Ano 2015-2022

SÉRIES - SOMABILIDADE - OPERAÇÕES COM SÉRIES DE POTÊNCIAS

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Sumário

Capítulo 1

Séries e Somabilidade

1.1 Séries

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e uma sequência (a_n), real ou complexa.

A série de termo geral a_n [ou série gerada pela sequência (a_n)] é o par ordenado

$$\big((a_n),(s_n)\big),$$

com (s_n) a sequência das somas parciais de (a_n) e

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n$$

a soma parcial de ordem n da série. [Notemos que explicitamos como somar os termos de (a_n). Agradeço ao prof. Jorge Aragona por tal esclarecimento.]

Tal série é dita convergente se (s_n) converge em $\mathbb{K}$ e, neste caso, $s = \lim s_n$ é a soma da série indicada por

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

A série é dita divergente se (s_n) é divergente.

Abusando da notação, denotamos uma série arbitrária $\big((a_n),(s_n)\big)$ por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty.$$

Se a série é de números reais e $\lim s_n = \pm\infty$, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \pm\infty.$$

Ainda, dado p em $\mathbb{N}$, definimos a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ como

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n, \text{ onde } b_n = 0, \text{ se } n < p, \text{ e } b_n = a_n \text{ se } n \geq p.$$

Para investigar a convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ podemos ignorar qualquer quantidade finita de seus termos pois temos

$$s_n = s_p + \sum_{m=p+1}^{n} a_m, \text{ para todo } n > p,$$

e é claro que existe $\lim s_n$ se e só se existe

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=p+1}^{m=n} a_m.$$

Isto é, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e só se a série $\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$ converge. Se uma destas converge, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n.$$

Uma série complexa $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge se e somente se suas partes real e imaginária, dadas pelas séries reais,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n),$$

convergem e então segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

1.1 Proposição. *Suponhamos $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e somente se a sequência das somas parciais $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ é limitada.*

Prova.

Trivial, devido à propriedade do supremo♣

Definição. *A série complexa* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é*

- absolutamente convergente *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty$.
- condicionalmente convergente *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é convergente e* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

No Teorema 1.12 (a) veremos que as séries absolutamente convergentes convergem. Um exemplo clássico de série condicionalmente convergente é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(série harmônica alternada).}$$

1.2 Proposição (Critério da Comparação). *Sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *séries complexas, tais que*

$$|a_n| \leq c|b_n|, \text{ para algum } c > 0 \text{ e para todo } n > n_0 \text{ (para algum } n_0 \text{ fixo),}$$

e também $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < \infty$. *Então,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty.$$

Prova. Trivial♣

1.2 Somas Não Ordenadas em $\mathbb{C}$

A Definição 1.5 de famílias somáveis [em $\mathbb{K}$] a seguir, equivale à usual. De fato, decorre da definição clássica de somabilidade que uma família $(v_j)_J$ em um espaço vetorial de dimensão finita normado e completo $(V, \|\cdot\|)$ [i.e., um espaço em que as sequências de Cauchy convergem] é somável se e só se ela é absolutamente somável [i.e., $\sum_J \|v_j\| < \infty$]. Com a definição aqui adotada, tal equivalência se mantém. Vide 1.5 - Apêndice.

Seja X um conjunto arbitrário e J um conjunto de índices arbitrário. Uma família em X, indexada em J, é uma função $x : J \to X$. Indicamos a família x por

$$(x_j)_{j \in J} \text{ ou } (x_j)_J \text{ ou, brevemente, } (x_j).$$

Dada uma família (p_j) contida em $[0, +\infty]$, definimos

$$\sum_{j \in J} p_j = \sup \left\{ \sum_{j \in F} p_j : F \text{ é subconjunto finito de } J \right\} \text{ em } [0, +\infty].$$

Tal sup é finito se e somente se existe um real $M \geq 0$ tal que

$$\sum_{j \in F} p_j \leq M, \text{ para todo subconjunto finito } F \text{ contido em } J.$$

Também escrevemos $\sum_J p_j$ para $\sum_{j \in J} p_j$, ou ainda, $\sum p_j$ se J é subentendido.

1.3 Proposição. *Sejam $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$ duas famílias em $[0, +\infty]$. Então,*

(a) $\sum (p_j + q_j) = \sum p_j + \sum q_j$.

(b) $\sum \lambda p_j = \lambda \sum p_j$*, para todo λ em $[0, +\infty)$.*

(c) (Propriedade Comutativa) *Se $\sigma : \mathcal{K} \to J$ é uma bijeção, então*

$$\sum_J p_j = \sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)}.$$

Prova. [Devido a (a) e (b), dizemos que as famílias positivas formam um "cone".]

(a) Mostremos duas desigualdades.

($\leq$) Seja F um subconjunto finito e arbitrário de J. Temos então

$$\sum_F (p_j + q_j) = \sum_F p_j + \sum_F q_j \leq \sum p_j + \sum q_j.$$

Pela arbitrariedade do subconjunto F e pela definição de $\sum (p_j + q_j)$ chegamos a

$$\sum (p_j + q_j) \leq \sum p_j + \sum q_j.$$

($\geq$) Sejam F e G dois subconjuntos finitos e arbitrários de J. Temos então

$$\begin{aligned}
\sum_F p_j + \sum_G q_j &\leq \sum_{F\cup G} p_j + \sum_{F\cup G} q_j \\
&= \sum_{F\cup G} (p_j + q_j) \\
&\leq \sum (p_j + q_j).
\end{aligned}$$

A seguir, fixando o subconjunto G e variando F sobre todos os subconjuntos finitos de J, pela definição de $\sum p_j$ encontramos a desigualdade

$$\sum p_j + \sum_G q_j \leq \sum (p_j + q_j).$$

Por fim, variando G sobre todos os subconjuntos finitos de J, pela definição de $\sum q_j$ encontramos a desigualdade

$$\sum p_j + \sum q_j \leq \sum (p_j + q_j).$$

Escrevendo de outra forma temos

$$\sum (p_j + q_j) \geq \sum p_j + \sum q_j.$$

(b) Temos

$$\begin{aligned}
\sum \lambda p_j &= \sup\left\{\sum_F \lambda p_j : F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \\
&= \sup\left\{\lambda \sum_F p_j : F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \\
&= \lambda \sup\left\{\sum_F p_j : F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \\
&= \lambda \sum p_j.
\end{aligned}$$

(c) São iguais os conjuntos sobre os quais computamos $\sum_J p_j$ e $\sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)}$ ♣

Dada uma família $(p_j)_J$ em $[0, +\infty]$, se $\sum_J p_j$ é finito (um número real), dizemos que $(p_j)_J$ é uma família somável e que sua soma é o número

$$\sum_J p_j.$$

Escrevemos $\sum_J p_j < \infty$, indicando que $(p_j)_J$ é (família) somável.

1.4 Teorema (Associatividade). *Seja* $(p_j)_J$ *uma família em* $[0,+\infty]$ *e* J *uma reunião de conjuntos* J_k*, com* k *em* $\mathcal{K}$*, dois a dois disjuntos. Então,*

$$\sum_J p_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j .$$

Prova. Mostremos duas desigualdades.

- ⋄ Dado F finito e contido em J, por hipótese existem índices distintos $k_1,\ldots,k_l$, todos em $\mathcal{K}$, tal que $F \subset J_{k_1} \cup \cdots \cup J_{k_l}$. Donde segue

$$\sum_F p_j = \sum_{F\cap J_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F\cap J_{k_l}} p_j \ \le\ \sum_{J_{k_1}} p_j + \ \cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \ \le\ \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j$$

  e então, pela definição de $\sum_J p_j$,

$$\sum_J p_j \ \le\ \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j .$$

- ⋄ Dados índices distintos $k_1,\ldots,k_l$ em $\mathcal{K}$ e conjuntos finitos F_{k_r}, com $F_{k_r} \subset J_{k_r}$ se $1 \le r \le l$, os conjuntos $J_{k_1},\ldots,J_{k_l}$ são dois a dois disjuntos e portanto os conjuntos $F_{k_1},\ldots,F_{k_l}$ também. Sendo assim, temos

$$\sum_{F_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \ \le\ \sum_J p_j \ .$$

  Então, fixando os conjuntos $F_{k_2},\ldots,F_{k_l}$ e computando o supremo sobre a família dos conjuntos finitos F_{k_1} contidos em J_{k_1} obtemos a desigualdade

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{F_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \le \sum_J p_j .$$

  Argumentando analogamente $(l-1)$-vezes obtemos

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{J_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \ \le\ \sum_J p_j .$$

  Por fim, como $\{k_1,k_2,\ldots,k_l\}$ é qualquer subconjunto finito de $\mathcal{K}$ concluímos

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j \ \le\ \sum_J p_j \ \clubsuit$$

Seja $x \in \mathbb{R}$. Suas partes positiva e negativa são, respectivamente,

$$p = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0 \\ 0\,, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad q = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Temos,

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq |x| \\ 0 \leq q \leq |x| \end{cases}, \quad \begin{cases} x = p - q \\ |x| = p + q \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p = \frac{|x|+x}{2} \\ q = \frac{|x|-x}{2}. \end{cases}$$

É também usual escrever as partes positiva e negativa de x por x_+ e x_-, respectivamente. Assim,

$$x_+ = p \ \text{ e } \ x_- = q.$$

1.5 Definição. *Seja J um conjunto de índices.*

- *Uma família (x_j) de números reais é* somável *se as famílias (p_j) e (q_j) das partes positivas e negativas de x_j, com j em J, respectivamente, são somáveis. Se (x_j) é somável, sua* soma (não ordenada) *é*

$$\sum x_j = \sum p_j - \sum q_j.$$

- *Uma família (z_j) de números complexos é* somável *se as famílias $\big(Re(z_j)\big)_J$ e $\big(Im(z_j)\big)_J$, das partes reais e imaginárias de z_j, com j em J, respectivamente, são somáveis. Se (z_j) é somável, sua* soma (não ordenada) *é*

$$\sum z_j = \sum Re(z_j) + i \sum Im(z_j).$$

- *Uma família (z_j), de números reais ou complexos, é uma família* absolutamente somável *se a família $(|z_j|)_J$ é somável. Isto é, se*

$$\sum |z_j| < \infty\ .$$

1.6 Teorema. *Seja* (z_j) *uma família de números complexos. São equivalentes:*

(a) (z_j) *é somável.*

(b) (z_j) *é absolutamente somável.*

Prova.

Consideremos as famílias de números reais $\big(\mathrm{Re}(z_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(z_j)\big)_J$ e as famílias de suas partes positivas, denotadas (p_j) e (P_j), respectivamente, e de suas partes negativas, denotadas (q_j) e (Q_j), também respectivamente.

Para todo j em J temos

$$(1.6.1) \quad 0 \le \min\{p_j, q_j, P_j, Q_j\} \le \max\big\{p_j, q_j, P_j, Q_j\big\} \le |z_j| \le p_j + q_j + P_j + Q_j\ .$$

Logo,

$$\sum |z_j| \text{ é finita se e somente se } \sum p_j, \sum q_j, \sum P_j \text{ e } \sum Q_j \text{ são finitas.}$$

Donde concluímos que a família $(|z_j|)$ é somável se e só se (z_j) é somável♣

1.7 Corolário. *Seja* $(z_j)_J$ *somável e* $\mathcal{K} \subset J$*. Então, a sub-família* $(z_k)_{k\in\mathcal{K}}$ *é somável.*

Prova.

Pelo teorema (1.6) temos $\sum_J |z_j| < \infty$. É fácil ver que

$$\sum_{\mathcal{K}} |z_k| \le \sum_J |z_j|.$$

Utilizando novamente o teorema 1.6, concluímos que $(z_k)_{\mathcal{K}}$ é somável♣

1.8 Corolário. *Seja* $(z_j)_J$ *somável. Então, o conjunto* $J^* = \{j \in J : z_j \neq 0\}$ *é enumerável.*

Prova.

Pelo Teorema 1.6, somabilidade implica somabilidade absoluta e então a soma $\sum |z_j|$ é finita. Consequentemente, fixado um natural n arbitrário temos que o subconjunto de índices

$$F_n = \left\{ j \in J : |z_j| \ge \frac{1}{n} \right\}$$

é finito (se não, temos $\sum |z_j| = +\infty$). A tese é então óbvia (pois $J^* = \bigcup F_n$)♣

1.9 Proposição (Linearidade). *Sejam $(z_j)_J$ e $(w_j)_J$ famílias somáveis em $\mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, as famílias $(z_j + w_j)_J$ e $(\lambda z_j)_J$ são somáveis e valem as propriedades:*

(a) $\sum(z_j + w_j) = \sum z_j \ + \ \sum w_j$.

(b) $\sum \lambda z_j = \lambda \sum z_j$.

Prova.

Devido à equivalência entre somabilidade e somabilidade absoluta, concluímos que as famílias (z_j) e (w_j) são absolutamente somáveis. Temos também $|z_j + w_j| \leq |z_j| + |w_j|$ e $|\lambda z_j| \leq |\lambda||z_j|$. Donde segue que as famílias $(z_j + w_j)$ e (λz_j) são absolutamente somáveis e portanto somáveis.

(a) É claro que basta verificamos para o caso em que as famílias são reais. Escrevamos então $z_j = a_j \in \mathbb{R}$ e $w_j = b_j \in \mathbb{R}$. Escrevamos as partes positiva e negativa de um real arbitrário x por

$$x_+ \text{ e } x_-.$$

Então temos

$$\begin{cases} a_j + b_j &= (a_j + b_j)_+ - (a_j + b_j)_- \\ a_j + b_j &= (a_j)_+ - (a_j)_- + (b_j)_+ - (b_j)_-. \end{cases}$$

Logo,

$$(a_j + b_j)_+ - (a_j + b_j)_- = (a_j)_+ - (a_j)_- + (b_j)_+ - (b_j)_-.$$

Donde segue

$$(a_j + b_j)_+ + (a_j)_- + (b_j)_- = (a_j + b_j)_- + (a_j)_+ + (b_j)_+.$$

Todas estas seis parcelas são positivas. Temos então (vide Proposição 1.3),

$$\sum(a_j + b_j)_+ + \sum(a_j)_- + \sum(b_j)_- = \sum(a_j + b_j)_- + \sum(a_j)_+ + \sum(b_j)_+.$$

Devido às hipóteses, e pelo já inicialmente observado, estas seis somas são finitas (e aqui dadas por números reais). Segue então a identidade

$$\sum(a_j + b_j)_+ - \sum(a_j + b_j)_- = \left[\sum(a_j)_+ - \sum(a_j)_-\right] + \left[\sum(b_j)_+ - \sum(b_j)_-\right].$$

Isto é, por definição,

$$\sum(a_j + b_j) = \sum a_j + \sum b_j.$$

(b) Devido à definição de soma para uma família complexa, basta verificarmos o caso em que λ e (z_j) são reais. [Notemos que escrevendo $\lambda = \alpha + i\beta$, com α e β reais, e $z_j = x_j + iy_j$, com x_j e y_j reais, temos $\lambda z_j = (\alpha x_j - \beta y_j) + i(\alpha y_j + \beta x_j)$.] Analisemos então o caso λ real e $z_j = a_j$ real, para todo j. Escrevamos

$$\begin{cases} \lambda &= \lambda_+ - \lambda_- \\ a_j &= p_j - q_j \\ \lambda a_j &= (\lambda a_j)_+ - (\lambda a_j)_- \\ \lambda a_j &= (\lambda_+ - \lambda_-)(p_j - q_j). \end{cases}$$

Pela terceira e pela quarta identidade destacadas acima encontramos

$$(\lambda a_j)_+ - (\lambda a_j)_- = \lambda_+ p_j + \lambda_- q_j - \lambda_+ q_j - \lambda_- p_j,$$

donde segue

$$(\lambda a_j)_+ + \lambda_+ q_j + \lambda_- p_j = (\lambda a_j)_- + \lambda_+ p_j + \lambda_- q_j.$$

Todas estas seis parcelas são positivas. Temos então (vide Proposição 1.3),

$$\sum (\lambda a_j)_+ + \sum \lambda_+ q_j + \sum \lambda_- p_j = \sum (\lambda a_j)_- + \sum \lambda_+ p_j + \sum \lambda_- q_j.$$

Devido às hipóteses, e pelo já inicialmente observado, estas seis somas são finitas (e aqui dadas por números reais). Segue então a identidade

$$\sum (\lambda a_j)_+ - \sum (\lambda a_j)_- = \sum \lambda_+ p_j + \sum \lambda_- q_j - \sum \lambda_+ q_j - \sum \lambda_- p_j.$$

Então, por definição e pelas propriedades para famílias de positivos temos

$$\begin{aligned} \sum \lambda a_j &= \lambda_+ \sum p_j + \lambda_- \sum q_j - \lambda_+ \sum q_j - \lambda_- \sum p_j \\ &= \lambda_+ \left[\sum p_j - \sum q_j\right] - \lambda_- \left[\sum p_j - \sum q_j\right] \\ &= (\lambda_+ - \lambda_-) \left[\sum p_j - \sum q_j\right] \\ &= \lambda \sum a_j \clubsuit \end{aligned}$$

1.10 Teorema (Propriedade Comutativa). *Seja $(z_j)_J$ uma família somável arbitrária de números complexos e $\sigma : \mathcal{K} \to J$ uma bijeção. Então,*

$$\sum_J z_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} z_{\sigma(k)}.$$

Prova.

Devido à definição de somável para famílias complexas e à linearidade da soma, podemos supor (z_j) somável e tal que

$$(z_j)_J \subset [0,\infty).$$

Pela comutatividade para somas de famílias positivas, concluímos a prova deste teorema♣

1.11 Teorema (Lei Associativa para Somas Não Ordenadas). *Seja $(z_j)_J$ uma família somável em $\mathbb{C}$. Suponha J uma união de conjuntos J_k, com k em $\mathcal{K}$, dois a dois disjuntos. Então, a família $(z_j)_{j\in J_k}$ é somável, para todo k em $\mathcal{K}$, e*

$$\sum_J z_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{J_k} z_j.$$

Prova.

Devido à definição de somável para famílias complexas e à linearidade da soma, podemos supor (z_j) somável e tal que

$$(z_j)_J \subset [0,\infty).$$

Pela associatividade para somas de famílias positivas (Teorema 1.4), concluímos a prova deste teorema♣

1.12 Proposição. *Sejam* $(z_j)_J$ *e* $(w_k)_K$ *famílias somáveis em* $\mathbb{C}$. *Então, as famílias*

$$(\overline{z_j}) \quad e \quad (z_j w_k)_{J\times K}$$

são somáveis e valem as propriedades

(a) $\overline{\sum z_j} = \sum \overline{z_j}$.

(b) $\sum\limits_{J\times K} z_j w_k = (\sum z_j)(\sum w_k)$.

(c) $|\sum z_j| \leq \sum |z_j|$.

Prova.

(a) Pela definição da soma da família (z_j) e por linearidade, segue

$$\overline{\sum z_j} = \sum \mathrm{Re}(z_j) - i \sum \mathrm{Im}(z_j) = \sum[\mathrm{Re}(z_j) - i\mathrm{Im}(z_j)] = \sum \overline{z_j}.$$

(b) Temos $\sum_{J\times K} |z_j|\,|w_k| \leq \left(\sum |z_j|\right)\left(\sum |w_k|\right)$. Logo, a família $(z_j w_k)_{J\times K}$ é somável. Pela propriedade associativa (1.11) segue

$$\sum_{J\times K} z_j w_k = \sum_{j\in J}\sum_{K} z_j w_k = \sum_{j\in J}\left(z_j \sum_K w_k\right) = \left(\sum_K w_k\right)\left(\sum_J z_j\right).$$

(c) Temos

$$\left|\sum z_j\right|^2 = \left(\sum_{j\in J} z_j\right)\left(\overline{\sum_{k\in J} z_k}\right) = \left(\sum z_j\right)\left(\sum \overline{z_k}\right)$$
$$= \sum_{J\times J} z_j \overline{z_k}.$$

Logo, $\sum_{J\times J}(z_j\overline{z_k})$ é um número real e a parte imaginária desta soma é nula. Logo, $\sum_{J\times J}\mathrm{Im}(z_j\overline{z_k}) = 0$. Donde segue

$$\left|\sum z_j\right|^2 = \sum_{J\times J}\mathrm{Re}[z_j\overline{z_k}] \leq \sum_{J\times J}|\mathrm{Re}[z_j\overline{z_k}]|$$
$$\leq \sum_{J\times J}|z_j|\,|z_k| = \left(\sum |z_j|\right)\left(\sum |z_k|\right)$$
$$= \left(\sum |z_j|\right)^2 \clubsuit$$

1.3 Séries versus Somabilidade. Séries Comutativamente Convergentes.

1.13 Teorema. *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *uma série complexa. São equivalentes,*

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) A família $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é somável.*

Ocorrendo (a) ou (b), segue que a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum z_n.$$

Prova.

Decompondo z_n em suas partes real e imaginária e estas em suas partes positiva e negativa concluímos que, graças às desigualdades (1.6.1), à definição de família somável complexa (e de sua soma) e às propriedades de linearidade das séries (absolutamente) convergentes, podemos supor $z_n = p_n$ em $[0, +\infty)$.

Seja (s_n) a sequência das somas parciais de $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$. Fixemos n em $\mathbb{N}$ e um subconjunto finito $F \subset \mathbb{N}$, ambos quaisquer. Seja $\max(F)$ o máximo de F. Temos,

$$s_n = \sum_{\{1,\ldots,n\}} p_j \leq \sum_{\mathbb{N}} p_n \quad \text{e} \quad \sum_F p_j \leq s_{\max F} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} p_n.$$

Donde segue

$$\sum_{j=1}^{+\infty} p_n \leq \sum p_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \clubsuit$$

Definição. *Uma série complexa* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é* comutativamente convergente *se para toda* permutação *(ou, bijeção)* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_{\sigma(n)}$$

é convergente. Esta última série é um rearranjo *da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.

1.14 Teorema. *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *uma série real. São equivalentes:*

(a) A série dada é absolutamente convergente.

(b) A série é comutativamente convergente [e a soma independe do rearranjo].

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) Segue do Teorema 1.13 e da propriedade comutativa para a família então somável (x_n).

(b) $\Rightarrow$(a). Por contradição.

Suponhamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge comutativamente e $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| = +\infty$. Sejam p_n e q_n as partes positiva e negativa de x_n, para todo n. Então,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(p_n - q_n) \text{ é finita e } \sum_{n=0}^{+\infty}(p_n + q_n) = +\infty.$$

Segue então (trivialmente) que ambas, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n$, divergem.

A seguir, reordenamos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ da seguinte forma.

- Na etapa 0, coletamos os primeiros termos $x_n \geq 0$, com soma > 1.
- Na etapa 1, coletamos os primeiros termos estritamente negativos cuja soma com os já coletados é < 0.
- Na etapa 2, subtraídos de $\mathbb{N}$ os índices já selecionados, coletamos os próximos termos $x_n \geq 0$ cuja soma com os já coletados é > 1.
- Iterando, o rearranjo obtido é tal que a sequência (S_n) de suas somas parciais satisfaz $S_{2n} > 1$ e $S_{2n+1} < 0$, para todo n. Logo, (S_n) diverge♣

1.4 Tabelas Comparativas: Séries versus Somabilidade.

No que segue apresentamos primeiro uma tabela destacando as pricipais propriedades assim como as principais diferenças relativas às

- séries condicionalmente convergentes,
- série absolutamente convergentes e
- somas não ordenadas finitas.

Ressaltemos que a associatividade para uma série convergente (isto é, série condicionalmente convergente ou série absolutamente convergentes) permite a inserção de parenteses a um subconjunto de elementos consecutivos dos termos da série (ordenada) em questão. Assim, nos é permitido inserir uma quantidade finita de parenteses a uma série (uma soma ordenada) convergente e também nos é permitido inserir uma quantidade infinita de parenteses a uma série (uma soma ordenada) convergente. A quantidade de termos dentro de cada um dos parenteses inseridos é portanto finita.

	Comutatividade	Associatividade
Série condicional/e convergente	não	restrita
Série absoluta/e convergente	sim	restrita
Soma não ordenada finita	sim	total

A seguir, apresentamos uma segunda tabela comparando propriedades das Séries Convergentes com as das Somas Finitas (isto é, o valor da soma é finito enquanto que a quantidade de termos da soma é arbitrária)

	Séries convergentes	Somas finitas (para famílias arbitrárias)
quantidade de termos	enumerável	arbitrária
ordem	ordenada	não ordenada
comutatividade	não (em geral)	sim
associatividade	restrita	total
algoritmo para computar	sim	não

1.5 Apêndice - Equivalência das Definições de Somabilidade

Com o teorema abaixo (neste texto chamado teorema de equivalência) mostramos diretamente (sem utilizar a teoria de somabilidade em espaços vetoriais normados e completos abstratos) que em $\mathbb{C}$ são equivalentes a definição de família somável apresentada neste texto e a usual definição enunciada no item (b) do teorema que segue.

1.15 Teorema (Equivalência). *Dada uma família $(a_j)_J$, são equivalentes as propriedades abaixo.*

(a) A família $(a_j)_J$ é somável.

(b) Existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\forall \epsilon > 0$, existe um conjunto finito $F_\epsilon \subset J$ tal que

$$\left| \sum_{j \in F} a_j - \alpha \right| < \epsilon ,$$

qualquer que seja o conjunto finito F tal que $F_\epsilon \subset F \subset J$.

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) Por hipótese, as famílias $\big(\mathrm{Re}(a_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(a_j)\big)_J$ são somáveis. Donde, escrevendo $\alpha = \mathrm{Re}(\alpha) + i\mathrm{Im}(\alpha)$ e utilizando as desigualdades

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \ \text{ e } \ |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|,$$

podemos supor (a_j) e α em $\mathbb{R}$. Então, as famílias $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$, das partes positivas e negativas de $(a_j)_J$, respectivamente, são somáveis e temos

$$\sum p_j \ = \ P \ = \ \sup\left\{ \sum_F p_j : \ F \text{ é finito e contido em } J \right\} \ < \ \infty.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe, por definição de sup, F_ϵ finito contido em J tal que

$$P - \epsilon \ < \ \sum_{F_\epsilon} p_j \ \leq \ P.$$

Então, se F é finito e tal que $F_\epsilon \subset F \subset J$, temos

$$P - \epsilon < \sum_{F_\epsilon} p_j \leq \sum_F p_j \leq P$$

e portanto

$$P - \epsilon \ \leq \ \sum_F p_j \ \leq \ P$$

Analogamente existe $Q \in \mathbb{R}$ e G_ϵ finito tal que, se G é finito e $G_\epsilon \subset G \subset J$,

$$Q - \epsilon \ \leq \ \sum_G q_j \ \leq \ Q.$$

Consideremos $H_\epsilon = F_\epsilon \cup G_\epsilon$. Para H finito tal que $H_\epsilon \subset H \subset J$ segue

$$P - \epsilon \ \leq \ \sum_H p_j \ \leq \ P \quad \text{e} \quad Q - \epsilon \ \leq \ \sum_H q_j \ \leq \ Q.$$

Portanto

$$P - \epsilon - Q \ \leq \ \sum_H p_j \ - \ \sum_H q_j \ \leq \ P - Q + \epsilon,$$

o que implica

$$-\epsilon \ \leq \ \sum_H (p_j - q_j) - (P - Q) \ \leq \ \epsilon.$$

Finalmente, pondo $\alpha = P - Q$ e recordando a identidade $a_j = p_j - q_j$,

$$\left| \sum_H a_j - \alpha \right| \ \leq \ \epsilon,$$

para todo conjunto H finito tal que $H_\epsilon \subset H \subset J$. Isto encerra este caso.

(b) $\Rightarrow$(a) Analogamente ao caso "(a)$\Rightarrow$(b)", podemos supor (a_j) e α em $\mathbb{R}$.

Dado $\epsilon = 1$ existe F finito (que fixamos) em J tal que

$$\left| \sum_{j \in G} a_j - \alpha \right| < 1, \quad \text{para todo } G \text{ finito tal que } F \subset G \subset J.$$

Seja H finito e arbitrário, com $H \subset J$. Seja $H' = \{ j \in H : a_j = p_j \geq 0 \}$.

Então, da desigualdade

$$\sum_{H' \cap F} a_j \leq \sum_F p_j$$

segue facilmente

$$\sum_H p_j \ = \ \sum_{H'} a_j \ = \ \sum_{H' \cap F} a_j \ + \ \sum_{H' \setminus F} a_j$$

$$\leq \sum_F p_j \; + \sum_{F\cup(H'\setminus F)} a_j \; - \alpha \; + \alpha - \sum_F a_j.$$

Assim, como p_j é positivo para todo j, pela desigualdade triangular segue

$$\sum_H p_j \;\leq\; \sum_F p_j + \left| \sum_{F\cup(H'\setminus F)} a_j \; - \alpha \right| + \left| \alpha - \sum_F a_j \right| \;\leq\; \sum_F p_j \; + \; 1 + \; 1.$$

Sendo F fixo, $\sum_F p_j$ é um real fixo. Logo, da definição de supremo segue

$$\sum_J p_j \;\leq\; 2 \; + \; \sum_F p_j < \infty.$$

Ainda, como $(-a_j)_J$ também satisfaz (b), também temos

$$\sum_J q_j < \infty \quad \text{(com } q_j \text{ a parte negativa de } a_j\text{)}.$$

Logo, por definição, $(a_j)_J$ é somável ♣

Capítulo 2

Operações com Séries de Potências

2.1 Sequências de Funções

Neste capítulo X indica um subconjunto de $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Seja (f_n), com $f_n : X \to \mathbb{K}$, uma sequência de funções e $f : X \to \mathbb{K}$. Dizemos (f_n) converge simplesmente a f se

$$\lim f_n(x) = f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Ainda, (f_n) converge uniformemente a f se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \text{ quaisquer que sejam } n \geq N \text{ e } x \in X.$$

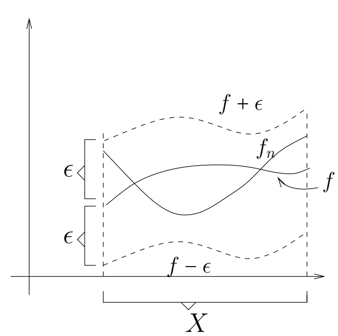

Figura 2.1: Convergência uniforme sobre $X \subset \mathbb{R}$.

Evidentemente, convergência uniforme implica convergência simples.

Consideremos o seguinte exemplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a função contínua

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n\,, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1\,, & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Temos

$$f(x) = \lim f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1\,, & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

A sequência (f_n) é de funções contínuas mas a função f não é contínua.

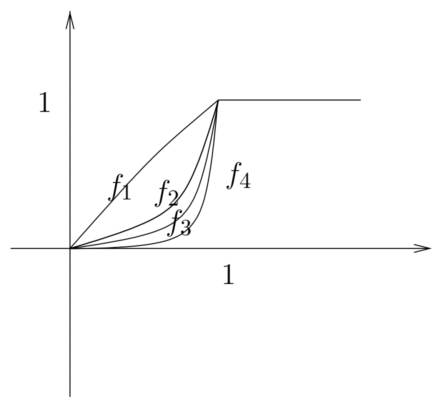

Figura 2.2: Ilustração ao Exemplo acima.

Temos acima um esboço dos gráficos das $f_{n's}$ e de $f(x) = \lim f_n$.

Suponhamos que as sequências de funções (f_n) e (g_n) [definidas em X] convergem uniformemente às funções f e g, e $\lambda \in \mathbb{K}$. Valem as propriedades abaixo.

- $(f_n + g_n)$ e (λf_n) convergem uniformente a $f + g$ e λf, respectivamente.
- Se f e g são limitadas então $(f_n g_n)$ converge uniformemente a fg.

2.1 Teorema. *Seja (f_n) uma sequência de funções, definidas em X, contínuas em x_0 e convergindo uniformemente a $f : X \to \mathbb{K}$. Então, f é contínua em x_0.*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, se $n \geq N$ e $x \in X$. Como f_N é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B(x_0; \delta) \cap X$ então $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$. Consequentemente, dado $x \in B(x_0; \delta) \cap X$, temos as desigualdades

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon \clubsuit$$

2.2 Critério de Cauchy para Sequências de Funções. *A sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{K}$ converge uniformemente a alguma função $f : X \to \mathbb{K}$ se e só se para todo $\epsilon > 0$ existe N em $\mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \text{ para quaisquer } n, m \geq N \text{ e } x \in X.$$

Prova.

($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$ e $x \in X$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ e $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$. Logo,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

($\Leftarrow$) Dado $x \in X$, a sequência $\big(f_n(x)\big)$ é de Cauchy e converge. Seja

$$f(x) = \lim f_n(x).$$

Dado $\epsilon > 0$, seja N tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, para todos $n \geq N$, $m \geq N$, e $x \in X$. Impondo $m \to +\infty$, obtemos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \text{ para todos } n > N \text{ e } x \in X \clubsuit$$

2.2 Séries de Funções

Dada (f_n) uma sequência de funções em X e a valores em $\mathbb{K}$, o símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

denota a série de funções cujas somas parciais são as funções

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n.$$

Esta série de funções converge, em seu domínio X, para uma função $s : X \to \mathbb{K}$ se temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x), \text{ para cada } x \text{ em } X.$$

A função

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x),$$

definida nos pontos em que tal série numérica converge, é a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

A série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente à função $s : X \to \mathbb{K}$ se a sequência (s_n) de suas somas parciais converge uniformemente a $s : X \to \mathbb{K}$.

2.3 Critério de Cauchy para Séries de Funções. *A série de funções* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$*, definidas em* X *e a valores em* $\mathbb{K}$*, converge uniformemente à função*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

se e somente se para todo $\epsilon > 0$ *existir* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \epsilon, \quad \textit{quaisquer que sejam } n \geq N, \, p \in \mathbb{N} \textit{ e } x \in X.$$

Prova.

Segue do critério de Cauchy 2.2 aplicado à sequência de funções $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. Pois é válida a identidade $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| = |s_{n+p}(x) - s_n(x)|$♣

2.4 Teorema (Teste M de Weierstrass). *Sejam*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

uma série de funções, definida em X *e a valores em* $\mathbb{K}$, *e uma sequência numérica de majorantes positivos, ou nulos,* (M_n) *tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < \infty.$$

Suponhamos que temos

$$|f_n(x)| \leq M_n, \text{ para todos } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in X.$$

Então, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente em* X *e à função*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Prova.

Seja x arbitrário em X.

Pelo critério de Cauchy para séries numéricas, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} < \epsilon, \text{ se } n > N \text{ e } p \in \mathbb{N}.$$

A sequência $(s_n) = (f_1 + \cdots + f_n)$ satisfaz

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon, \text{ se } n > m > N.$$

Logo, $(s_n(x))$ converge e impondo $n \to +\infty$ segue

$$|s(x) - s_m(x)| \leq \epsilon, \text{ se } m > N \clubsuit$$

2.3 Derivada Complexa

A derivada complexa é o limite de quocientes de Newton, como no caso real. Nestas notas, Ω é um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dada na variável complexa z. Por vezes, z indica um ponto em Ω.

2.5 Definição. *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é* derivável *(*diferenciável*,* $\mathbb{C}$-derivável*,* $\mathbb{C}$-diferenciável*,* derivável-complexa *ou* diferenciável-complexa*) em $z \in \Omega$ se existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Tal limite, se existir, é a derivada de f em z *e é denotado por $f'(z)$. Se a função f é derivável em todo ponto de Ω, dizemos que f é* holomorfa*.*

Analogamente ao caso real a função $f(z) = z^2$, para $z \in \mathbb{C}$, é derivável em todo ponto e $f'(z) = 2z$. Entretanto a função $g(z) = \overline{z}$, para $z \in \mathbb{C}$, não é derivável em nenhum z_0. No ponto $z = 0$, os quocientes $\frac{\overline{h}}{h}$, com $h \neq 0$, não tendem a um número se $h \to 0$, o que é óbvio escolhendo $h = x \neq 0$ e $h = iy$, $y \neq 0$. Se $z \neq 0$ a explicação é similar.

2.6 Proposição. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivável em $z \in \Omega$. Então, f é contínua em z.*

Prova. Segue de

$$\lim_{w\to z}[f(w) - f(z)] = \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}(w - z) = f'(z)0 = 0 \clubsuit$$

Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deriváveis no ponto z. Similarmente ao caso real, as funções $f + g$, fg, λf [com $\lambda \in \mathbb{C}$] e f/g [com $g(z) \neq 0$] são deriváveis em z e satisfazem

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z), \qquad (\lambda f)'(z) = \lambda f'(z),$$

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad \text{e} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

2.7 Proposição (Regra da Cadeia). *Sejam* $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ *e* $f : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ *com* Ω_1 *e* Ω_2 *abertos em* $\mathbb{C}$. *Se* g *é derivável no ponto* z *e* f *é derivável em* $g(z)$, *então* $f \circ g$ *é derivável em* z *e*

$$(f \circ g)'(z) = f'\big(g(z)\big)g'(z).$$

Prova.

Para w em $\Omega_1 \smallsetminus \{z\}$, seja $N(w)$ o quociente de Newton

$$\frac{f(g(w)) - f(g(z))}{w - z} = \begin{cases} \frac{f(g(w))-f(g(z))}{g(w)-g(z)} \frac{g(w)-g(z)}{w-z}, & \text{se } g(w) - g(z) \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ◇ Se $g'(z) \neq 0$, temos $g(w) - g(z) \neq 0$ para todo w em algum $B(z;r) \smallsetminus \{z\}$, onde $r > 0$. Como g é continua em z, segue que

$$N(w) \to f'(g(z))g'(z) \text{ se } w \to z.$$

- ◇ O caso $g'(z) = 0$. Dada $w_n \to z$, com $g(w_n) - g(z) \neq 0$ para todo n, vimos acima que $N(w_n) \to f'(g(z))g'(z) = 0$. Dada $\zeta_n \to z$, com $g(\zeta_n) - g(z) = 0$ para todo n, é evidente que $N(\zeta_n) = 0 \to 0$. A conclusão é trivial♣

Apesar que não usaremos o resultado abaixo neste texto, é recomendável demonstrá-lo aqui . Identifiquemos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ e este com o espaço das matrizes-colunas $M_{2\times1}(\mathbb{R})$. A transposta de uma matriz A é a matriz A^T. Dados dois números complexos $a + ib$ e $h + ik$, com a, b, h e k números reais, temos

$$(a + ib)(h + ik) \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Seja $z = x + iy$, com x e y em $\mathbb{R}$, a variável complexa. Dada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, escrevemos f em termos de suas partes real e imaginária,

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Consideremos a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (chamado campo vetorial associado a f),

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

2.8 Teorema. *A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é complexa-derivável no ponto $z = x + iy$ se e somente se o campo associado $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é real-diferenciável no ponto $(x, y)^T$ e satisfaz, neste ponto, as* equações de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \ \text{ e } \ u_y = -v_x.$$

Prova.

Sejam $w = h + ik$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\zeta = a + ib$ em $\mathbb{C}$, ambos arbitrários. Temos

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z) - \zeta w}{w} = 0 \iff \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z) - \zeta w}{|w|} = 0.$$

Então, com as identificações já citadas, o teorema segue da identidade

$$\frac{f(z+w) - f(z) - \zeta w}{|w|} \equiv \frac{F\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \ \clubsuit$$

Interpretação para as equações de Cauchy-Riemann. Destaquemos a identidade $-b + ai = i(a + bi)$. Desta forma, na matriz jacobiana de F, o vetor segunda coluna é obtido girando por 90 graus, no sentido anti-horário, o vetor primeira coluna.

2.4 Séries de Potências e Propriedades Operatórias

Dada uma sequência $(a_n) \subset \mathbb{C}$ e um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, a série de funções complexas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \text{ na variável } z \in \mathbb{C},$$

é a série de potências com coeficientes (a_n), centrada em z_0, ou em torno de z_0. Tal série de potências é convergente (divergente) no ponto w se a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (w - z_0)^n$ é convergente (divergente).

Com a translação $w = z - z_0$ passamos da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ para a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n.$$

Desta forma, simplificamos a exposição supondo a série centrada em $z_0 = 0$.

Dadas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ convergentes no ponto z em $\mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{e} \quad \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n.$$

2.9 Teorema (Abel). *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ uma série de potências e*

$$\text{(Fórmula de Hadamard)} \qquad \rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

com $\rho = +\infty$ se $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ e $\rho = 0$ se $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$.

(a) Se $|z| < \rho$ a série converge absolutamente.

(b) Se $|z| > \rho$ a série diverge.

(c) A série converge absolutamente e uniformemente em $D(0;r)$, se $0 < r < \rho$. Ainda mais, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ é contínua em $B(0;\rho)$, se $\rho > 0$.

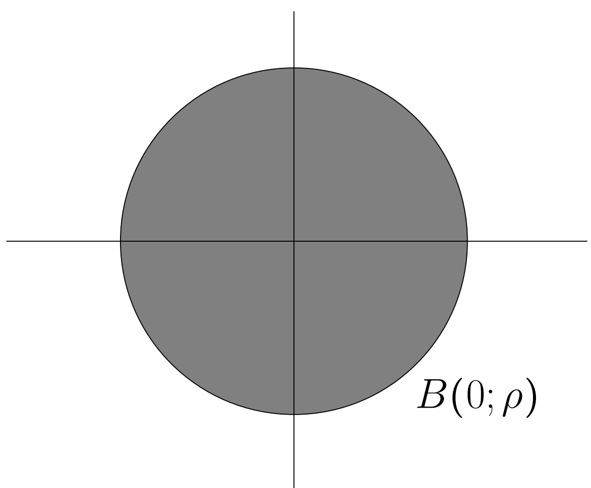

Figura 2.3: O Disco (aberto) de Convergência.

Prova.

(a) e (b). Seguem do teste da raiz e de $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

(c) A primeira afirmação segue de (a) e do Teste-M, pois $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$, se $z \in D(0;r)$, e $\sum |a_n| r^n < \infty$.

A segunda afirmação segue do Teorema 2.1 (o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua)♣

Seja (a_n) em $\mathbb{C}^*$, com

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0, \infty].$$

Se $z \neq 0$ então

$$\lim \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| L.$$

Pelo teste da razão, segue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge (absolutamente) se } |z|L < 1 \text{ e diverge se } |z|L > 1.$$

Pelo teorema de Abel (e sua notação) segue

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{L}.$$

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, o valor

$$\rho \in [0, +\infty] \quad \text{(dado na fórmula de Hadamard)}$$

é seu raio de convergência (da série de potências) e a bola aberta

$$B(0; \rho), \text{ se } \rho > 0,$$

é seu disco (aberto) de convergência.

Se $\rho = 0$, temos o disco degenerado $\{0\}$.

Se $\rho > 0$ e z pertence a $B(0; \rho)$, então a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

converge absolutamente e a sequência $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é somável. É lícito então indicarmos $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ por

$$\sum a_n z^n.$$

Comentário (Um prova da unicidade dos coeficientes de uma série de potências complexa). *Seja $r > 0$ e suponhamos que temos*

$$\sum a_n z^n = 0 \text{ para todo } z \in B(0;r).$$

Mostremos que vale $a_n = 0$ para todo n.

De fato, substituindo $z = 0$ obtemos $a_0 = 0$ e

$$z(a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots) = 0 \text{ para todo } z \in B(0;r) \setminus \{0\}.$$

Logo, por continuidade segue

$$a_1 + a_2 z + a_3 z^2 \cdots = 0 \text{ se } |z| < r \text{ e } a_1 = 0.$$

Então, por indução concluímos que $a_n = 0$ para todo n.

Dessa forma, supondo

$$\sum a_n z^n = \sum b_n z^n, \text{ para todo } z \in B(0;r), \text{ onde } r > 0,$$

obtemos as identidades

$$a_n = b_n \text{ para todo } n.$$

Com uma argumentação análoga, é bastante trivial concluir que também vale a **unicidade dos coeficientes de uma séries de potências real**.

A seguir, mostremos que toda série de potências é desenvolvível como uma série de potências em torno de cada ponto no disco de convergência. Destacamos que tal fato não é óbvio.

2.10 Propriedade da Translação (Teorema de Taylor). *Seja* $f(z) = \sum a_n z^n$, *com raio de convergência* $\rho > 0$. *Dado* $z_0 \in B(0;\rho)$, *existe* $(b_n)_{\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{C}$ *tal que*

$$f(z) = \sum b_n (z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in B(z_0; \rho - |z_0|).$$

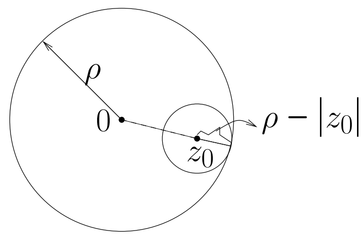

Figura 2.4: Propriedade da Translação.

Prova. Seja z tal que $|z_0| + |z - z_0| < \rho$.

Como a série de potências dada converge absolutamente em $B(0;\rho)$, segue que são iguais e finitos os valores das somas não ordenadas

$$\sum_n |a_n| \big(|z_0| + |z - z_0| \big)^n = \sum_n \sum_{0 \le p \le n} |a_n| \binom{n}{p} |z_0|^{n-p} |z - z_0|^p.$$

Pela associatividade para somas não ordenadas seguem as identidades

$$\sum_n \sum_{0 \le p \le n} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p} (z - z_0)^p = \begin{cases} \sum_n a_n (z_0 + z - z_0)^n = \sum_n a_n z^n = f(z) \\ \\ \sum_{p \ge 0} \left[\sum_{n \ge p} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p} \right] (z - z_0)^p \ \clubsuit \end{cases}$$

2.11 Propriedade do Produto. *Sejam* $\sum a_n z^n$ *e* $\sum b_n z^n$ *convergentes em* $B(0;r)$, *com* $r > 0$. *Então temos*

$$\Big(\sum a_n z^n \Big) \Big(\sum b_n z^n \Big) = \sum c_n z^n, \ \forall z \in B(0;r), \text{ com } c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prova. Seja $z \in B(0;r)$.

É fácil ver que [particione $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times \mathbb{N}$ e use a lei associativa]

$$\sum_{n,m} |a_n z^n b_m z^m| = \Big(\sum_n |a_n z^n| \Big) \Big(\sum_m |b_m z^m| \Big) < \infty.$$

Assim, pela associatividade para somas não ordenadas,

$$\sum_{n,m} a_n z^n b_m z^m = \begin{cases} \Big(\sum_n a_n z^n \Big) \Big(\sum_m b_m z^m \Big) \\ \\ \sum_n \Big(\sum_{j+k=n} a_j b_k \Big) z^n \ \clubsuit \end{cases}$$

2.12 Propriedade da Composição. *Sejam* $g(z) = \sum a_n z^n$ *e* $f(z) = \sum b_m z^m$, *ambas convergentes em* $B(0;R)$, *com* $R > 0$. *Se* $f(0) \in B(0;R)$, *então existem uma sequência complexa* (c_m) *e* $r > 0$ *tais que*

$$g(f(z)) = \sum c_m z^m, \text{ para todo } z \in B(0;r).$$

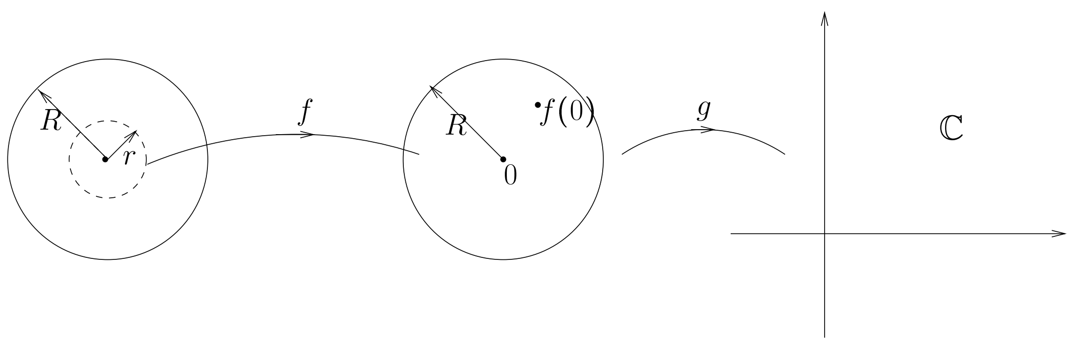

Figura 2.5: Propriedade da composição.

Prova.

Por hipótese, $|b_0| = |f(0)| < R$.

Por continuidade existe $0 < r < R$, tal que $\sum |b_m||z|^m < R$ se $|z| < r$. Dado um tal ponto z, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum |b_m||z|^m\right)^n$$

converge absolutamente.

Segue então que [vide propriedade para o produto (2.11)]

$$\infty > \sum_n |a_n| \Big(\sum_m |b_m||z|^m \Big)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \sum_{m_1\in\mathbb{N},\ldots,m_n\in\mathbb{N}} |b_{m_1}||z|^{m_1} \ldots |b_{m_n}||z|^{m_n}.$$

A associatividade para somas não ordenadas garante

$$\sum_n a_n \sum_{m_1,\ldots,m_n} b_{m_1} z^{m_1} \ldots b_{m_n} z^{m_n} = \begin{cases} \sum\limits_n a_n \Big(\sum\limits_m b_m z^m \Big)^n = g\big(f(z)\big) \\ \\ \sum\limits_m \Big(\sum\limits_n a_n \sum\limits_{m_1+\cdots+m_n=m} b_{m_1} \ldots b_{m_n} \Big) z^m \clubsuit \end{cases}$$

2.13 Propriedade do Inverso Algébrico. *Seja* $f(z)=\sum a_n z^n$, *com* $z\in B(0;r)$ *e* $r>0$, *tal que* $a_0\neq 0$. *Então, existem* $\delta>0$ *e uma sequência complexa* (b_n) *para os quais vale a expansão*

$$\frac{1}{f(z)}=\sum b_n z^n \quad \textit{para todo } z\in B(0;\delta).$$

Prova. Podemos supor $a_0=1$ [cheque].

Então,

$$1-f(z)=\sum_{n\geq 1}(-a_n)z^n \quad \text{e} \quad g(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 0} z^n$$

estão definidas em torno de $z=0$ e $1-f(0)=0$. Pela propriedade de composição, existe um raio $\delta>0$ tal que

$$g(1-f(z))=\frac{1}{1-[1-f(z)]}=\frac{1}{f(z)}$$

é dada por uma série de potências centrada na origem e convergente em $B(0;\delta)$♣

2.14 Teorema (Derivação). *As séries de potências*

$$f(z)=\sum a_n z^n \quad \textit{e} \quad g(z)=\sum n a_n z^{n-1}=\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$$

tem mesmo raio de convergência ρ. *Se* $\rho>0$, *temos*

$$f'(z)=g(z), \ \textit{para todo } z\in B(0;\rho).$$

Prova.

- ⋄ Temos $\sqrt[n]{n}\to 1$ e $\limsup\sqrt[n]{|na_n|}=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$. Logo, $\sum na_nz^n$ e $\sum a_nz^n$ tem mesmo raio de convergência. Ainda, $\sum na_nz^n$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{+\infty} na_nz^{n-1}$ converge. Logo, os raios de convergência das três coincidem.

- ⋄ Suponhamos $\rho>0$. Fixemos $R>0$ e z tais que $|z|<R<\rho$. Seja $h\in\mathbb{C}$ tal que $0<|h|<r=R-|z|$. Para $n\geq 2$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{(z+h)^n-z^n}{h} \ = \ nz^{n-1} \ + \ h\sum\limits_{p=2}^{n}\binom{n}{p}z^{n-p}h^{p-2} \\ \text{e} \\ \left|\frac{(z+h)^n-z^n}{h} \ - \ nz^{n-1}\right| \leq \ \frac{|h|}{r^2}\ \sum\limits_{p=2}^{n}\binom{n}{p}|z|^{n-p}\,r^p \ \leq \frac{|h|}{r^2}R^n. \end{cases}$$

  Notemos que $|z+h|<R<\rho$. Por fim,

$$\left|\sum a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h} - \sum na_nz^{n-1}\right| \ \leq \ \frac{|h|}{r^2}\sum|a_n|R^n \ \xrightarrow{h\to 0} \ 0\,♣$$

2.15 Corolário. *Seja* $f(z) = \sum a_n z^n$ *com raio de convergência* $\rho > 0$. *Então,* f *é infinitamente derivável no seu disco de convergência e*

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Prova.

Pelo teorema da derivação, f é infinitamente derivável e

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k} = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}.$$

Substituindo $z = 0$ encontramos $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$. Logo,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \clubsuit$$

É claro que o corolário (2.15) acima fornece uma segunda prova da Unicidade dos coeficientes de uma série de potências. Veja também o comentário que acompanha o Teorema de Abel (2.9)].

Consideremos uma série de potências com disco de convergência $B(0;\rho)$, com $\rho > 0$, e um ponto a neste disco. Pela propriedade da translação (2.10) e o corolário 2.15 obtemos a série de Taylor de f em torno de a [ou centrada em a]:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \text{ para todo } z \in B(a;\rho - |a|).$$

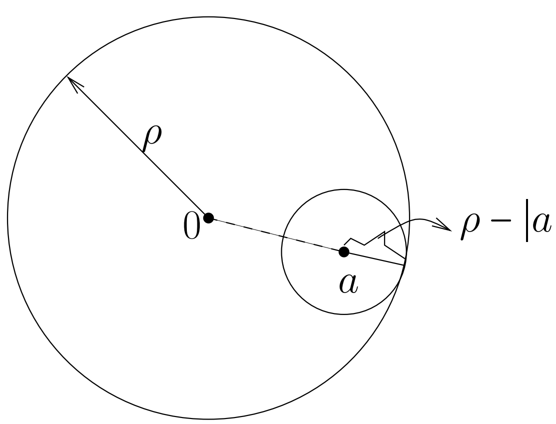

Figura 2.6: Ilustração para a série de Taylor.

A seguir, abordaremos a série binomial complexa para expoente

$$\frac{1}{p}, \text{ onde } p \in \{1,2,3,\ldots\}.$$

Inicialmente, generalizemos o usual conceito de coeficiente binomial definido para dois números naturais n e m, com $m \geq n$,

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}, \text{ onde } \binom{m}{0} = 1 \text{ e } 0! = 1.$$

Dados $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \text{ com } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Para um tal α temos a convergência absoluta da série de potências complexa

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n, \quad \text{onde } |z| < 1.$$

Pois, pelo teste da razão,

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)z^n}\right| = \left|\frac{(\alpha-n)z}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} |z| \text{ e } |z| < 1.$$

2.16 Teorema Binomial.

(A) Dado α em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, temos

$$(1+x)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{n}x^n, \text{ para todo } x \in (-1,1).$$

(B) Dado p em $\{1,2,\ldots,\}$, a série de potências

$$B(z) = \sum \binom{1/p}{n}z^n$$

satisfaz

$$B(z)^p = 1+z, \text{ para todo } z \in B(0;1), \text{ e } B(0) = 1.$$

Prova.

(A) Seja

$$f(x) = \sum \binom{\alpha}{n} x^n, \text{ onde } x \in (-1,1).$$

Pelo Teorema 2.14 (derivação),

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &= \sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n}x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right]x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left[(\alpha-n)\binom{\alpha}{n} + n\binom{\alpha}{n}\right]x^n \\
&= \alpha f(x).
\end{aligned}$$

Donde segue

$$\frac{d[(1+x)^{-\alpha}f(x)]}{dx} = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x) + (1+x)^{-\alpha}f'(x) = 0$$

e

$$(1+x)^{-\alpha}f(x) = f(0) = \binom{\alpha}{0} = 1.$$

(B) Seja

$$b_n = \binom{1/p}{n}, \text{ onde } n = 0,1,2,\ldots.$$

Pela propriedade para o produto (2.11), temos

$$\left(\sum b_n z^n\right)^p = \sum c_n z^n, \text{ para todo } |z| < 1,$$

com a sequência (c_n) em $\mathbb{R}$. Pela primeira parte segue

$$\sum c_n x^n = 1 + x \text{ para todo } x \in (-1,1).$$

Pela unicidade dos coeficientes (série de potências tem coeficientes reais - vide comentários ao teorema de Abel) temos

$$c_0 = c_1 = 1 \quad \text{e } c_n = 0 \quad \text{se} \quad n \geq 2 \clubsuit$$

2.17 Teorema (Inversão). *Seja* $f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$*, com* $a_1 \neq 0$*, convergente em alguma vizinhança da origem. Então, existe uma série de potências* $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ *tal que para todo* z *em alguma vizinhança da origem temos*

$$f(g(z)) = z \quad e \quad g(f(z)) = z.$$

Prova. Enfatizemos que $a_1 \neq 0$. Dividamos a prova em duas partes.

- ⋄ Procuremos $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$, com raio de convergência não nulo, tal que $f(g(z)) = z$ (i.e., g é uma inversa à direita de f). Caso tal série exista, temos

  $$a_1 g(z) - a_2 g(z)^2 - a_3 g(z)^3 - \cdots = z = z + 0z^2 + 0z^3 + \cdots$$

  Donde, pela propriedade 2.12 (composição) e a unicidade dos coeficientes,

  $$a_1 b_1 = 1, a_1 b_2 - a_2 b_1^2 = 0, \; a_1 b_3 - 2a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1^3 = 0, \ldots$$

  $$\ldots, a_1 b_n - P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = 0,$$

  com P_n um polinômio com coeficientes em $\mathbb{N}$ (logo, positivos). Devido a tais equações (onde $a_1 \neq 0$), os coeficientes $b_1, b_2, b_3 \ldots$ estão determinados!

  Resta provarmos que o raio de convergência de $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ é não nulo. Podemos assumir $a_1 = 1$ [por favor, cheque]. Então, $b_1 = 1$. Sejam

  $$a_1^* = 1 \;\text{ e }\; f^*(z) = z - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n^* z^n \qquad [\text{logo, } f^*(0) = 0]$$

  uma série de potências "majorante" (a escolher) com $|a_n| \leq a_n^*$ para todo n. Sejam

  $$c_1 = 1 \;\text{ e }\; \varphi(z) = z + \sum c_n z^n \qquad [\text{logo, } \varphi(0) = 0]$$

  a série de potências que formalmente é a inversa à direita de $f^*(z)$. Temos

  $$c_n - P_n(a_2^*, \ldots, a_n^*, c_1, \ldots, c_{n-1}) = 0$$

  onde P_n é o polinômio já descrito. Por indução segue $c_n \geq 0$ para todo n. Também temos $|b_1| = 1 \leq 1 = |c_1|$ e então, por indução em n,

  $$|b_n| = |P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1})| \leq P_n(a_2^*, \ldots, a_n^*, c_1, \ldots, c_{n-1}) = c_n.$$

A seguir, escolhemos f^* (convergente, trivial e com inversa φ convergente).

- *Existe $m > 0$ com $|a_n| \leq m^n$, para todo n (pois,* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$*).*

Escolhendo $a_n^* = m^n$, definimos a série convergente (numa vizinhança de 0)

$$f^*(z) = z - \sum_{n=2}^{+\infty} m^n z^n = z - \frac{m^2 z^2}{1 - mz}.$$

Por definição, a série de potências $\varphi(z)$ é tal que $f^*(\varphi(z)) = z$. Logo,

$$\begin{cases} \varphi(z) - \frac{m^2 \varphi(z)^2}{1 - m\varphi(z)} = z \\ \text{e} \\ \varphi(z) = \frac{1 + mz - [1 + m^2 z^2 - (4m^2 + 2m)z]^{\frac{1}{2}}}{2(m^2 + m)}, \text{ com } \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

O teorema binomial e a propriedade de composição expressam $\varphi(z)$ como uma série de potências com raio de convergência não nulo. Donde,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$$

tem raio de convergência não nulo.

Por construção, temos $f(g(z)) = z$ em uma vizinhança da origem.

◇ Da mesma forma, existe uma série de potências $h(z)$ [uma inversa à direita de g] satisfazendo $g(h(z)) = z$ em uma vizinhança de 0. Logo,

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= g\{f[g(h(z))]\} \\ &= g[(f \circ g)(h(z))] \\ &= g(h(z)) \\ &= z \clubsuit \end{aligned}$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Referências.

1. de Oliveira, Oswaldo R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv (2012). Available at http://arxiv.org/abs/1207.1472v2.

2. Lang, Serge, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, fourth ed., 1999.

Departamento de Matemática - Universidade de São Paulo

São Paulo, SP - Brasil

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` *oliveira@ime.usp.br*