Ano 2017

EQUIVALÊNCIA DAS NORMAS EM $\mathbb{R}^n$

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Duas normas N_1 e N_2, definidas num espaço vetorial V, são **equivalentes** se existem $a > 0$ e $b > 0$ satisfazendo $aN_1(v) \leq N_2(v) \leq bN_1(v)$ para todo $v \in V$.

Teorema. Todas as normas são equivalentes em $\mathbb{R}^n$, dado $n \in \mathbb{N}^*$.

Prova.

◇ Fixemos $N : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, uma norma arbitrária. Seja $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a norma usual. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Se $n = 1$, escrevemos $|\cdot|$ (o módulo usual) ao invés de $\|\cdot\|$.

◇ A aplicação $N : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ é contínua. Mostremos.

Sejam $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ e $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$, com cada x_j, y_j em $\mathbb{R}$. Pelas propriedades para normas segue (cheque)

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| \leq N(x-y) &= N[(x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n] \\ &\leq |x_1 - y_1|N(e_1) + \cdots + |x_n - y_n|N(e_n) \\ &\leq [N(e_1) + \cdots + N(e_n)]\|x - y\|. \end{aligned}$$

◇ Por definição temos $N(x) > 0$ se $x \neq 0$. Sabemos que a esfera unitária

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

é compacta em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Pelo Teorema do máximo e do mínimo, de Weierstrass segue que existem $m > 0$ e $M > 0$ tais que temos

$$m \leq N(x) \leq M, \text{ para todo } x \in S^{n-1}.$$

Segue

$$m \leq N\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq M, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Donde concluímos

$$m\|x\| \leq N(x) \leq M\|x\|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $N(\cdot)$ é equivalente a $\|\cdot\|$. Donde então segue a equivalência entre duas normas quaisquer sobre $\mathbb{R}^n$ (cheque)♣

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`