Existência da Raiz Quadrada de Dois

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Consideremos o conjunto

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}.$$

O conjunto X é não-vazio pois $1 \in X$. O conjunto X é limitado superiormente pois, se $x > 2$ então $x^2 > 4 > 2$ e $x \notin X$. Assim, X é limitado superiormente pelo número 2 (isto é, $x \leq 2$ para todo $x \in X$). Pela *Propriedade do Supremo*, existe

$$\alpha = \sup X.$$

Teorema (Existência da Raiz Quadrada de 2). *Temos* $\alpha^2 = 2$.

Prova. Suponhamos $\alpha^2 \neq 2$.

- Por definição de supremo segue $1 \leq \alpha \leq 2$, pois $1 \in X$ e 2 majora X.

- Consideremos um arbitrário ϵ em $(0, 1)$. Como X é limitado superiormente por α, então $\alpha + \epsilon$ não pertence a X. Donde segue

  $$(\alpha + \epsilon)^2 \geq 2.$$

  Como $\alpha \leq 2$ e $0 < \epsilon < 1$, temos $2\alpha \leq 4$ e $\epsilon^2 < \epsilon$. Logo,

  $$\alpha^2 + 5\epsilon = \alpha^2 + 4\epsilon + \epsilon > \alpha^2 + 2\alpha\epsilon + \epsilon^2 = (\alpha + \epsilon)^2 \geq 2.$$

  Encontramos então

  $$(\alpha^2 - 2) + 5\epsilon > 0. \tag{1}$$

  Por hipótese, $\alpha^2 \neq 2$. Já vimos que $1 \leq \alpha \leq 2$ e portanto $|\alpha^2 - 2| \leq 2$. Logo,

  $$0 < \frac{|\alpha^2 - 2|}{5} < 1.$$

  Substituindo, para ϵ e na identidade (1), obtemos

  $$(\alpha^2 - 2) + |\alpha^2 - 2| > 0.$$

  Donde segue $\alpha^2 - 2 > 0$.

- Consideremos um valor arbitrariamente pequeno de ϵ no intervalo $(0,1)$. Então, $\alpha - \epsilon$ não majora X e existe $x \in X$ satisfazendo $\alpha - \epsilon < x$ e $x^2 < 2$. Segue então

$$(\alpha - \epsilon)^2 < 2.$$

Logo,

$$\alpha^2 - 2 < 2\alpha\epsilon - \epsilon^2 < 2\alpha\epsilon \leq 4\epsilon.$$

Como $\alpha^2 \neq 2$, podemos supor $\epsilon < |\alpha^2 - 2|/4$. Segue

$$\alpha^2 - 2 < |\alpha^2 - 2|.$$

Logo,

$$\alpha^2 - 2 < 0.$$

- Provamos que

$$\alpha^2 \neq 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - 2 > 0 \\ \text{e} \\ \alpha^2 - 2 < 0 \ \lightning \end{cases}$$