpha > 0.$$

Pelo Critério de Leibniz a série dada converge se $0 < \alpha \leq 1$ ♣

Mostremos que a hipótese (a_n) decrescente é essencial no enunciado do Critério de Leibniz.

Exemplo 27. *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n,\ \text{com } a_n = \frac{1}{n} \text{ se } n \text{ é ímpar e } a_n = \frac{1}{n!} \text{ se } n \text{ é par,}$$

diverge e $\lim a_n = 0$.

Prova.

É óbvio que $\lim a_n = 0$. Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

é convergente, segue que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n,\ \text{com } b_n = 0 \text{ se } n \text{ é ímpar e } b_n = \frac{1}{n!} \text{ se } n \text{ é par,}$$

é convergente. Portanto, se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$$

for convergente então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n,\ \text{com } c_n = -\frac{1}{n} \text{ se } n \text{ é ímpar e } c_n = 0 \text{ se } n \text{ é par,}$$

é também uma série convergente. Encontramos uma contradição pois

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ \cdots$$

diverge (vide observação ao Exemplo anterior) ♣

Exemplo 28. *A série abaixo é condicionalmente convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ -1 < \alpha < 0.$$

Prova.

Seja

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Pelo Exemplo 23 temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = +\infty.$$

Porém, sendo
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1, \text{ pois } -\alpha < 1,$$
temos que a sequência $(|a_n|)$ é decrescente e existe
$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = L.$$

Mostremos que $L = 0$.

Fixando $n \in \mathbb{N}$ e escrevendo $\beta = 1+\alpha$, da dupla desigualdade $-1 < \alpha < 0$ segue a dupla desigualdade $0 < \beta < 1$ e, para $p \in \mathbb{N}$ arbitrário,
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{n+1-(1+\alpha)}{n+1} = 1 - \frac{\beta}{n+1}\,,$$
$$\left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}}\frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1-\frac{\beta}{n+p}\right)\left(1-\frac{\beta}{n+p-1}\right)\cdots\left(1-\frac{\beta}{n+1}\right),$$
$$(*) \qquad \left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| \le \left(1-\frac{\beta}{n+p}\right)^{p} \le \left(1-\frac{\beta}{n+p}\right)^{p+n}\left(1-\frac{\beta}{n+p}\right)^{-n}.$$

Como
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a},$$
tomando em (*) o limite para $p \to +\infty$ obtemos
$$\frac{L}{a_n} \le e^{-\beta}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma obtemos
$$0 \le e^{\beta}L \le \lim_{n\to+\infty} a_n = L,$$
o que implica $L = 0$ pois $e^{\beta} > 1$.

Logo, pelo critério de Leibniz segue que a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n|a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$
é convergente ♣

1.10 - Fórmulas para $\liminf x_n$ e para $\limsup x_n$.

Para uma sequência real e limitada $(x_n) \subset [m, M] \subset \mathbb{R}$, onde $m \le M$, podemos expressar analiticamente o $\liminf x_n$ e o $\limsup x_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $X_n = \{x_n,\, x_{n+1}, \ldots\}$. É óbvio que $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$. Donde segue

$$\begin{aligned} m &\le \inf X_1 \le \inf X_2 \le \cdots \le \inf X_n \le \inf X_{n+1} \le \cdots \le M \\ M &\ge \sup X_1 \ge \sup X_2 \ge \cdots \ge \sup X_n \ge \sup X_{n+1} \ge \cdots \ge m. \end{aligned}$$

As sequências $(\inf X_n)$ e $(\sup X_n)$ são limitadas, respectivamente crescente e decrescente e então convergentes. Com tal notação temos o resultado que segue.

Teorema. *Se $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência limitada então*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf X_n = \liminf x_n \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} \sup X_n = \limsup x_n \ .$$

Prova.

Sejam $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Sejam $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$.

Mostremos que todo valor de aderência de (x_n) pertence a $[a, b]$. Consideremos $x = \lim x_{n_k}$, com (x_{n_k}) uma subsequência convergente de (x_n). Temos $a_{n_k} \le x_{n_k} \le b_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. É claro que $a_{n_k} \to a$ e $b_{n_k} \to b$. Segue $a = \lim a_n = \lim a_{n_k} \le x = \lim x_{n_k} \le \lim b_{n_k} = \lim b_n = b$. Logo, $x \in [a, b]$.

Só nos falta então mostrar que a e b são valores de aderência.

Iniciemos com a sequência crescente $(a_n) = (\inf X_n)$. Dado $\epsilon = 1$, como $a_n \nearrow a$ segue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a - 1 < a_m = \inf X_m \le a$. Por definição de ínfimo, existe $n = n_1 \ge m$ tal que $\inf X_m \le x_{n_1} < a + 1$. Segue $x_{n_1} \in (a - 1, a + 1)$. Dado $\epsilon = 1/2$, existe $m > n_1$ tal que $a - 1/2 < \inf X_m \le a$. Armentando como antes obtemos $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in (a - 1/2, a + 1/2)$. Por iteração, construímos $a_{n_k} \to a$. Logo, a é valor de aderência.

Trocando (x_n) por $(-x_n)$, $-b$ é valor de aderência de $(-x_n)$ e b de (x_n)♣

Com as notações[8] $\inf\limits_{m\ge n} x_m$ para $\inf X_n$ e $\sup\limits_{m\ge n} x_m$ para $\sup X_n$ escrevemos,

$$\liminf x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{m\ge n} x_m \qquad \text{e} \qquad \limsup x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{m\ge n} x_m.$$

[8]Gauss, com tais notações, definiu corretamente os limites inferior e superior de uma sequência e provou o Teorema acima, em um fragmento de 1800 só publicado no início do século XX.

1.11 - Representação Decimal

Em 1790, na França, com a nova ordem , foi criada uma comissão para a reforma dos pesos e medidas e em 1799 o sistema métrico como hoje o conhecemos e o sistema decimal foram adotados. Haviam proponentes do sistema duodecimal. A. M. Legendre (1752-1833) não foi apontado por não ser claramente pró-revolucionário (mediu o comprimento de um meridiano facilitando a adoção do metro e talvez para provocar os duodecimalistas tenha aventado o sistema de base onze). Lagrange, a princípio , também não foi apontado, por ser estrangeiro.

Um número real x da forma

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

com a_0 um natural arbitrário e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ naturais tais que $0 \leq a_i \leq 9$, é usualmente indicado em sua representação decimal finita

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$$

e é claro que $x \in \mathbb{Q}$. Porém, nem todos os números racionais tem representação decimal finita. Por exemplo, se

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}, \text{ com } a, n \in \mathbb{N},$$

então $3a = 10^n$ o que é impossível pois 3 não divide 10.

Lema. *Dado $x \in \mathbb{R}$, é bem definido o número inteiro $[\![x]\!] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ e*

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1.$$

Prova.

Mostremos que $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, obviamente limitado superiormente, é não vazio. Se $x \geq 0$ então $0 \in S$. Se $x \leq 0$ então $-x \geq 0$ e então, como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, segue que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq -x$ e portanto $-p \leq x$. Donde, $-p \in S$. Seja $[\![x\ ]\!] = \sup S$.

Pela Propriedade Arquimediana existe $n \in \mathbb{S}$ tal que $[\![x]\!] - 1 < n \leq [\![x]\!]$. Portanto, $n \leq [\![x]\!] < n+1$ e então $n+1 > \sup S$, $n+1 \notin S$ e $x < n+1$. Logo, $S = \{\ldots, n-2\,, n-1\,, n\}$ e $n = \max S = \sup S = [\![x]\!]$ ♣

O número $[|x|]$ é o **maior inteiro menor ou igual a** x e a função

$$[\![\,\cdot\,]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \text{ é a } \textsf{função maior inteiro.}$$

Teorema. *Seja $x \geq 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um decimal finito $r_n = a_0, a_1 \ldots a_n$ tal que*

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

Prova.

Pelo Lema é óbvio que $a_0 = [\![x]\!]$ é um inteiro positivo e,

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

Consideremos $a_1 = [\![10(x - a_0)]\!]$. Como $0 \leq 10(x - a_0) < 10$, segue que

$$0 \leq a_1 \leq 9, \quad a_1 \leq 10(x - a_0) < a_1 + 1 \quad \text{e} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$

Analogamente, se

$$a_2 = \left[\!\!\left[10^2 \left(x - a_0 - \frac{a_1}{10} \right) \right]\!\!\right]$$

obtemos $0 \leq a_2 \leq 9$,

$$a_2 \leq 10^2 \left(x - a_0 - \frac{a_1}{10} \right) < a_2 + 1 \quad \text{e} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}.$$

Procedendo por indução, obtemos o resultado desejado ♣

Corolário. *Mantenhamos a notação acima. Temos, $r_n \nearrow x$.*

Prova. É óbvio que (r_n) é crescente e, ainda,

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} ♣$$

Definição. *Se $x \geq 0$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ são dados pelo Teorema imediatamente acima então*

$$x = a_0\,, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

é **uma representação decimal infinita** *de x.*

A representação decimal infinita de $x > 0$ não é necessariamente a única representação. Uma outra surge ao escolhermos a_0 o maior inteiro estritamente menor que x e trocarmos a desigualdade imposta no enunciado do Teorema da representação decimal pela condição

$$r_n < x \leq r_n + \frac{1}{10^n}.$$

Assim procedendo obtemos

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = 0,999999\ldots$$

e também

$$\frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{n+3}} + \cdots = 0,0\ldots0999\ldots,$$

com os $9's$ ocorrendo a partir da $(n+1)$-ésima casa decimal.

Por exemplo, para

$$x = \frac{1}{8}$$

temos as representações

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0,125000\ldots \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots = 0,124999\ldots.$$

Proposição. *Os números*

$$x = \frac{m}{10^n} > 0, \ \textit{com } m, n \in \mathbb{N},$$

tem apenas duas representações decimais.

(a) No caso $x \notin \mathbb{N}$, temos as possibilidades

$$a_0, a_1.\ldots.a_{p-1}.a_p.9.9.9\ldots, \ \textit{com } a_p \neq 9, \ \textit{ou } a_0, a_1.\ldots a_{p-1}.(a_p+1).0.0.0.\ldots.$$

(b) No caso $x \in \mathbb{N}$, temos as possibilidades

$$a_0, 999\ldots \quad \textit{ou} \quad (a_0+1), 000\ldots.$$

Os demais números em $[0, +\infty)$ tem representação única.

Prova.

Suponhamos duas representações distintas de $x \geq 0$,

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots = b_0 + \frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \cdots, \text{ com } 0 \leq a_i, b_i \leq 9 \text{ e } i \in \mathbb{N}.$$

Seja $p = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq b_i\}$. Caso $p \geq 1$, temos $a_i = b_i$ se $0 \leq i \leq p-1$ e

$$\frac{a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1}}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots = \frac{b_p}{10^p} + \frac{b_{p+1}}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \cdots, \text{ com } a_p \neq b_p.$$

Admitamos, sem perda de generalidade, $b_p = a_p + k$, com $k \geq 1$. Então,

$$\frac{a_{p+1}}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots = \frac{k}{10^p} + \frac{b_{p+1}}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \cdots.$$

Na equação acima, o máximo no lado esquerdo ocorre se e só se $a_i = 9$, para todo $i \geq p+1$ e o máximo é

$$\frac{1}{10^p}.$$

O mínimo no lado direito ocorre se e só $k = 1$ (estamos supondo $k \geq 1$) e $b_i = 0$, para todo $i \geq p+1$ e o mínimo é

$$\frac{1}{10^p}.$$

Assim, como vale a igualdade, temos $b_p = a_p + 1$ e, para todo $i \geq p+1$, temos $a_i = 9$ e $b_i = 0$ e

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{10^{p-1}} + \frac{a_p}{10^p} + \frac{9}{10^{p+1}} + \cdots \frac{9}{10^n} + \cdots = b_0 + \frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_{p-1}}{10^{p-1}} + \frac{a_p + 1}{10^p}.$$

O caso $p = 0$ é análogo ♣

Capítulo 2

SÉRIES, COMUTATIVIDADE E ASSOCIATIVIDADE

2.1 - O Exemplo de Dirichlet

O conceito de convergência de uma série já havia sido utilizado algumas vezes por Euler (no século XVIII também foi utilizado, entre outros, o de que o termo geral tende a zero) e muitos matemáticos haviam operado livremente com séries divergentes e Euler tentara formalizar o estudo destas séries . Com Cauchy e sua insistência em que as séries divergentes não possuem soma, e o sucesso de *Cours d'Analyse* (1821), a definição atual se estabeleceu.

Em 1833, Cauchy notou que uma série de termos reais não todos positivos poderia ter uma sub-série divergente e Dirichlet (1837) apresentou os rearranjos da série harmônica alternada

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{e} \quad \frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

e provou a comutatividade para séries absolutamente convergentes.

Em 1854, Riemann escreveu (em seu *Habilitationsschrift*) que "já em 1829, Dirichlet sabia que as séries infinitas caem em duas classes essencialmente diferentes, conforme permanecem convergentes ou não após seus termos terem sido feitos positivos. Em séries do primeiro tipo os termos podem ser arbitrariamente permutados. Em constraste, o valor de uma série do segundo tipo depende da ordem de seus termos" e prova seu **Teorema do Rearranjo**, enunciado a seguir.

(Teorema do Rearranjo.) Uma série convergente (de termos reais) que não é absolutamente convergente pode convergir a um arbitrário dado valor real C após uma apropriada reordenação de seus termos.

2.2 - Séries Absolutamente Convergentes e Comutatividade

Recordemos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ \text{ é absolutamente convergente se } \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty.$$

Definição. *A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é* comutativamente convergente *se todo* rearranjo *(*reordenação*)*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(k)}, \ \text{com } \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijetora,}$$

é convergente. [Veremos que se uma série é comutativamente convergente, então todos os seus rearranjos tem uma mesma soma finita (i.e., convergem a um mesmo número).]

Exemplo (Dirichlet, 1837). *A série harmônica alternada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

não é comutativamente convergente.

Prova.

Já vimos (Capítulo 1) que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Então,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots, \text{ e}$$

$$\frac{\ln}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots.$$

É trivial ver que vale a identidade

$$\frac{\ln 2}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \cdots,$$

pois uma soma parcial de ordem $2n$ (par) da terceira e última série acima é igual à soma parcial de ordem n da segunda série acima e, uma soma parcial de ordem $2n+1$ (ímpar) da terceira série acima é igual a sua respectiva soma parcial de ordem $2n$.

Somando a primeira série com a terceira série (ambas acima) obtemos

$$\frac{3\ln 2}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \ ,$$

que é um rearranjo da série inicial mas com valor (soma) diferente♣

Um exemplo como acima, em $\mathbb{R}$, só poderia ocorrer com uma série alternada pois, felizmente e como é esperado e mostramos abaixo, todos os rearranjos de uma série de termos positivos tem um mesmo limite em $[0, +\infty]$. Se este limite é $+\infty$ dizemos que a série *diverge comutativamente a* $+\infty$.

Recordemos que uma série complexa $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge condicionalmente se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n| = +\infty.$$

Se z é o número tal que $z = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, então z é a soma da série.

Observação. Para uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ de termos positivos (isto é, $p_n \geq 0$), convergente ou não, e com sequência de somas parciais (s_n), é fácil ver que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \in [0, +\infty].$$

Teorema (Comutatividade para séries de positivos). *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ *uma série de termos positivos (convergente ou não) e* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *uma bijeção. Então,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} p_{\sigma(k)}.$$

Prova.

Computando o limite para $N \to +\infty$ da trivial desigualdade

$$\sum_{n=0}^{N} p_n \ \leq \ \sum_{k=1}^{+\infty} p_{\sigma(k)}, \ \text{para todo } N \in \mathbb{N},$$

segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} p_{\sigma(k)}.$$

Vice-versa, $\sum_{k=0}^{+\infty} p_{\sigma(k)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ ♣

Definição. *Consideremos uma série real (i.e., de termos reais)*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

A parte positiva *de a_n, indicada p_n , e a* parte negativa *de a_n, indicada q_n, são*

$$p_n = \begin{cases} a_n\,, & se\ a_n \geq 0 \\ 0\,, & se\ a_n \leq 0 \end{cases} \qquad e \qquad q_n = \begin{cases} 0\,, & se\ a_n \geq 0 \\ -a_n\,, & se\ a_n \leq 0. \end{cases}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ seguem

$$(2.2.1) \qquad \begin{cases} 0 \leq p_n \leq |a_n| \\ 0 \leq q_n \leq |a_n| \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_n = p_n - q_n \\ |a_n| = p_n + q_n \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2} \\ \\ q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}. \end{cases}$$

Mantendo a notação na definição acima, investigamos abaixo as convergências absoluta, comutativa e condicional de uma série de termo geral $a_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, analisando as séries determinadas pelas sequências (p_n) e (q_n).

Teorema. *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais. Vale o que segue.*

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n + \sum_{n=0}^{+\infty} q_n$.

(b) **(Teorema de Dirichlet.)** *Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente então ela é comutativamente convergente (e todos os rearranjos tem mesma soma), as séries geradas pelas sequências (p_n) e (q_n) convergem e*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n.$$

(c) Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge condicionalmente, então $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = +\infty$.

(d) [1] *Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge condicionalmente, tal série admite rearranjo divergente.*

[1] A argumentação na prova deste item provém da famosa prova do Teorema de Riemann.

Prova. Utilizemos as relações em 2.2.1.

(a) É trivial que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| \;=\; \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}|a_n| \;=\; \lim_{m\to+\infty}\left[\sum_{n=1}^{m}p_n+\sum_{n=1}^{m}q_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}|p_n| \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty}|q_n|\,.$$

(b) Como $0\leq p_n\leq |a_n|$ e $0\leq q_n\leq |a_n|$, segue que as séries $\sum_{n=0}^{+\infty}p_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}q_n$ são convergentes. Pelo teorema imediatamente anterior, tais séries são comutativamente convergentes. Logo, é claro que a série dada pela subtração

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_n-\sum_{n=0}^{+\infty}q_n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$$

é também comutativamente convergente. De fato, supondo que $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ é bijetora encontramos

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_{\sigma(k)}=\sum_{k=0}^{+\infty}p_{\sigma(k)}-\sum_{k=0}^{+\infty}q_{\sigma(k)}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n-\sum_{n=0}^{+\infty}q_n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

(c) Como $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ converge, da identidade $a_n=p_n-q_n$ concluímos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_n\ \text{ converge }\iff\ \sum_{n=0}^{+\infty}q_n\ \text{ converge.}$$

Por hipótese, $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|=+\infty$. Então, por (a), ao menos uma entre as séries $\sum_{n=0}^{+\infty}p_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}q_n$ diverge. Logo, estas duas últimas séries divergem.

(d) Por (c) temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_n=\sum_{n=0}^{+\infty}q_n=+\infty.$$

Reordenamos a série da seguinte forma.

> Na etapa 1, coletamos os primeiros termos, $a_n\geq 0$, com soma >1.
>
> Na etapa 2, os primeiros termos negativos cuja soma com os anteriores é <0.
>
> Na etapa 3, subtraídos de $\mathbb{N}$ os índices já escolhidos, coletamos os próximos termos positivos cuja soma com os anteriores é >1.

Por indução, o rearranjo obtido é tal que a sequência (t_n) de suas somas parciais admite uma subsequência (t_{n_k}) com $t_{n_k}>1$, para todo k, e uma outra de termos negativos. Logo, (t_n) diverge ♣

Corolário. *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série real. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) A série e todos os seus rearranjos são convergentes.

(b) A série é absolutamente convergente.

(c) As séries $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n$ são convergentes.

(d) A série é comutativamente convergente e todos os seus rearranjos tem uma mesma soma, a qual é finita (um número).

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) Pelo teorema imediatamente acima, item (d), a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, convergente por hipótese, não converge condicionalmente. Logo, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty$.

(b) $\Leftrightarrow$(c) Segue do teorema já citado, item (a).

(b) $\Rightarrow$(d) Segue do teorema já citado, item (b).

(d) $\Rightarrow$(a) Óbvio ♣

Observação. Dada uma série complexa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$, valem as seguintes propriedades.

- A série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge comutativamente se e só se as séries reais
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$
são comutativamente convergentes.

- Valem as desigualdades, para todo natural n,

$$(2.2.2) \quad 0 \leq |\mathrm{Re}(z_n)| \leq |z_n| \ \ , \ \ 0 \leq |\mathrm{Im}(z_n)| \leq |z_n| \ \text{ e } \ |z_n| \leq |\mathrm{Re}(z_n)| + |\mathrm{Im}(z_n)|.$$

Com tais observações obtemos o resultado abaixo para séries complexas.

Corolário. *Dada $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ complexa, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) A série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ é absolutamente convergente.

(b) As séries reais $\sum_{n=0}^{+\infty} Re(z_n)$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} Im(z_n)$ são absolutamente convergentes.

(c) A série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ é comutativamente convergente.

Prova. Segue das observações anteriores e do corolário imediatamente acima ♣

2.3 - Associatividade para Séries

Nesta seção são feitos alguns comentários sobre a associatividade para séries. Esta seção é bem simples e não é imprescíndivel para o entendimento do capítulo.

Dada uma série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
com sequência das somas parciais (s_n), a inserção de parenteses, ainda que infinitos, gera uma série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$
cuja sequência das somas parciais (t_n) é, evidentemente, subsequência de (s_n). Assim, a inserção de parenteses **não altera a soma de uma série convergente**.

Entretanto, se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente, a inserção de parenteses pode até mesmo resultar em uma série convergente. Este é o caso com a série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots.$$

que após inserirmos determinados parenteses torna-se a série nula

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots.$$

Definição. *Sejam $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e duas séries*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$
relacionadas por

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\sigma(1)}\ , \ldots, b_{n+1} = a_{\sigma(n)+1} + a_{\sigma(n)+2} + \cdots + a_{\sigma(n+1)},\ \text{onde } n = 1, 2, \ldots.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dita obtida da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ por associação. *Brevemente, dizemos que a primeira é uma associação da segunda.*

Inversamente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é dita obtida da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ por dissociação. *Brevemente, dizemos que a primeira é uma dissociação da segunda.*

Exemplifiquemos com a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

e a aplicação estritamente crescente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\sigma(n) = 2n$. Então temos,

$$b_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad b_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

e, de maneira geral, $b_k = 1/(2k-1) + 1/(2k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposição (Lei Associativa para Séries). *Suponhamos que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

é uma associação da série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a$. *Então temos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = a.$$

Prova.

Mantendo a notação $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n = s_{\sigma(n)}$ segue trivialmente, $\lim t_n = \lim s_{\sigma(n)} = \lim s_n$♣

Observação. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série complexa e absolutamente convergente. Consideremos $\mathbb{N} = \bigcup F_i$, com cada F_i finito e não vazio, e tal que $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$ (esta é uma partição de $\mathbb{N}$ por conjuntos finitos). Temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i, \quad \text{onde} \quad u_i = \sum_{n \in F_i} a_n, \text{ para cada } i \in I.$$

[Os conjuntos F_i, onde $i \in I$, são ditos dois a dois disjuntos se $F_i \cap F_j = \emptyset$, $i \neq j$.]

Prova.

Segue da comutatividade da série absolutamente convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, listando sucessivamente, na etapa i, com $i = 1, 2, \ldots$, os termos a_n tais que $n \in F_i$ e então agrupando-os pela associatividade na proposição acima ♣

2.4 Teorema de Riemann

Teorema (Riemann). *Seja*

$$\sum_{n-0}^{+\infty} a_n$$

uma série real e condicionalmente convergente. Dados $x, y \in [-\infty, +\infty]$, *com* $x \leq y$, *existe um rearranjo* $\sum_{n-0}^{+\infty} b_n$ *de* $\sum_{n-0}^{+\infty} a_n$ *tal que, se* $s_n = b_1 + \cdots + b_n$ *então*

$$\liminf s_n = x \quad e \quad \limsup s_n = y.$$

Prova. Sejam p_n a parte positiva de a_n e q_n a parte negativa de a_n.

Como $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, temos

$$0 = \lim a_n = \lim p_n = \lim q_n.$$

Também temos $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, donde segue $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n = +\infty$. Então, como existe $\lim \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i\right)$, concluímos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = +\infty.$$

Consideremos agora a partição

$$\mathbb{N} = P \cup Q, \quad \text{com} \quad P = \{i : a_i = p_i \geq 0\} \quad \text{e} \quad Q = \{j : a_j = -q_j < 0\},$$

e dois números reais x e y, com $x \leq y$. Reordenemos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ tomando os n_1 primeiros índices em P, indicados $\{1, \ldots, n_1\}$, tais que

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} > y.$$

A seguir, sejam os n_2 primeiros índices em Q, indicados $\{1, 2, \ldots, n_2\}$, tais que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{n_2} < x.$$

Subtraídos em P os índices já selecionados, escolhemos os novos primeiros índices, indicados $\{n_1 + 1, \ldots, n_3\}$, tais que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} > y.$$

Procedendo analogamente com Q, retirados os índices já coletados, pegamos os primeiros índices $\{n_3+1,\ldots,n_4\}$ satisfazendo

$$p_1+p_2+\cdots+p_{n_1}-q_1-q_2-\cdots-q_{n_2}+p_{n_1+1}+\cdots+p_{n_3}-q_{n_3+1}-\cdots-q_{n_4}<x.$$

Continuando este processo ad infinitum obtemos um rearranjo $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ de $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ tal que se (s_n) é a sequência de suas somas parciais temos, para i ímpar,

$$s_{n_{i+1}}<x\leq y<s_{n_i}\,,\quad s_{n_i}-p_{n_i}\leq y \quad\text{e}\quad s_{n_{i+1}}+q_{n_{i+1}}\geq x.$$

Donde segue $0<x-s_{n_{i+1}}\leq q_{n_i+1}$ e $0<s_{n_i}-y\leq p_{n_i}$ e então

$$(s_{n_i}),\text{com } i \text{ par, converge a } x \quad\text{ e }\quad (s_{n_i}),\ \text{com } i \text{ ímpar, converge a } y.$$

Além disso, é fácil ver que para cada i ímpar temos

$$\text{se } n_i<n<n_{i+1} \text{ então } s_{n_i+1}\leq s_n\leq s_{n_i}.$$

Assim, se s é um valor de aderência de (s_n) não é possível $s>y$ e também não é possível $s<x$. Logo, temos $x\leq s\leq y$ e, como x e y são valores de aderência de (s_n), concluímos que x é o menor valor de aderência e y é o maior valor de aderência. Isto é,

$$x=\liminf s_n \quad\text{e}\quad y=\limsup s_n.$$

Os casos $x=-\infty$ ou $y=+\infty$ são análogos, simples, e os deixamos ao leitor♣

Corolário. *Consideremos uma série real e condicionalmente convergente*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$$

e x um número real. Então, existe um rearranjo $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ da série dada tal que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}b_n=x.$$

Prova. Caso particular do teorema imediatamente acima, com $x=y$♣

Capítulo 3

SOMAS NÃO ORDENADAS VERSUS SÉRIES. ASSOCIATIVIDADE

3.1 - Introdução

Para séries ainda que convergentes, não é em geral válido

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1},$$

como bem mostra a série (convergente) harmônica alternada. De fato, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} = -\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{(2n+1)+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty.$$

Entretanto, veremos que para somas não ordenadas e para séries absolutamente convergentes, efetivamente valem as associações (valem quaisquer associações)

$$\sum_{\mathbb{N}} a_n = \sum_{2\mathbb{N}} a_n + \sum_{2\mathbb{N}+1} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}.$$

Para uma série de números positivos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n,$$

veremos que podemos associar os termos de forma totalmente arbitrária. Desta forma, dada uma série real e absolutamente convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, escrevendo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n, \text{ com } p_n \text{ e } q_n \text{ as partes positivas e negativas de } a_n,$$

concluiremos que podemos associar de forma arbitrária os termos da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

O caso de uma série complexa (ou de uma soma não ordenada complexa) é facilmente redutível ao caso real. Assim, tendo em vista que já provamos que as séries absolutamente convergentes são comutativamente convergentes, ganhamos muita liberdade ao lidarmos com séries absolutamente convergentes ao aplicarmos a elas o conceito de associatividade para **famílias somáveis** (apropriado ao estudo de somas não ordenadas), ao invés da restrita associatividade para séries.

As séries absolutamente convergentes foram interpretadas pelo uruguaio J. L. Massera (1915-2002) como "séries de borracha" e a tal comentário, modestamente adicionaríamos "acrobáticas".

Com o conceito de somabilidade, para efetuarmos a soma não ordenada de uma família

$$(a_j)_{j\in J}$$

de números reais ou complexos, onde J é um conjunto enumerável (isto é, existe uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to J$) arbitrário de índices, diferentemente do conceito de séries desprezamos a ordem dos termos e veremos que somabilidade e convergência absoluta são conceitos equivalentes.

Porém, a somabilidade permite um melhor entendimento da convergência absoluta e generalizar a propriedade associativa para séries (vide Capítulo 2).

No próximo capítulo (Capítulo 4) veremos como somar uma família não necessariamente enumerável (isto é, indexada em um conjunto não necessariamente enumerável), de números reais ou complexos.

3.2 - Somas não ordenadas X Séries

Abaixo mostramos uma forma de estimarmos o valor de uma série de termos positivos que independe da ordem de seus termos, o que será útil para definirmos somas de famílias enumeráveis e, em particular, somas de sequências.

Teorema. *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ *uma série de termos positivos. Temos*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \ = \ \rho\,, \quad com\ \rho = sup\left\{ \sum_{n\in F} p_n : F \subset \mathbb{N}\ e\ F\ finito \right\} \ \in\ [0,+\infty].$$

Prova.

Consideremos (s_m) a sequência (crescente) das somas parciais da série dada e $F \subset \mathbb{N}$, com F finito e arbitrário. Pelas desigualdades

$$\sum_{m\in F} p_m \le s_{\max(F)} \le \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ \text{ e } \qquad s_m = \sum_{k\in\{0,1,\ldots,m\}} p_k \le \rho$$

é óbvio que

$$\rho = \sup\left\{ \sum_{m\in F} p_m : F \subset \mathbb{N} \text{ e } F \text{ finito} \right\} \le \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \ = \ \lim_{m\to+\infty} s_m \le \rho \clubsuit$$

O teorema acima sugere o estudo de somas não ordenadas e para tal introduzimos o conceito de família somável. Somas não ordenadas ocorrem naturalmente em Teoria da Probabilidade e em Análise Funcional. O tratamento geral de uma soma de elementos x_i, com $i \in I$ e I um conjunto de índices, supõe I um conjunto de índices totalmente arbitrário (vide Beardon [2, p. 67]). Neste capítulo, o conjunto no qual uma soma é indexada é sempre um conjunto enumerável.

Definição. *Seja I um conjunto de índices (arbitrário) enumerável.*

- Uma família *em $\mathbb{C}$, indexada em I, é uma função $x : I \to \mathbb{C}$, que notamos $(x_i)_I$, onde $x_i = x(i)$ é o i-termo da família, para todo $i \in I$.*

- *Dadas duas famílias $(x_i)_I$ e $(y_i)_I$ e λ um escalar em $\mathbb{C}$, definimos a* adição

  $$(x_i)_I + (y_i)_I = (x_i + y_i)_I$$

  e a multiplicação por um escalar

  $$\lambda (x_i)_I = (\lambda x_i)_I.$$

Toda sequência é, claramente, uma família. Neste capítulo, I e J indicam conjuntos enumeráveis de índices . Se $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N} = \mathbb{N}^2$, então a família $x : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ é chamada sequência dupla. No caso $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \mathbb{N}^3$, a família $x : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{K}$ é chamada sequência tripla.

Baseando-nos no teorema provado acima, temos as seguintes definições.

Definições. *Dada uma família* $(p_i)_{i\in I}$ *de termos em* $[0,+\infty]$, *indicamos*

$$\sum p_i \ = \ \sup\left\{ \sum_{i\in F} p_i : F \subset I \text{ e } F \ finito \right\}.$$

- *Se* $\sum p_i \ < \ \infty$, *dizemos que* $(p_i)_I$ *é uma* família somável *(ou, brevemente,* somável*) com* soma $\sum p_i$, *também indicada*

$$\sum_I p_i \quad ou \quad \sum_{i\in I} p_i.$$

- *Se* $I = \mathbb{N}$ *e* $(p_n)_{\mathbb{N}}$ *é somável, chamamos* (p_n) *de* **sequência somável**.

Observações. Seja $(p_i)_I$ uma família (enumerável) de termos positivos.

- Seja $\sigma : J \to I$ uma bijeção. É fácil ver que vale a igualdade

$$\sum_I p_i = \sum_J p_{\sigma(j)}.$$

  Logo, a família $(p_i)_I$ é somável se e só se a família $(p_{\sigma(j)})_J$ é somável.

- Se $I = \mathbb{N}$, é trivial ver que

$$\sum p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n.$$

Corolário. *Seja* (p_n) *uma sequência de termos positivos. Então,* (p_n) *é uma sequência somável se e só se a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ *é convergente. Nestes casos temos*

$$\sum p_n \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n.$$

Prova. Segue da observação acima ♣

Corolário. *Seja $(p_i)_I$ uma família de termos positivos e $\sigma : \mathbb{N} \to I$ uma bijeção. Então, $(p_i)_I$ é uma família somável se e somente se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{\sigma(n)}$ é convergente. Nestes casos temos*

$$\sum p_i \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_{\sigma(n)}.$$

Prova. Segue da observação e do corolário, ambos acima♣

Comentários.

- A notação para séries,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n,$$
indica que estamos somando os termos ordenadamente: desde o primeiro, x_1, e então o segundo x_2 e assim sucessivamente "ad infinitum". A notação
$$\sum_{\mathbb{N}} x_n$$
para a soma da sequência (x_n) indica que estamos usando $\mathbb{N}$ apenas como conjunto, sem relevância das propriedades de sua ordem. Assim, para a soma de uma sequência podemos substituir o conjunto de índices $\mathbb{N}$ por qualquer outro conjunto enumerável (infinito).

- Visto que para uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ de termos reais e positivos, portanto convergente ou divergente (para $+\infty$), vale a igualdade
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \;=\; \sum p_n,$$
concluímos que para séries de termos positivos podemos utilizar livremente a notação
$$\sum p_n$$
pois não há risco de dubiedade se a interpretarmos como uma série ou como uma soma (não ordenada).

Definição. *Seja J um conjunto de índices enumerável.*

- *Uma família $(x_j)_J$ de números reais é* somável *se as famílias*

$$(p_j)_J \ \ e \ \ (q_j)_J$$

das partes positivas e negativas de x_j, onde $j \in J$, respectivamente, são somáveis. Se (x_j) é somável, sua soma (não ordenada) *é*

$$\sum x_j = \sum p_j - \sum q_j \ .$$

- *Uma família $(z_j)_J$ de números complexos é* somável *se as famílias*

$$\big(Re(z_j)\big)_J \ \ e \ \ \big(Im(z_j)\big)_J,$$

das partes reais e imaginárias de z_j, onde $j \in J$, respectivamente, são somáveis. Se $(z_j)_J$ é somável, sua soma (não ordenada) *é*

$$\sum z_j = \sum Re(z_j) + i \sum Im(z_j).$$

- *Uma família $(z_j)_J$ de números reais ou complexos é uma família* absolutamente somável *se a família $(|z_j|)_J$ é somável. Isto é, se*

$$\sum |z_j| < \infty.$$

Comentários.

- Escrevemos

$$\sum a_i < \infty$$

para indicar que a família $(a_i)_I$ é somável.

- Se $I = \mathbb{N}$ e $(a_n)_{\mathbb{N}}$ é somável, chamamos (a_n) de **sequência somável**.

- A definição de famílias somáveis dada acima é equivalente a usualmente apresentada nos textos que abordam somas não ordenadas (ou, dito de outra forma, somabilidade).

Lema (Soma/Série). *Seja $(z_j)_J$ uma família em $\mathbb{C}$ e $\sigma : \mathbb{N} \to J$ bijetora. São equivalentes as propriedades abaixo.*

(a) $(z_j)_J$ *é somável.*

(b) $(\, z_j\,)_J$ *é absolutamente somável.*

(c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |z_{\sigma(n)}|$ *é (absolutamente) convergente.*

Ainda, ocorrendo (a) ou (b) ou (c) temos,

$$\sum z_j \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} z_{\sigma(n)}.$$

Prova. Consideremos as famílias $\big(\mathrm{Re}(z_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(z_j)\big)_J$ e as famílias de suas partes positivas, $(p_j)_J$ e $(P_j)_J$, respectivamente, e de suas partes negativas, $(q_j)_J$ e $(Q_j)_J$, também respectivamente.

(a) $\Leftrightarrow$(b). É trivial ver que para todo $j \in J$ temos

$$0 \;\le\; \max\big\{p_j, q_j, P_j, Q_j\big\} \;\le\; |z_j| \;\le\; p_j + q_j + P_j + Q_j \;.$$

Logo, temos $\sum |z_j| < \infty$ se e somente se $\sum p_j$, $\sum q_j$, $\sum P_j$ e $\sum Q_j$ são finitas. Donde, a família $(|z_j|)_J$ é somável se e somente se (z_j) é somável.

(b) $\Leftrightarrow$(c). Segue dos corolários acima.

⋄ Para finalizar, suponhamos que (a) ou (b) ou (c) vale. Sendo assim, pelas definições dadas acima temos $\sum z_j = \sum \mathrm{Re}(z_j) + i \sum \mathrm{Im}(z_j)$ e também temos $\sum \mathrm{Re}(z_j) = \sum p_j - \sum q_j$ e $\sum \mathrm{Im}(z_j) = \sum P_j - \sum Q_j$.

Então, aplicando os corolários acima obtemos

$$\sum p_j = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{\sigma(n)}\,, \quad \sum q_j = \sum_{n=0}^{+\infty} q_{\sigma(n)}\,, \quad \sum P_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{\sigma(n)} \quad \text{e} \quad \sum Q_j = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_{\sigma(n)} \;.$$

Donde segue,

$$\begin{aligned}\sum z_j \;&=\; \left[\sum_{n=0}^{+\infty} p_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} q_{\sigma(n)}\right] \;+\; i\left[\sum_{n=0}^{+\infty} P_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} Q_{\sigma(n)}\right]\\ &=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}[z_{\sigma(n)}] \;+\; i\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}[z_{\sigma(n)}] \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} z_{\sigma(n)}\; \clubsuit\end{aligned}$$

Corolário. *Seja* $(z_i)_I$ *uma família somável e* J *um subconjunto de* I. *Então, também a família* $(z_i)_{i\in J}$ *é somável.*

Prova.

Pelo lema acima, item (b), temos $\sum_{i\in I}|z_i| < \infty$ e, pela inclusão $J \subset I$, a desigualdade

$$\sum_{i\in J}|z_i| \leq \sum_{i\in I}|z_i| \ .$$

Portanto, pelo item (a) do mesmo lema, a família $(z_i)_I$ é somável♣

Proposição. *Sejam* $(a_j)_J$ *e* $(b_j)_J$ *famílias somáveis em* $\mathbb{C}$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Então, as famílias* $(a_j + b_j)_J$ *e* $(\lambda a_j)_J$ *são somáveis e valem as propriedades:*

(a) $\sum(a_j + b_j) = \sum a_j + \sum b_j$.

(b) $\sum \lambda a_j = \lambda \sum a_j$.

Prova. Seja $\sigma : \mathbb{N} \to J$ uma bijeção arbitrária (nesta seção, as famílias são todas enumeráveis).

(a) Pelo lema acima, as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_{\sigma(n)}| \ \text{ e } \ \sum_{n=0}^{+\infty}|b_{\sigma(n)}|$$

convergem. Então, pela desigualdade triangular a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_{\sigma(n)} + b_{\sigma(n)}|$$

também converge. Portanto, pelo mesmo lema, a família $(a_j+b_j)_J$ é somável e

$$\sum_J(a_j + b_j) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(a_{\sigma(n)} + b_{\sigma(n)} \big) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_{\sigma(n)} + \sum_{n=0}^{+\infty}b_{\sigma(n)} = \sum_J a_j + \sum_J b_j.$$

(b) Este caso é análogo ao caso (a) e o deixamos ao leitor♣

3.3 - Associatividade

A associatividade para somas, diferentemente da restrita associatividade para séries, se dá mesmo particionando $\mathbb{N}$ em uma quantidade infinita de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, o que pode ser obtido, por exemplo, listando os números primos

$$I = \{1, 2, 3, 5, 7, \ldots\},$$

em ordem crescente, e introduzindo $F_1 = \{1\}$, o conjunto F_2 dos naturais múltiplos de 2, o conjunto F_3 dos naturais múltiplos de 3 mas não de 2, o conjunto F_5 dos naturais múltipos de 5 mas não de 2 ou 3, e assim sucessivamente e então escrevendo

$$\mathbb{N} = \bigcup_I F_p, \text{ com } F_p \cap F_q = \varnothing \text{ se } p \neq q.$$

Enfatizamos que os resultados nesta seção, para sequências somáveis, se estendem trivialmente a famílias somáveis indexadas em um conjunto enumerável I ao utilizarmos uma bijeção arbitrária $\sigma : \mathbb{N} \to I$. Os enunciamos e provamos para sequências por comodidade.

O primeiro destes três resultados mostra que podemos: (1) associar livremente uma família de números positivos e (2) dissociar cada termo de uma família de números positivos livremente como uma família de números também positivos; no sentido de que tais operações não alteram a somabilidade ou a não somabilidade da família original. Em suma, para computarmos a soma de uma família de números positivos podemos introduzir ou suprimir parenteses livremente.

Nesta seção utilizaremos as notações abaixo:

- O símbolo $\dot\bigcup$ indica uma reunião de conjuntos dois a dois disjuntos.
- Uma partição de $\mathbb{N}$ é uma reunião $\mathbb{N} = \dot\bigcup_I J_i$, onde I é um conjunto de índices (enumerável), satisfazendo as seguintes condições:
    (a) $J_i \cap J_{i'} = \varnothing$ se $i \neq i'$, quaisquer que sejam i e i' em I.
    (b) $J_i \neq \varnothing$ para todo $i \in I$.

Meramente sugerimos ao leitor que antes de prosseguir na leitura mostre : *"Dados A e B, dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, então vale* $\sup A + \sup B = \sup(A+B)$, *com a convenção* $\sup X = +\infty$ *se X não é majorado superiormente"*.

Teorema (Associatividade e Dissociatividade). *Seja* (p_n) *uma sequência de termos em* $[0,+\infty]$. *Seja* $\mathbb{N} = \dot{\bigcup_I} J_i$ *uma partição qualquer de* $\mathbb{N}$. *Então,*

$$\sum p_n = \sum_{i\in I}\sum_{n\in J_i} p_n.$$

Prova.

($\leq$) Dado F finito em $\mathbb{N}$, por hipótese existe um subconjunto finito de índices distintos $\{i_1,\ldots,i_k\} \subset I$ tal que $F \subset J_{i_1} \cup \cdots \cup J_{i_k}$. Donde segue,

$$\sum_{n\in F} p_n \;\leq\; \sum_{J_{i_1}} p_n + \cdots + \sum_{J_{i_k}} p_n \;\leq\; \sum_{i\in I}\sum_{n\in J_i} p_n$$

e então, pela definição de $\sum p_n$, obtemos a primeira desigualdade

$$\sum p_n \;\leq\; \sum_{i\in I}\sum_{n\in J_i} p_n.$$

($\geq$) Dado um conjunto finito de índices distintos $\{i_1,\ldots,i_k\} \subset I$ e conjuntos finitos F_{i_r}, com $F_{i_r} \subset J_{i_r}$ se $1 \leq r \leq k$, então $J_{i_1},\ldots,J_{i_k}$ são dois a dois disjuntos e portanto $F_{i_1},\ldots,F_{i_k}$ também. Segue

$$\sum_{n\in F_{i_1}} p_n + \cdots + \sum_{n\in F_{i_k}} p_n \;\leq\; \sum p_n.$$

Na desigualdade acima, fixando os conjuntos $F_{i_2},\ldots,F_{i_k}$ e computando o supremo sobre a família dos conjuntos finitos F_{i_1} contidos em J_{i_1} obtemos a desigualdade $\sum_{J_{i_1}} p_n + \sum_{F_{i_2}} p_n + \cdots + \sum_{F_{i_k}} p_n \leq \sum p_n$. Nesta desigualdade, fixos $F_{i_3},\ldots,F_{i_k}$, computando o supremo sobre a família de conjuntos finitos $F_{i_2} \subset J_{i_2}$ segue a desigualdade $\sum_{J_{i_1}} p_n + \sum_{J_{i_2}} p_n + \sum_{F_{i_3}} p_n + \cdots + \sum_{F_{i_k}} p_n \leq \sum p_n$. Assim, por indução encontramos

$$\sum_{J_{i_1}} p_n + \sum_{J_{i_2}} p_n + \cdots + \sum_{J_{i_k}} p_n \;\leq\; \sum p_n.$$

Por fim, como $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ é qualquer subconjunto finito de I concluímos

$$\sum_{i\in I}\sum_{n\in J_i} p_n \;\leq\; \sum p_n \clubsuit$$

Corolário (Lei Associativa Para Somas). *Seja (a_n) uma sequência somável. Suponha*

$$\mathbb{N} = \dot{\bigcup_I} J_i \text{ uma partição arbitrária de } \mathbb{N}.$$

Então, a família $(a_n)_{n\in J_i}$ é somável, para todo $i \in I$, e

$$\sum a_n = \sum_I \sum_{n\in J_i} a_n.$$

Prova.

Já vimos que cada sub-família $(a_n)_{n\in J_i}$ é somável.

- Em $\mathbb{R}$, a identidade anunciada segue da decomposição

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n,$$

com p_n e q_n as partes positiva e negativa de a_n, respectivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$ e da associatividade para sequências somáveis de termos positivos.

- Em $\mathbb{C}$, a identidade segue da decomposição

$$\sum a_n = \sum \mathrm{Re}(a_n) + i \sum \mathrm{Im}(a_n)$$

e do caso real provado acima♣

Corolário. *Seja (a_n) uma sequência somável. Suponha (I_m) uma sequência crescente arbitrária de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que*

$$\bigcup I_m = \mathbb{N}$$

(dita uma sequência exaustiva para $\mathbb{N}$). Então, a família $(a_n)_{n\in I_m}$ é somável, para todo $m \in \mathbb{N}$, e

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n\in I_m} a_n = \sum a_n.$$

Prova.

- Mantenhamos a notação na prova do corolário acima. Sabemos que cada sub=-família $(a_n)_{I_m}$, é somável. A seguir, dividamos a prova em três casos.

(a) Suponhamos $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que temos

$$0 \leq \sum_{n \in I_m} a_n \leq \sum a_n \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$

que a sequência

$$\left(\sum_{n \in I_m} a_n \right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é crescente}$$

e que vale a desigualdade

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n \in I_m} a_n \leq \sum a_n.$$

Mostremos a reversa desta desigualdade. De fato, é fácil ver que dado F um subconjunto finito arbitrário de $\mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset I_n$ e obtemos

$$\sum_{n \in F} a_n \leq \sum_{n \in I_m} a_n \leq \lim_{m \to +\infty} \sum_{n \in I_m} a_n.$$

Donde segue

$$\sum_{n \in F} a_n \leq \lim_{m \to +\infty} \sum_{n \in I_m} a_n.$$

Por fim, como F é um subconjunto finito arbitrário de $\mathbb{N}$, pela definição de soma de positivos segue a desigualdade desejada

$$\sum a_n \leq \lim_{m \to +\infty} \sum_{n \in I_m} a_n.$$

(b) Suponhamos $a_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A demonstração segue então da decomposição

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$$

e do caso (a).

(c) Suponhamos $a_n \in \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A demonstração segue então da decomposição

$$\sum a_n = \sum \mathrm{Re}(a_n) + i \sum \mathrm{Im}(a_n)$$

e do caso (b)♣

3.4 - Séries Versus Somas Ordenadas, Uma Tabela

No que segue apresentamos uma tabela destacando as pricipais propriedades assim como as principais diferenças relativas às

- séries condicionalmente convergentes,
- série absolutamente convergentes e
- somas não ordenadas finitas.

Ressaltemos que a associatividade para uma série convergente (isto é, série condicionalmente convergente ou série absolutamente convergentes) permite a inserção de parenteses a um subconjunto de elementos consecutivos dos termos da série (ordenada) em questão. Assim, nos é permitido inserir uma quantidade finita de parenteses a uma série (uma soma ordenada) convergente e também nos é permitido inserir uma quantidade infinita de parenteses a uma série (uma soma ordenada) convergente. A quantidade de termos dentro de cada um dos parenteses inseridos é portanto finita.

	Comutatividade	Associatividade
Série condicional/e convergente	não	sim (mantendo a ordem)
Série absoluta/e convergente	sim	sim (mantendo a ordem)
Soma não ordenada finita	sim	total

3.5 - Soma de uma Sequência Dupla e o Produto de Séries

Seguem versões da lei associativa para uma sequência dupla $(a_{(n,m)})_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Indicamos $a_{nm} = a_{(n,m)}$ os termos de uma sequência dupla e sua soma por

$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm} = \sum_{n,m} a_{nm} = \sum a_{nm}.$$

Indicamos a sequência dupla com a matriz infinita

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Teorema (Soma para sequência dupla). *Se $\sum |a_{nm}| < \infty$, então (a_{nm}) é somável e vale o que segue.*

(a) Se $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \dot{\bigcup}_{i\in I} J_i$ é uma partição de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, então

$$\sum_{i\in I} \sum_{(n,m)\in J_i} a_{nm} = \sum a_{nm}.$$

(b) Se $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de subconjuntos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ satisfazendo $\bigcup I_k = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (dita uma sequência exaustiva para $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$), então

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{(n,m)\in I_k} a_{nm} \ = \ \sum a_{nm} \ .$$

*(c) (**Séries iteradas/ Somatório duplo**). Temos*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{nm} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{nm} = \sum a_{nm}$$

(d) Para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, vale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{\sigma(k)} = \sum a_{nm}.$$

Prova. [Vide figuras 3.1, 3.2 e 3.3(a) a seguir.] A somabilidade de (a_{nm}) é trivial.

(a) Segue do corolário "lei associativa" (vide Figura 3.2).

(b) Segue do último corolário acima (vide Figura 3.1).

(c) Aplicando o item (a) e o lema soma/série (duas vezes), temos

$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{nm} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{nm} \quad \text{[analogamente para } \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{nm}\text{]}.$$

(d) Segue do lema soma/série♣

Observação. Supondo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} b_m = b,$$

é fácil ver que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_n b_m = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_m = ab.$$

Antes de definirmos o produto de duas séries notemos que dadas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum^{+\infty} b_m,$$

há infinitas maneiras de associarmos os termos da sequência dupla $(a_n b_m)$ para formarmos uma série. Nestas notas usaremos apenas o produto de Cauchy abaixo.

Definição. *O* **Produto de Cauchy** *das séries*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} b_m,$$

é a série

$$(a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p\,, \quad com\ c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m.$$

O produto de Cauchy surge, no caso finito, com a multiplicação de dois polinômios arbitrários e, no caso infinito, com o produto de duas séries de potências arbitrárias. Vide Exemplo 30 e Figura 3.3(b), a seguir.

Corolário. *Sejam*

$$\sum^{\infty} a_n = a \quad e \quad \sum^{\infty} b_m = b$$

séries absolutamente convergentes. Então temos $\sum |a_n b_m| < \infty$ *e ainda,*

(a) $\sum a_n b_m = ab$.

(b) O produto de Cauchy *das séries apresentadas é também uma série absolutamente convergente e tem por soma*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n+m=p} a_n\, b_m \right) = ab.$$

Prova.

É claro que

$$\sum |a_n b_m| = \left(\sum |a_n|\right) \left(\sum |b_m|\right) < \infty.$$

Assim, $(a_n b_m)$ é somável.

(a) Pela fórmula (c) para a soma de uma sequência dupla segue trivialmente

$$\sum a_n b_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_n b_m = ab.$$

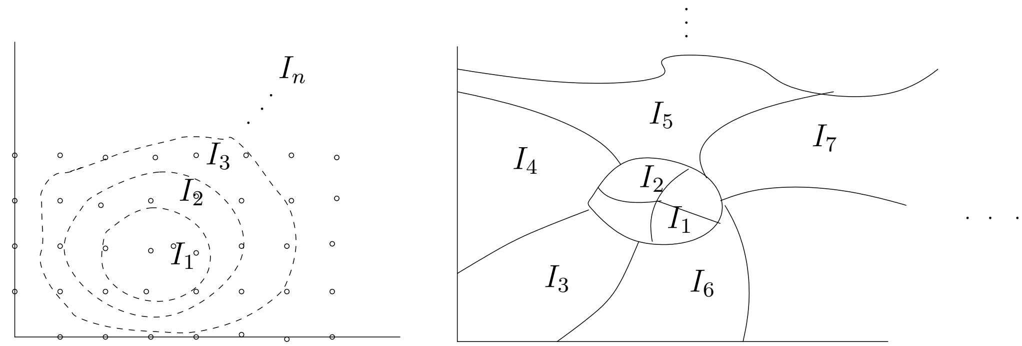
(b) Considerando a partição $(J_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida por

$$J_p = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : n+m = p\} \qquad \text{[vide figura 3.3 (b)]}$$

e então aplicando o item (a), a fórmula (a) para a soma de uma sequência dupla e o lema soma/série obtemos

$$ab = \sum a_n b_m = \sum_{p\in\mathbb{N}} c_p = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p\,, \quad \text{com } c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m \ \text{ e } \ \sum_{p=0}^{+\infty} |c_p| < \infty \clubsuit$$

Comentário. Apresentamos a prova acima para o item (b), utilizando o conceito de somas não ordenadas, devido a: (1) sua concisão e (2) tal conceito é muito útil para provarmos, também concisamente, teoremas e regras operatórias para séries de potências.



$I_n \subset I_{n+1}$ e $\bigcup I_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad$ $I_n \bigcap I_m \neq \varnothing, n \neq m,$ e $\bigcup I_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{I_n} a_{ij} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm}$ $\quad$ $\sum\limits_{\mathbb{N}} \sum\limits_{I_n} a_{ij} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij}$

(a) Sequência exaustiva para $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. $\quad$ (b) Associatividade.

Figura 3.1: Ilustração ao Teorema 6.23 (b) e (a), respectivamente.

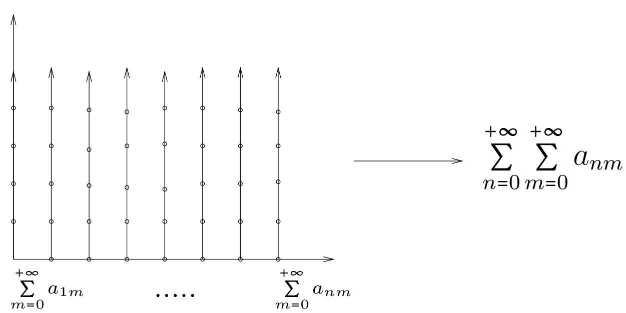
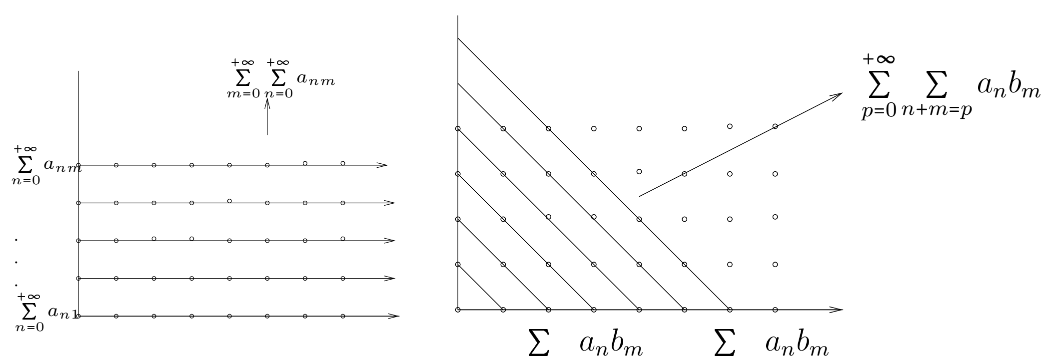


Figura 3.2: Ilustração ao Teorema 6.23 (c) - $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{nm} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm}$



$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\}$ $\quad$ O Produto de Cauchy

(a) $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{nm} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm}$ $\quad$ (b) $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} \{(n,m) : n+m=p\}$

Figura 3.3: Ilustração ao Teorema 6.23 (c) ; Ilustração à Definição 6.25

Exemplo 29. Justifiquemos a fórmula para o produto de Cauchy.

(a) Se $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ e $b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$ são polinômios na variável $z \in \mathbb{C}$, com coeficientes complexos, é claro que

$$(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)(b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m) = \sum_{p=0}^{n+m} c_p z^p \,, \text{ com } c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m.$$

(b) Sejam $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m$ séries em $\mathbb{C}$ e absolutamente convergentes qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$. Já mostramos que

$$f(z)g(z) = \sum a_n b_m z^n z^m = \sum a_n b_m z^{n+m} \quad \text{e que}$$

$$\sum a_n b_m z^{n+m} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n+m=p} a_n b_m z^p = \sum_{p\in\mathbb{N}} c_p z^p, \quad \text{com } c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m.$$

Pelo lema soma/série temos

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} c_p z^p = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p.$$

Por fim concluímos,

$$f(z)g(z) = \sum a_n b_m z^{n+m} = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p \,, \quad \text{com } c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m.$$

Exemplo 30. Se $|z| < 1$, a soma da sequência dupla dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} z & z^2 & z^3 & z^4 & \ldots.. \\ z^2 & z^3 & z^4 & z^5 & \ldots.. \\ z^3 & z^4 & z^5 & z^6 & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots. & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots. & \ldots.. \end{pmatrix} \qquad \text{é} \quad \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Prova. Inicialmente mostremos que a sequência dupla é somável.

A soma dos valores absolutos dos elementos na n-ésima linha, $n = 1, 2, \ldots$ é

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} |z|^{n+p} = \sum_{p=1}^{+\infty} |z|^{n+p} = \frac{|z|^n}{1-|z|},$$

e, somando tais resultados obtemos,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|z|^n}{1-|z|} = \frac{1}{1-|z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |z|^n = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Então, a soma da sequência dupla é

$$\frac{z}{(1-z)^2} \clubsuit$$

3.6 - A Exponencial Complexa e as Funções Trigonométricas

Teorema (Exponencial complexa). *A função exponencial complexa,*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \text{com } z \in \mathbb{C},$$

é bem definida, satisfazendo as propriedades abaixo.

(a) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, *para quaisquer* z w, *ambos em* $\mathbb{C}$.

(b) $\exp(0) = 1$, *e para todo* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$ *e* $\exp(z) \neq 0$.

(c) Seja $e = \lim(1+1/n)^n$ *o número de Euler. Então,*

$$\exp(1) = e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

(d) $\exp(x) = e^x$ *para todo racional* x.

(e) A restrição de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ao conjunto* $\mathbb{R}$ *é a função* $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

(f) Com a notação $e^z = \exp(z)$ *temos* $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ e $|e^z| = e^{Re(z)}$, *para todo* z *em* $\mathbb{C}$.

(g) Vale o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

(h) $\exp(z)$ *é contínua em* $\mathbb{C}$.

(i) Vale o limite (a derivada da função exponencial complexa)

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z, \ \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Prova.

(a) Utilizando a fórmula para o produto de Cauchy das séries absolutamente convergentes $\exp(z)$ e $\exp(w)$ obtemos,

$$\begin{aligned} \exp(z)\exp(w) &= \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{w^m}{m!}\Big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n+m=p} \frac{1}{n!\,m!} z^n w^m = \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{n=p} \frac{p!}{n!\,(p-n)!} z^n w^{p-n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^p}{p!} = \exp(z+w) \ . \end{aligned}$$

(b) É óbvio que $\exp(0) = 1$. Assim, dado $z \in \mathbb{C}$ e empregando (a) obtemos,

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z) \ .$$

Donde segue $\exp(z) \neq 0$. Ainda mais, $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

(c) Utilizemos de duas formas o desenvolvimento

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}\frac{1}{n^p} \\ &= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Primeiro, é trivial ver que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Está provado $e \leq \exp(1)$. Segundo, fixemos m tal que $m \leq n$. Então segue

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geq \\ &\geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).\end{aligned}$$

A seguir, impondo $n \to +\infty$ concluímos que

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Isto prova $e \geq \exp(1)$.

(d) e (e) São afirmações triviais (vide Capítulo 1).

(f) Como $|\overline{z}| = |z|$, segue que a função conjugado $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ é contínua. Donde segue

$$\overline{e^z} = \overline{\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\overline{\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{\overline{z}^j}{j!} = e^{\overline{z}} \ .$$

Ainda mais,

$$|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} = \left(e^{\mathrm{Re}(z)}\right)^2 \ .$$

Então, utilizando que $e^{\mathrm{Re}(z)} \geq 0$ obtemos $e^{\mathrm{Re}(z)} = |e^z|$.

(g) É fácil ver que temos

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^n}{n!}-1\right) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h^n}{n!} = 1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots.$$

Logo, supondo $|h|\leq 1$ e $h\neq 0$, obtemos

$$\left|\frac{e^h-1}{h}-1\right| \leq \left(\frac{|h|}{2!}+\frac{|h|^2}{3!}+\cdots\right) \leq |h|\left[\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right] \leq e|h|.$$

Donde segue,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}-1\right)=0.$$

(h) Dado $z\in\mathbb{C}$ temos, pelo item anterior,

$$\lim_{h\to 0}\left(e^{z+h}-e^z\right)=\lim_{h\to 0}e^z\left(\frac{e^h-1}{h}\right)h=e^z.1.0=0.$$

(i) Pelo item (g) segue

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{z+h}-e^z}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^z e^h-e^z}{h} = e^z\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^z\clubsuit$$

Definamos a seguir as funções trigonométricas complexas $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$, $z\in\mathbb{C}$. Notemos que até aqui, neste texto, a apresentação das funções trigonométricas esteve baseada em considerações geométricas.

Pela associatividade para somas não ordenadas, dado $\theta\in\mathbb{R}$ temos (por favor, cheque)

$$(3.5.1)\quad e^{i\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right).$$

Ainda, as partes real e imaginária da série acima são as séries de Taylor na origem das funções reais $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, respectivamente (vide Capítulo 1).

Apresentamos então as seguintes definições analíticas.

Definição. *Dado* $z \in \mathbb{C}$, *indicamos*

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad , \quad sen\, z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Corolário (Fórmula de Euler). *Dado* $\theta \in \mathbb{R}$, *temos*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i sen\,\theta.$$

Prova. Segue da fórmula 3.5.1 e da definição acima♣

A seguir, verifiquemos que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, com $x \in \mathbb{R}$, obtidas restringindo as funções complexas $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ ao eixo real, possuem as propriedades geométricas e analíticas que esperamos.

Teorema. *As funções* $\cos x$ *e* $sen\, x$ *são deriváveis e satisfazem,* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos' x = -senx \qquad e \qquad sen' x = \cos x.$$

Prova.

Seja $h \in \mathbb{R}$. Do teorema "exponencial complexa" segue

$$e^{ix} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ix+ih} - e^{ix}}{ih} = -i \lim_{h\to 0} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h}.$$

Logo, identificando as partes reais e imaginárias na identidade acima temos

$$\begin{cases} \cos x = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \operatorname{sen}' x \\ \\ \operatorname{sen} x = -\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos' x \end{cases}$$ ♣

A seguir, apresentamos a definição do número π dada por Landau.

Landau foi perseguido durante o nazismo por ser judeu, perdendo seu posto de professor em Berlim. Bierberbach, um de seus detratores, alegara que sua matemática não era germânica. Provavelmente se referindo, entre outras "razões", à definição do número π *sugerida por Landau.*

Teorema (Número de Landau). *Existe o menor $l > 0$ tal que $\cos l = 0$.*

Prova.

É óbvio que $\cos 0 = 1$. Mostremos que $\cos 2 < 0$. Escrevendo

$$\cos 2 = \left(1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \left[\left(-\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}\right) + \left(-\frac{2^{10}}{(10)!} + \frac{2^{12}}{(12)!}\right) + \cdots\right],$$

temos

$$1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

e com cada uma das parcelas entre colchetes satisfazendo

$$-\frac{2^{2n}}{(2n)!} + \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{4}{(2n+2)(2n+1)}\right) < 0, \text{ com } n \text{ ímpar e } n \geq 3.$$

Segue então que $\cos 2 < 0$.

A função $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$, onde $x \in \mathbb{R}$, é contínua e pelo teorema do valor intermediário ela se anula em algum ponto entre 0 e 2. Então, é fácil concluir que existe o menor real estritamente positivo l tal $\cos l = 0$ (cheque)♣

Definição (O número π). *Indicamos $\pi = 2l$, com l o número da Landau.*

Proposição. *Valem as propriedades abaixo.*

(a) $|e^{i\theta}| = 1 = \cos^2\theta + sen^2\theta$, *para todo* $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) $e^{i\pi/2} = i$ *e* $e^{i\pi} = -1$.

(c) A função $\exp(z)$ *é periódica com período* $2\pi i$. *Isto é,*

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

(d) Se $\theta \in (0, 2\pi)$ *então* $e^{i\theta} \neq 1$.

(e) $e^z = 1$ *se e somente se* $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(f) (**Representação Fundamental).** *Se* $\omega \in \mathbb{C}$ *é tal que* $|\omega| = 1$, *então existe um único* $\theta \in [0, 2\pi)$ *tal que* $e^{i\theta} = \omega$.

(g) A imagem da função exponencial $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *é o conjunto* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Prova.

(a) Temos, $|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta}\,\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) = 1$.

(b) Pela Fórmula de Euler e pela definição de π segue

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\operatorname{sen}(\pi/2) = i\operatorname{sen}(\pi/2)\ .$$

Pelo item (b) temos $1 = |e^{i\pi/2}| = |\operatorname{sen}(\pi/2)|$. Logo, $\operatorname{sen}(\pi/2) = \pm 1$. É fácil ver que $\cos\theta$ é positiva em $(0,\pi/2)$, implicando que $\operatorname{sen}\theta$ é crescente em $(0,\pi/2)$, com $|\operatorname{sen}\theta| \leq |e^{i\theta}| = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Seguem então

$$\operatorname{sen}(\pi/2) = +1 \ \text{ e } \ e^{i\pi/2} = i.$$

(c) Temos $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(e^{i\pi/2})^4 = e^z i^4 = e^z$.

(d) Dado $\theta \in (0, 2\pi)$, consideremos

$$\alpha = \frac{\theta}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Como $\cos 0 = 1$ e $\cos(\pi/2) = 0$ e a função $\cos x$ (com $\cos x = \operatorname{sen}' x$) é estritamente positiva no intervalo $(0,\pi/2)$, temos que a função $\operatorname{sen} x$ é estritamente crescente neste intervalo. É claro que $\operatorname{sen} 0 = 0$ e, pelo item (b), $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Logo, concluímos que $\operatorname{sen} x \in (0,1)$ se $x \in (0,\pi/2)$. Donde então segue $e^{i\alpha} \notin \{+1,-1,+i,-i\}$. Logo, $e^{i\theta} = (e^{i\alpha})^4 \neq 1$.

(e) Dado $n \in \mathbb{Z}$, pelo item (c) segue $e^{2\pi n i} = (e^{2\pi i})^n = (e^0)^n = 1$.

Inversamente, se $e^z = 1$ então $1 = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Logo, pelas propriedades (b) e (f) da expoencial obtemos $\operatorname{Re} z = 0$. Assim, podemos escrever $z = iy$, com $y \in \mathbb{R}$. É fácil ver que existe um único número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y \in [2n\pi, 2(n+1)\pi)$. Logo, $y - 2n\pi \in [0, 2\pi)$. Desta forma, utilizando o item (c) seguem as identidades $1 = e^z = e^{iy} = e^{iy-2n\pi i} = e^{(y-2n\pi)i}$, com $y - 2n\pi \in [0,2\pi)$. Então, pelo ítem (d) obtemos $y - 2n\pi = 0$. Portanto,

$$z = iy \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

(f) Seja $\omega = a + ib$, com $1 = |\omega| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Suponhamos $a > 0$ e $b > 0$ [logo, $a, b \in (0,1)$]. Como a função $\cos x$ restrita a $[0, \pi/2]$ é contínua, estritamente decrescente e satisfaz $\cos 0 = 1$ e $\cos \pi/2 = 0$, pelo teorema do valor intermediário segue que

$$\text{existe } \theta \in (0, \pi/2) \text{ tal que } \cos\theta = a.$$

Donde encontramos

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - a^2 = b^2.$$

Assim, como a função $\operatorname{sen} x$ é positiva em $[0, \pi/2]$ [vide a prova do item (b)], segue que $\operatorname{sen}\theta = b$. Logo,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = a + ib = \omega.$$

Suponhamos $a < 0$ e $b > 0$. Então, existe $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que $e^{i\theta} = b - ai$. Assim, $\alpha = \theta + \pi/2 \in (\pi/2, \pi)$ e $e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\pi/2)} = e^{i\theta}e^{i\pi/2} = (b - ai)i = a + bi = \omega$.

Suponhamos $b < 0$ e $a \neq 0$. Pelos casos acima existe $\theta \in (0, \pi)$ tal que $e^{i\theta} = -a - bi$. Assim,

$$\alpha = \theta + \pi \in (0, 2\pi) \quad \text{e} \quad e^{i\alpha} = e^{i\theta}e^{i\pi} = (-a - bi)(-1) = a + bi = \omega.$$

O caso $a = 0$ e o caso $b = 0$ são triviais.

A unicidade segue do item (d). De fato, dados θ_1 e θ_2 em $[0, 2\pi)$ tais que $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, é claro que podemos supor $\theta_2 \geq \theta_1$. Logo, temos $\theta_2 - \theta_1 \in [0, 2\pi)$ e ainda, $e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = e^{i\theta_2}e^{-i\theta_1} = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_1} = e^0 = 1$. Portanto, $\theta_2 - \theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta_1$.

(g) Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos $|w| \neq 0$ e assim, como $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é bijetora, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = |w|$. Ainda mais, como

$$\left| \frac{w}{|w|} \right| = 1,$$

pelo item (f) segue que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$. Logo, $e^{x+iy} = w$ ♣

Proposição. *Utilizemos a identificação usual* $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, *como espaço vetoriais reais e como espaços métricos. Então, para todo* $k \in \mathbb{Z}$, *a restrição dada abaixo é uma bijeção.*

$$\begin{cases} \exp : \mathbb{R} \times [k\pi, k\pi + 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \\ \\ \exp(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y). \end{cases}$$

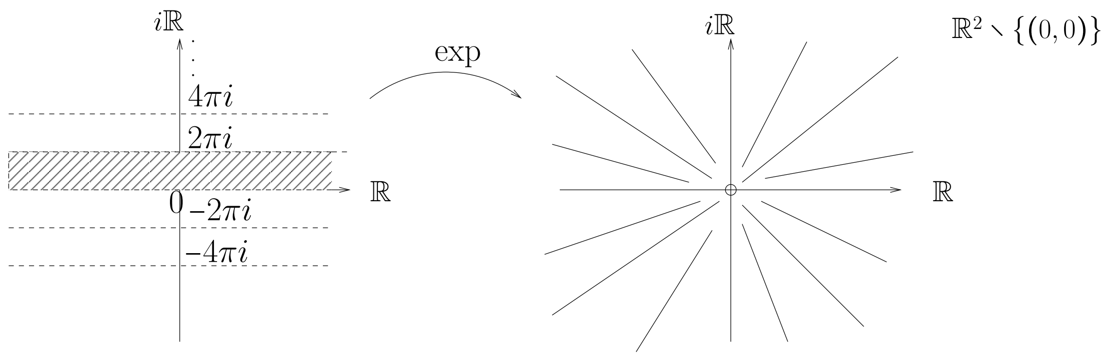


Figura 3.4: A aplicação $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Prova. Deixamos ao leitor verificar♣

Abaixo utilizamos a fórmula, onde N é ímpar e $z, w \in \mathbb{C}$ (cheque),

$$(z+w)^N = \sum_{2n+1+2m=N} \left[\binom{N}{2m} z^{2n+1} w^{2m} \ + \ \binom{N}{2n+1} z^{2m} w^{2n+1} \right].$$

Teorema. *Sejam* z *e* w *arbitrários em* $\in \mathbb{C}$. *Então,*

$$sen\,(z+w) = sen\, z \cos w + sen\, w \cos z.$$

Prova. Pela definição das funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos w$ e pela fórmula acima temos,

$\operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \ \sum_{2n+1+2m=2k+1} (-1)^{n+m} \left[\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{w^{2m}}{(2m)!} \ + \ \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \sum_{2n+1+2m=2k+1} \frac{1}{(2n+2m+1)!} \left[\binom{2n+2m+1}{2m} z^{2n+1} w^{2m} \ + \ \binom{2n+2m+1}{2n+1} z^{2m} w^{2n+1} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (z+w)^{2k+1} = \sin(z+w) \ ♣$$

3.7 - Teoremas de Mertens e Abel para o produto de séries

A série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$
não é absolutamente convergente pois temos
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$
mas é condicionalmente convergente pelo Critério de Leibniz.

Exemplo 31. *O produto de Cauchy da série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *por si mesma diverge.*

Prova.

Seja
$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$
Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos $0 \leq (m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$ e
$$2\sqrt{m+1}\sqrt{n+1} \leq m+1+n+1 = m+n+2.$$

Então, supondo $m+n=p$ obtemos
$$(-1)^p a_m a_n = \frac{1}{\sqrt{m+1}\sqrt{n+1}} \geq \frac{2}{p+2} \quad \text{e}$$
$$(-1)^p \sum_{m+n=p} a_m a_n \geq \sum_{m+n=p} \frac{2}{p+2} = (p+1)\frac{2}{p+2} \geq 1, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{N}.$$
Então, como o termo geral (do produto de Cauchy)
$$c_p = \sum_{m+n=p} a_m a_n$$
não tende a zero, o produto de Cauchy é uma série divergente♣

Definição. *Dadas* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m$ *e uma bijeção* $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *a série* $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p$, *com* $c_p = a_n b_m$ *e* $p = \sigma(n,m)$, *é* um produto *das séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m$.

Notemos que o produto de Cauchy entre duas séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ não é, em geral, um produto. Porém, ele pode ser obtido por associação de algumas das séries definidas como um produto das duas citadas séries.

Teorema (Mertens, 1875).[1] *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, *com convergência absoluta, e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, *então o produto de Cauchy destas séries converge e tem soma* AB.

Prova.

Sejam $c_n = \sum_{k=o}^{n} a_k b_{n-k}$ e

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\,, \quad \beta_n = B_n - B.$$

Então,

$$\begin{aligned} C_n \quad &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_nB_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_nB + (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0). \end{aligned}$$

Destacando a segunda parcela entre parenteses no último membro acima,

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0,$$

temos $C_n = A_nB + \gamma_n$. Então, como temos $\lim A_nB = AB$, resta apenas verificarmos $\lim \gamma_n = 0$.

Por hipótese seguem

$$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty \qquad \text{e} \qquad \lim \beta_n = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\beta_n| \leq \epsilon$, para todo $n \geq N$. Donde, para $n > N$ segue

$$\begin{aligned} |\gamma_n| \quad &\leq |\beta_0a_n + \cdots\beta_Na_{n-N}| \ + |\beta_{N+1}a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_na_0| \\ &\leq |\beta_0a_n + \cdots\beta_Na_{n-N}| \ + \epsilon\alpha. \end{aligned}$$

Assim, como $\lim a_n = 0$ se $n \to +\infty$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} |\beta_0a_n + \cdots\beta_Na_{n-N}| = 0$$

e consequentemente

$$\limsup |\gamma_n| \leq \epsilon\alpha, \quad \text{para todo } \epsilon > 0 \clubsuit$$

[1] Franz C. J. Mertens (1840-1927), de ancestralidade germânica, nasceu em uma vila à época na Prussia e hoje na Polônia e foi aluno de Weierstrass em Berlim.

Utilizando séries de potências, prova-se facilmente o resultado abaixo.

Teorema (Abel, 1826). *Suponhamos que as séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *e também seu produto de Cauchy* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ *convergem. Então,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Definição. *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$*, com cada* $a_n = 0$*, é a* **série nula**.

Teorema. *Sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a$ *e* $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m = b$ *séries convergentes não nulas. Consideremos uma bijeção* $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e a série produto* $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p$*, onde* $c_p = a_n b_m$ *e com* $\sigma(n,m) = p$*. Então, tal série produto é absolutamente convergente se e somente se as séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m$ *são também absolutamente convergentes. Ainda mais, sob tais hipóteses temos*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = ab.$$

Prova.

($\Rightarrow$) Por hipótese temos $\sum |a_n b_m| < \infty$ e então, para $a_{n_0} \neq 0$ temos

$$|a_{n_0}| \sum_m |b_m| = \sum_m |a_{n_0}||b_m| \leq \sum |a_n b_m| < \infty.$$

Donde segue $\sum |b_m| < \infty$. Analogamente obtemos $\sum |a_n| < \infty$.

($\Leftarrow$) É claro que

$$\sum_{p=1}^{N} |c_p| \leq \left(\sum |a_n|\right)\left(\sum |b_m|\right), \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Logo, a série $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p$ é absolutamente convergente.

Por fim, ocorrendo uma das hipóteses no enunciado temos que a sequência dupla $(a_n b_m)$ é somável. Assim, pelo lema soma/série segue

$$\sum a_n b_m = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p = ab\clubsuit$$

3.8 - Somabilidade de Cesaro

A Soma de Cesaro é uma das mais úteis formas de somabilidade e muito importante em Séries de Fourier (também o Critério de Dirichlet é importante para Séries de Fourier).

Exercício. Seja (z_n) uma sequência convergente a z. Então a sequência $\tau_n = (z_1 + \cdots + z_n)/n$ formada pelas médias aritméticas de (z_n) também converge a z.

Vejamos que o conceito *Somabilidade segundo Cesaro* é mais geral que *Séries*.

Definição. *Dada a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, *seja* s_n *a sua* n*-ésima soma parcial e seja*

$$\tau_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

A série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ *é* Cesaro-somável *[ou (C,1) somável] se* (τ_n) *converge. Se* $\lim \tau_n = s$ *então* s *é* a soma de Cesaro *[ou* soma (C,1)*] de* $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ *e escrevemos*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = s \qquad (C,1).$$

Teorema. *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = s \in \mathbb{C}$ *então*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = s \qquad (C,1) \quad [\textit{i.e., no sentido de Cesaro}].$$

Prova. Segue do exercício imediatamente acima, pois $\lim s_n = s$♣

Exemplo 32. *Seja* $a_n = z^n$, *com* $|z| = 1$ *e* $z \neq 1$. *Então,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \quad (C,1) \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2} \quad (C,1).$$

Prova.

Pela fórmula para a soma de uma progressão geométrica temos,

$$s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z},$$

$$\tau_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = \frac{\frac{n}{1-z} - \frac{1}{1-z}(z + \cdots + z^n)}{n} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{n}\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2}.$$

Desta forma, com a desigualdade

$$\left| \frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2} \right| = \frac{|1-z^n|}{|1-z|^2} \leq \frac{2}{|1-z|^2}$$

concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \frac{1}{1-z}♣$$

Capítulo 4

SOMAS NÃO ORDENADAS (arbitrárias) E ASSOCIATIVIDADE

4.1 - Associatividade

A definição de famílias somáveis a seguir, equivale à usual. De fato, decorre da definição clássica de somabilidade que uma família de vetores $(v_j)_J$ em um espaço vetorial normado e completo $(V, \|\cdot\|)$ [isto é., um espaço em que as sequências de Cauchy convergem] é somável se e só se ela é absolutamente somável [isto é, $\sum_J \|v_j\| < \infty$]. Com a definição aqui adotada, tal equivalência se mantém. [Vide também seção 4.2.]

Seja J um conjunto de índices arbitrário (logo, estamos dispensando a hipótese "J enumerável") e seja X um conjunto arbitrário. Uma família em X, indexada em J, é uma função $x : J \to X$. Indicamos a família x por

$$(x_j)_{j\in J} \ \text{ ou } \ (x_j)_J \ \text{ ou, brevemente, } \ (x_j).$$

Dada uma família (p_j) contida em $[0, +\infty]$, definimos

$$\sum_{j\in J} p_j = \sup\left\{\sum_{j\in F} p_j : \ F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \text{ em } [0, +\infty].$$

Tal sup é finito se e somente se existe um real $M \geq 0$ tal que

$$\sum_{j\in F} p_j \leq M, \text{ para todo subconjunto finito } F \text{ contido em } J.$$

Também escrevemos

$$\sum_J p_j \quad \text{para} \quad \sum_{j\in J} p_j, \ \text{ou mesmo} \ \sum p_j$$

se o conjunto de índices J é subentendido.

Proposição. *Sejam $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$ duas famílias em $[0,+\infty]$. Então,*

(a) $\sum(p_j+q_j)=\sum p_j+\sum q_j$.

(b) $\sum \lambda p_j = \lambda\sum p_j$*, para todo λ em $[0,+\infty)$.*

(c) (Propriedade Comutativa) *Se $\sigma:\mathcal{K}\to J$ é uma bijeção, então*

$$\sum_J p_j = \sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)}.$$

Prova.

(a) e (b). Triviais. [Devido a (a) e (b), dizemos que as famílias positivas tem a propriedade de conicidade.]

(c) São iguais os conjuntos sobre os quais computamos

$$\sum_J p_j \ \text{e} \ \sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)} \ \clubsuit$$

Dada uma família $(p_j)_J$ em $[0,+\infty]$, se $\sum_J p_j$ é finito (um número real), dizemos que $(p_j)_J$ é uma família somável e que sua soma é o número real (e positivo)

$$\sum_J p_j.$$

Escrevemos

$$\sum_J p_j < \infty,$$

para indicar que $(p_j)_J$ é uma família somável.

Dada uma família de conjuntos J_k, onde $k\in\mathcal{K}$, **dois a dois disjuntos** [i.e., se $k_1\neq k_2$ então $J_{k_1}\cap J_{k_2}=\varnothing$] indicamos a sua reunião por

$$\dot{\bigcup_{k\in\mathcal{K}}} J_k = \dot{\bigcup_{\mathcal{K}}} J_k.$$

Teorema (Associatividade). *Seja* $(p_j)_J$ *uma família em* $[0,+\infty]$ *e* J *uma reunião de conjuntos* J_k*, com* k *em* $\mathcal{K}$*, dois a dois disjuntos. Então,*

$$\sum_J p_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j.$$

Prova. Mostremos duas desigualdades.

◇ Dado F finito e contido em J, por hipótese existem índices distintos $k_1,\ldots,k_l$, todos em $\mathcal{K}$, tal que $F \subset J_{k_1} \cup \cdots \cup J_{k_l}$. Donde segue

$$\sum_F p_j = \sum_{F\cap J_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F\cap J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_{J_{k_1}} p_j + \;\cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j$$

e então, pela definição de $\sum_J p_j$,

$$\sum_J p_j \leq \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j.$$

◇ Dados índices distintos $k_1,\ldots,k_l$ em $\mathcal{K}$ e conjuntos finitos F_{k_r}, com $F_{k_r} \subset J_{k_r}$ se $1 \leq r \leq l$, os conjuntos $J_{k_1},\ldots,J_{k_l}$ são dois a dois disjuntos e portanto os conjuntos $F_{k_1},\ldots,F_{k_l}$ também. Sendo assim, temos

$$\sum_{F_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_J p_j\ .$$

Então, fixando os conjuntos $F_{k_2},\ldots,F_{k_l}$ e computando o supremo sobre a família dos conjuntos finitos F_{k_1} contidos em J_{k_1} obtemos a desigualdade

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{F_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \leq \sum_J p_j.$$

Argumentando analogamente $(l-1)$-vezes obtemos

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{J_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_J p_j.$$

Por fim, como $\{k_1,k_2,\ldots,k_l\}$ é qualquer subconjunto finito de $\mathcal{K}$ concluímos

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j \;\leq\; \sum_J p_j \clubsuit$$

Seja $x \in \mathbb{R}$. Suas partes positiva e negativa são, respectivamente,

$$p = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \ \geq \ 0 \\ 0\,, & \text{se } x \ \leq \ 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad q = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \ \geq \ 0 \\ -x\,, & \text{se } x \ \leq \ 0. \end{cases}$$

Temos,

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq |x| \\ 0 \leq q \leq |x| \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = p - q \\ |x| = p + q \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} p = \frac{|x|+x}{2} \\ q = \frac{|x|-x}{2}. \end{cases}$$

É também usual escrever as partes positiva e negativa de x por x_+ e x_-, respectivamente. Assim,

$$x_+ = p \ \text{ e } \ x_- = q.$$

Definição. *Seja J um conjunto de índices.*

- *Uma família (x_j) de números reais é* somável *se as famílias (p_j) e (q_j) das partes positivas e negativas de x_j, com j em J, respectivamente, são somáveis.*

  Se a família (x_j) é somável, sua soma (não ordenada) *é*

  $$\sum x_j = \sum p_j - \sum q_j.$$

- *Uma família (z_j) de números complexos é* somável *se as famílias*

  $$\big(Re(z_j)\big)_J \ \text{ e } \ \big(Im(z_j)\big)_J,$$

  das partes reais e imaginárias de z_j, com j em J, são somáveis.

  Se a família (z_j) é somável, sua soma (não ordenada) *é*

  $$\sum z_j = \sum Re(z_j) + i \sum Im(z_j).$$

- *Uma família (z_j), de números reais ou complexos, é uma família* absolutamente somável *se a família*

  $$(\,|z_j|\,)_J$$

  é somável. Isto é, se

  $$\sum |z_j| < \infty.$$

Teorema. *Seja (z_j) uma família de números complexos. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) (z_j) *é somável.*

(b) (z_j) *é absolutamente somável.*

Prova.

Consideremos as famílias de números reais

$$\big(\mathrm{Re}(z_j)\big)_J \text{ e } \big(\mathrm{Im}(z_j)\big)_J.$$

Consideremos então as famílias de suas partes positivas, denotadas (p_j) e (P_j), respectivamente, assim como as famílias de suas partes negativas, denotadas (q_j) e (Q_j), também respectivamente.

Para todo j em J temos

$$0 \;\leq\; \max\big\{p_j, q_j, P_j, Q_j\big\} \;\leq\; |z_j| \;\leq\; p_j + q_j + P_j + Q_j.$$

Logo, o valor da soma $\sum |z_j|$ é finito se e somente se os valores das quatro somas

$$\sum p_j,\ \sum q_j,\ \sum P_j \text{ e } \sum Q_j$$

são finitos.

Concluímos então que a família $(|z_j|)$ é somável se e só se (z_j) é somável♣

Corolário. *Seja $(z_j)_J$ somável e $\mathcal{K} \subset J$. Então, a família $(z_k)_{k\in\mathcal{K}}$ é somável.*

Prova.

Pelo teorema imediatamente acima temos $\sum_J |z_j| < \infty$. É fácil ver que

$$\sum_{\mathcal{K}} |z_k| \leq \sum_J |z_j|.$$

Utilizando novamente o teorema imediatamente acima, concluímos que a famíia $(z_k)_{\mathcal{K}}$ é somável♣

Proposição *Sejam* $(z_j)_J$ *e* $(w_j)_J$ *famílias somáveis em* $\mathbb{C}$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Então, as famílias* $(z_j + w_j)_J$ *e* $(\lambda z_j)_J$ *são somáveis e valem as propriedades:*

(a) $\sum (z_j + w_j) \ = \ \sum z_j \ + \ \sum w_j$.

(b) $\sum \lambda z_j \ = \ \lambda \sum z_j$.

Prova.

Devido à equivalência entre somabilidade e somabilidade absoluta, concluímos que as famílias (z_j) e (w_j) são absolutamente somáveis. Temos também $|z_j + w_j| \leq |z_j| + |w_j|$ e $\lambda z_j| \leq |\lambda||z_j|$. Donde segue que as famílias $(z_j + w_j)$ e (λz_j) são absolutamente somáveis e portanto somáveis.

(a) É claro que basta verificamos para o caso em que as famílias são reais. Escrevamos, por motivos psicológicos, $z_j = a_j \in \mathbb{R}$ e $w_j = b_j \in \mathbb{R}$. Escrevamos as partes positiva e negativa de um real arbitrário x por

$$x_+ \text{ e } x_-.$$

Então temos

$$\begin{cases} a_j + b_j & = & (a_j + b_j)_+ - (a_j + b_j)_- \\ a_j + b_j & = & (a_j)_+ - (a_j)_- + (b_j)_+ - (b_j)_-. \end{cases}$$

Logo,

$$(a_j + b_j)_+ - (a_j + b_j)_- = (a_j)_+ - (a_j)_- + (b_j)_+ - (b_j)_-.$$

Donde segue

$$(a_j + b_j)_+ + (a_j)_- + (b_j)_- = (a_j + b_j)_- + (a_j)_+ + (b_j)_+.$$

Todas estas seis parcelas são positivas. Temos então,

$$\sum (a_j + b_j)_+ + \sum (a_j)_- + \sum (b_j)_- = \sum (a_j + b_j)_- + \sum (a_j)_+ + \sum (b_j)_+.$$

Devido às hipóteses, e pelo já inicialmente observado, estas seis somas são finitas (e aqui dadas por números reais). Segue então a identidade

$$\sum (a_j + b_j)_+ - \sum (a_j + b_j)_- = \left[\sum (a_j)_+ - \sum (a_j)_-\right] + \left[\sum (b_j)_+ - \sum (b_j)_-\right].$$

Isto é, por definição,

$$\sum (a_j + b_j) = \sum a_j + \sum b_j.$$

(c) Devido à definição de soma para uma família complexa, basta verificarmos o caso em que λ e (z_j) são reais. [Notemos que escrevendo $\lambda = \alpha + i\beta$, com α e β reais, e $z_j = x_j + iy_j$, com x_j e y_j reais, temos $\lambda z_j = (\alpha x_j - \beta y_j) + i(\alpha y_j + \beta x_j)$.] Analisemos então o caso λ real e $z_j = a_j$ real, para todo j. Escrevamos

$$\begin{cases} \lambda & = \lambda_+ - \lambda_- \\ a_j & = p_j - q_j \\ \lambda a_j & = (\lambda a_j)_+ - (\lambda a_j)_- \\ \lambda a_j & = (\lambda_+ - \lambda_-)(p_j - q_j). \end{cases}$$

Pela terceira e pela quarta identidade destacadas acima encontramos

$$(\lambda a_j)_+ - (\lambda a_j)_- = \lambda_+ p_j + \lambda_- q_j - \lambda_+ q_j - \lambda_- p_j,$$

donde segue

$$(\lambda a_j)_+ + \lambda_+ q_j + \lambda_- p_j = (\lambda a_j)_- + \lambda_+ p_j + \lambda_- q_j.$$

Todas estas seis parcelas são positivas. Temos então,

$$\sum (\lambda a_j)_+ + \sum \lambda_+ q_j + \sum \lambda_- p_j = \sum (\lambda a_j)_- + \sum \lambda_+ p_j + \sum \lambda_- q_j.$$

Devido às hipóteses, e pelo já inicialmente observado, estas seis somas são finitas (e aqui dadas por números reais). Segue então a identidade

$$\sum (\lambda a_j)_+ - \sum (\lambda a_j)_- = \sum \lambda_+ p_j + \sum \lambda_- q_j - \sum \lambda_+ q_j - \sum \lambda_- p_j.$$

Então, por definição e pelas propriedades para famílias de positivos temos

$$\begin{aligned} \sum \lambda a_j &= \lambda_+ \sum p_j + \lambda_- \sum q_j - \lambda_+ \sum q_j - \lambda_- \sum p_j \\ &= \lambda_+ \left[\sum p_j - \sum q_j\right] - \lambda_- \left[\sum p_j - \sum q_j\right] \\ &= (\lambda_+ - \lambda_-)\left[\sum p_j - \sum q_j\right] \\ &= \lambda \sum a_j \ \clubsuit \end{aligned}$$

Teorema (Propriedade Comutativa). *Seja $(z_j)_J$ uma família somável arbitrária de números complexos e $\sigma : \mathcal{K} \to J$ uma bijeção. Então,*

$$\sum_J z_j = \sum_{k \in \mathcal{K}} z_{\sigma(k)}.$$

Prova. Exercício.

Teorema (Lei Associativa para Somas Não Ordenadas). *Seja* $(z_j)_J$ *uma família somável em* $\mathbb{C}$. *Suponha* J *uma união de conjuntos* J_k, *com* k *em* $\mathcal{K}$, *dois a dois disjuntos. Então, a família* $(z_j)_{j\in J_k}$ *é somável, para todo* k *em* $\mathcal{K}$, *e*

$$\sum_J z_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{J_k} z_j.$$

Prova.

Devido à definição de somável para famílias complexas e à linearidade da soma, podemos supor (z_j) somável e contida em $[0,\infty)$. Pela associatividade para somas de números positivos (já vista), segue a tese♣

4.2 - Equivalência das Definições de Somabilidade

Com o teorema abaixo (neste texto chamado teorema de equivalência) mostramos diretamente (sem utilizar a teoria de somabilidade em espaços vetoriais normados e completos abstratos) que em $\mathbb{C}$ são equivalentes a definição de família somável apresentada neste texto e a usual definição enunciada no item (b) do teorema que segue.

Teorema (Equivalência). *Dada uma família* $(a_j)_J$, *são equivalentes as propriedades abaixo.*

(a) *A família* $(a_j)_J$ *é somável.*

(b) *Existe* $\alpha\in\mathbb{C}$ *tal que* $\forall\epsilon>0$, *existe um conjunto finito* $F_\epsilon\subset J$ *tal que*

$$\left|\sum_{j\in F} a_j - \alpha\right| < \epsilon\,,$$

qualquer que seja o conjunto finito F *tal que* $F_\epsilon\subset F\subset J$.

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) Por hipótese, as famílias $\big(\mathrm{Re}(a_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(a_j)\big)_J$ são somáveis. Donde, escrevendo $\alpha=\mathrm{Re}(\alpha)+i\mathrm{Im}(\alpha)$ e utilizando as desigualdades

$$|\mathrm{Re}(z)|\le|z|,\quad |\mathrm{Im}(z)|\le|z| \ \text{ e } \ |z|\le|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|,$$

podemos supor (a_j) e α em $\mathbb{R}$. Então, as famílias $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$, das partes positivas e negativas de $(a_j)_J$, respectivamente, são somáveis e temos

$$\sum p_j \ = \ P \ = \ \sup\left\{\sum_F p_j : \ F \text{ é finito e contido em } J\right\} \ < \ \infty.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe, por definição de sup, F_ϵ finito contido em J tal que

$$P - \epsilon \ < \ \sum_{F_\epsilon} p_j \ \leq \ P.$$

Então, se F é finito e tal que $F_\epsilon \subset F \subset J$, temos

$$P - \epsilon < \sum_{F_\epsilon} p_j \leq \sum_F p_j \leq P$$

e portanto

$$P - \epsilon \ \leq \ \sum_F p_j \ \leq \ P$$

Analogamente existe $Q \in \mathbb{R}$ e G_ϵ finito tal que, se G é finito e $G_\epsilon \subset G \subset J$,

$$Q - \epsilon \ \leq \ \sum_G q_j \ \leq \ Q.$$

Consideremos $H_\epsilon = F_\epsilon \cup G_\epsilon$. Para H finito tal que $H_\epsilon \subset H \subset J$ segue

$$P - \epsilon \ \leq \ \sum_H p_j \ \leq \ P \quad \text{e} \quad Q - \epsilon \ \leq \ \sum_H q_j \ \leq \ Q.$$

Portanto

$$P - \epsilon - Q \ \leq \ \sum_H p_j \ - \ \sum_H q_j \ \leq \ P - Q + \epsilon,$$

o que implica

$$-\epsilon \ \leq \ \sum_H (p_j - q_j) - (P - Q) \ \leq \ \epsilon.$$

Finalmente, pondo $\alpha = P - Q$ e recordando a identidade $a_j = p_j - q_j$,

$$\left|\sum_H a_j - \alpha\right| \ \leq \ \epsilon,$$

para todo conjunto H finito tal que $H_\epsilon \subset H \subset J$. Isto encerra este caso.

(b) $\Rightarrow$(a) Analogamente ao caso "(a)$\Rightarrow$(b)", podemos supor (a_j) e α em $\mathbb{R}$.

Dado $\epsilon = 1$ existe F finito (que fixamos) em J tal que

$$\left|\sum_{j\in G} a_j - \alpha\right| < 1, \quad \text{para todo } G \text{ finito tal que } F \subset G \subset J.$$

Seja H finito e arbitrário, com $H \subset J$. Seja $H' = \{j \in H : a_j = p_j \geq 0\}$.

Então, da desigualdade

$$\sum_{H'\cap F} a_j \leq \sum_F p_j$$

segue facilmente

$$\begin{aligned}\sum_H p_j &= \sum_{H'} a_j = \sum_{H'\cap F} a_j + \sum_{H'\setminus F} a_j \\ &\leq \sum_F p_j + \sum_{F\cup(H'\setminus F)} a_j - \alpha + \alpha - \sum_F a_j.\end{aligned}$$

Assim, como p_j é positivo para todo j, pela desigualdade triangular segue

$$\sum_H p_j \leq \sum_F p_j + \left|\sum_{F\cup(H'\setminus F)} a_j - \alpha\right| + \left|\alpha - \sum_F a_j\right| \leq \sum_F p_j + 1 + 1.$$

Sendo F fixo, $\sum_F p_j$ é um real fixo. Logo, da definição de supremo segue

$$\sum_J p_j \leq 2 + \sum_F p_j < \infty.$$

Ainda, como $(-a_j)_J$ também satisfaz (b), também temos

$$\sum_J q_j < \infty \quad (\text{com } q_j \text{ a parte negativa de } a_j).$$

Logo, por definição, $(a_j)_J$ é somável ♣

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, Tom M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Beardon, A. F. *Limits, A New Approach to Real Analysis*, Springer, 1997.
3. Boulos, Paulo. *Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries de Números e de Funções*, E. Edgard Blücher, 1986.
4. Bressoud, D. *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2007.
5. Gouvêa, Fernando Q. *Séries Infinitas*, Apostila, Escola Politécnica da USP e Instituto de Matemática da USP, 1983.
6. Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo*, vol 1, 5ª ed., LTC Editora, 2001.
7. Hairer, E. and Wanner, G. *Analysis by Its History*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer 2000.
8. Jahnke, H. N. (editor), *A History of Analysis*, History of Mathematics, Vol 24, AMS, 2003.
9. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
10. de Oliveira, Oswaldo R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv (2012). Available at `http://arXiv.org/abs/1207.1472`.
11. Shilov, G. E. *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover Publications, INC, 1996.
12. Spivak, M. *Calculus*, Editorial Reverté, 1978.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`