# TEOREMA DO POSTO (PARA MATRIZES) E TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira (2015-2018) oliveira@ime.usp.br

**Definição.** Seja $M$ uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < k \leq m$ e $0 < k \leq n$. Um **menor de ordem** $k$ de $M$ é o determinante de uma matriz quadrada de ordem $k$ obtida pela remoção de $m-k$ linhas e $n-k$ colunas da matriz $M$.

**Definição.** Seja $M$ em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. O **posto coluna (linha)** de $M$ é o número máximo de colunas (linhas) linearmente independentes de $M$.

**Lema.** *Seja $M$ uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, com $m \leq n$, tal que suas $m$ linhas são linearmente independentes (LI). Então, vale o que segue.*

*(a) Existem $m$ colunas de $M$ tais que o determinante da matriz $m\times m$ formado por tais colunas é não zero.*

*(b) Tais $m$ colunas são LI.*

**Prova.**

(a) Escrevamos $M_1 = M$ e

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A primeira linha de $M_1$ contém um elemento $a_{1j} = \lambda_{1j} \neq 0$. Multiplicando a primeira linha por um número conveniente e somando-a à segunda linha, temos uma nova matriz cuja segunda linha apresenta o número 0 na $j$-ésima coluna. As $m$ linhas desta nova matriz são também LI e todos os seus menores (determinantes) de ordem $m$ são iguais aos correspondentes menores (determinantes) originais. Iterando o procedimento, multiplicamos a primeira linha por sucessivos números convenientes e a somamos ordenadamente às demais linhas e obtemos uma matriz $M_2$ satisfazendo as condições: *o primeiro elemento na $j$-ésima coluna é $\lambda_{1j} = a_{1j} \neq 0$, os demais elementos na $j$-ésima coluna são nulos, suas linhas são LI e todos os seus menores de ordem $m$ são iguais aos respectivos menores originais da matriz $M_1$.*

Escrevamos,

$$M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \lambda_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

A segunda linha de $M_2$ contém um elemento $b_{2k} = \lambda_{2k} \neq 0$ com $k \neq j$. Então, analogamente ao feito acima, obtemos a matriz $M_3$ (v. abaixo) tal que: *o segundo elemento em sua $k$-ésima coluna é $\lambda_{2k} = b_{2k} \neq 0$, os demais elementos na $k$-ésima coluna são nulos (a operação de multiplicar a segunda linha de $M_2$ por uma constante e então somá-la à primeira linha não muda o elemento $\lambda_{1j}$ na $j$-ésima coluna da primeira linha de $M_2$), a $j$-ésima coluna de $M_3$ é igual a $j$-ésima coluna de $M_2$, suas linhas são LI e, ainda, todos os seus menores de ordem $m$ são iguais aos respectivos menores de $M_2$.* Escrevamos,

$$M_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & & \lambda_{2k} & & 0 & & c_{2n} \\ c_{31} & & 0 & & 0 & & c_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Por fim, iterando tal processo encontramos as $m$ colunas desejadas.

(b) Segue por uma propriedade de determinantes♣

**Teorema do Posto.** *Seja $M$ em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $p$ (o posto de $M$) o número máximo de linhas LI de $M$. Então, o número máximo de colunas LI de $M$ é $p$.*

**Prova.**

Seja $\overline{M}$ em $M_{k\times n}(\mathbb{R})$ formada por $k$ linhas LI de $M$. Donde, $k \leq m$. Tais linhas são vetores em $\mathbb{R}^n$, que tem no máximo $n$ vetores LI. Logo, $k \leq n$.

Pelo Lema, $\overline{M}$ tem $k$ colunas LI. É fácil ver que as correspondentes $k$ colunas de $M$ são LI. Analogamente para a matriz transposta $M^t$♣

**Teorema do Núcleo e da Imagem.** *Seja $M$ uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por*

$$TX = MX, \ \text{onde } X \in \mathbb{R}^n.$$

*Então,*

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = n.$$

**Prova.**

Sabidamente, a imagem de $T$ é gerada pelas colunas de $M$. É fácil ver que o subespaço $\ker(T)$ é ortogonal ao sub-espaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de $M$. Se $p$ é o posto de $M$, pelo Teorema do Posto temos

$$\begin{cases} \dim \operatorname{Im}(T) = p \\ \dim \operatorname{Ker}(T) = n - p \ \clubsuit \end{cases}$$

EXTRA: Teorema do Núcleo e da Imagem implica Teorema do Posto.

Verificação.

Mantida a notação acima consideramos as aplicações lineares

$$\begin{cases} T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ \text{por } T(X) = MX, \ \text{onde } M \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \\ \\ T^t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \ \text{por } T^tY = M^tY \text{ onde } M^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) \ \text{ é a transposta de } M. \end{cases}$$

Notemos que $Y \in \operatorname{Ker}(T^t)$ se e somente se $M^tY = 0$. Isto é, $Y \in \operatorname{Ker}(T^t)$ se e somente se $Y$ é ortogonal às linhas de $M^t$ (i.e., colunas de $M$). Logo,

$$\ker(T^t) = [\operatorname{Im}(T)]^\perp.$$

Porém, pelo teorema do núcleo e da imagem temos

$$\dim \operatorname{Im}(T^t) = m - \dim \ker(T^t).$$

Concluímos então que

$$\dim \operatorname{Im}(T^t) = m - [m - \dim \operatorname{Im}(T)] = \dim \operatorname{Im}(T).$$

Logo, o número de colunas linearmente independentes de $M$ é igual ao número de linhas linearmente independentes de $M$ $\clubsuit$

**REFERÊNCIAS**

Para abordagens mais profundas sobre o Teorema do Posto, recomendo os artigos abaixo.


1. Mackiw, G. *A Note on the Equality of the Column and Row Rank of a Matrix*, Mathematics Magazine, Vol. 68, No. 4 (Oct., 1995), pp. 285-286.

2. Wardlaw, W. P., *Row Rank Equals Column Rank*, Mathematics Magazine, Vol. 78, No. 4 (Oct. 2005), pp. 316-318.



*Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo*

*oliveira@ime.usp.br*

`http://www.ime.usp.br/~oliveira`