MUDANÇA DE BASE E OPERAÇÕES ELEMENTARES

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Ano 2019

1. NOTAÇÕES

Como por vezes é útil mudar de coordenadas para melhor resolver um problema, vejamos um método eficaz para efetuar uma mudança de coordenadas.

O procedimento abaixo se estende naturalmente a um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e de dimensão finita qualquer. Aqui, nestas notas, consideramos um espaço vetorial real e tri-dimensional (por exemplo, o $\mathbb{R}^3$) e também o espaço vetorial real e bi-dimensional (por exemplo, o $\mathbb{R}^2$).

Suponhamos dados em V^3 (um espaço vetorial real e tri-dimensional) um vetor $\overrightarrow{v}$ e duas bases ordenadas

$$E = \{\,\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2}\,,\overrightarrow{e_3}\,\} \qquad \text{e} \qquad F = \{\,\overrightarrow{f_1}\,,\overrightarrow{f_2}\,,\overrightarrow{f_3}\,\}\,.$$

Mostremos como conhecendo as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em relação à base (ordenada) E podemos obter as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em relação à base (ordenada) F.

Suponhamos conhecidas as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em relação à base F e que elas são, ordenadamente, $y_1\,,y_2$ e y_3. Escrevemos então,

$$\overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + y_3\overrightarrow{f_3} = (y_1\,,y_2\,,y_3)_F\,. \tag{1}$$

Determinemos $x_1\,,x_2$ e x_3, ordenadamente, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em relação à base (ordenada) E. Isto é,

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} = (x_1\,,x_2\,,x_3)_E\,. \tag{2}$$

Para tal, escrevamos os vetores de F em termos da base E:

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}\,. \end{cases}$$

Substituindo $\overrightarrow{f_1}\,,\overrightarrow{f_2}$ e $\overrightarrow{f_3}$, descritos acima, na identidade (1) encontramos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= y_1(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3}) + y_2(a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3}) \\ &\quad + y_3(a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}) \\ &= (y_1a_{11} + y_2a_{12} + y_3a_{13})\overrightarrow{e_1} + (y_1a_{21} + y_2a_{22} + y_3a_{23})\overrightarrow{e_2} \\ &\quad + (y_1a_{31} + y_2a_{32} + y_3a_{33})\overrightarrow{e_3}. \end{aligned}$$

Como os coeficientes de $\vec{v}$ em relação à base E são únicos, por (2) temos

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \ . \end{cases}$$

Adotando então a notação matricial, Identificamos a sequência (ordenada), $x_1\, x_2\,, x_3$, das coordenadas de um vetor $\vec{v}$ em V^3 em relação à uma base E, com matrizes-colunas no espaço de matrizes $M_{3\times1}(\mathbb{R})$, escrevendo

$$\left[\,\vec{v}\,\right]_E = (x_1\,, x_2\,, x_3)_E \quad \text{ou} \quad \left[\,\vec{v}\,\right]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E$$

sendo que o sub-índice E indica a base e pode ser omitido se esta é subentendida.

Com tal notação, passamos a escrever o sistema (3), que relaciona as coordenadas de $\vec{v}$ em relação às bases E e F, através da equação matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F ,$$

Definição. *A matriz de mudança da base F para a base E é a matriz*

$$[\,I\,]_E^F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times3} .$$

O símbolo I entre colchetes em $[\,I\,]_E^F$ refere-se à aplicação identidade pelos motivos que expomos a seguir.

- Se $E = F$, a matriz de mudança de base da base E para a base E é a matriz identidade.

- Não é difícil mostrar que a matriz $[\,I\,]_E^F$ é a matriz associada à aplicação identidade $I : V^3 \longrightarrow V^3$ (a qual é um exemplo de transformação linear) se no domínio adotamos o sistema de coordenadas proporcionado pela base F e no contradomínio o sistema de coordenadas dado pela base E.

2. FÓRMULA

Temos então, devido às notações e comentários acima, as identidades

$$\left[\,\vec{v}\,\right]_E = \left[\,I(\,\vec{v}\,)\,\right]_E = [\,I\,]_E^F\ \left[\,\vec{v}\,\right]_F .$$

ou, simplesmente, a fórmula

$$\boxed{\left[\,\vec{v}\,\right]_E = [\,I\,]_E^F\ \left[\,\vec{v}\,\right]_F .}$$

Mnemônico. Tal fórmula fornece um mnemônico. Basta cancelar F (na diagonal) no lado direito da equação acima para obter as coordenadas de $\vec{v}$ na base E.

Desta forma, com tal notação, observemos que as entradas nas primeira, segunda e terceira colunas da matriz de mudança da base F para a base E são, respectivamente, as coordenadas dos vetores $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$ na base E.

Esquematicamente, e abusando da notação, temos

$$[\,I\,]_E^F = \left[\begin{array}{ccc} \left[\,\vec{f_1}\,\right]_E & \left[\,\vec{f_2}\,\right]_E & \left[\,\vec{f_3}\,\right]_E \end{array}\right].$$

Notemos também que

$$\left[\vec{f_1}\right]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left[\vec{f_2}\right]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \left[\vec{f_3}\right]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e que

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e analogamente para o vetor terceira coluna da matriz de mudança $[\,I\,]_E^F$.

Proposição 1. *Se* $M = [\,I\,]_E^F$ *então* $\det(M) \neq 0$.
Prova.

Mantendo a notação acima, temos que se

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = 0 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = 0, \end{cases}$$

então pelo sistema (3), vide página 3, temos $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e portanto

$$[\,\overrightarrow{v}\,]_E \equiv (0,0,0)_E.$$

Logo, obtemos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ e consequentemente

$$(y_1, y_2, y_3) = \big[\,\overrightarrow{v}\,\big]_F = (0,0,0)_F \clubsuit$$

Proposição 2. *Sejam* $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, $F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ *e* $G = \{\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}\}$ *três bases ordenadas. Consideremos* $[I]_E^F$, *a matriz de mudança da base* F *para a base* E, *assim como* $[I]_F^G$, *a matriz de mudança da base* G *para a base* F, *e também* $[I]_E^G$, *a matriz de mudança da base* G *para a base* E. *Então temos*

$$[\,I\,]_E^G \;=\; [\,I\,]_E^F\,[\,I\,]_F^G.$$

Prova.

Consideremos $\overrightarrow{g_1} = (1,0,0)_G$. Aplicando a Fórmula duas vezes obtemos

$$[\,I\,]_E^F \cdot [\,I\,]_F^G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; [\,I\,]_E^F \cdot [\,I\,]_F^G \cdot [\,\overrightarrow{g_1}\,]_G \;=\; [\,I\,]_E^F \cdot [\overrightarrow{g_1}]_F \;=\; [\,\overrightarrow{g_1}\,]_E\ .$$

A expressão mais à esquerda na identidade acima é a primeira coluna da matriz produto $[\,I\,]_E^F\ [\,I\,]_F^G$ e a expressão mais à direita é a primeira coluna da matriz $[\,I\,]_E^G$. Então, considerando analogamente os vetores $\overrightarrow{g_2}$ e $\overrightarrow{g_3}$ concluímos que estas duas matrizes são iguais $\clubsuit$

Corolário 3. *Dadas duas bases E e F de V^3 temos,*

$$\left([\,I\,]_E^F \right)^{-1} = [\,I\,]_F^E .$$

Prova.

Supondo $G = E$ na Proposição 2, temos

$$\begin{aligned} [\,I\,]_E^F [\,I\,]_F^E &= [\,I\,]_E^E \\ &= I, \end{aligned}$$

com I a matriz identidade. Analogamente segue

$$\begin{aligned} [\,I\,]_F^E [\,I\,]_E^F &= [\,I\,]_F^F \\ &= I. \end{aligned}$$

Logo, as matrizes $[\,I\,]_E^F$ e $[\,I\,]_F^E$ são inversas uma da outra ♣

3. ROTAÇÕES NO PLANO

Na figura abaixo esboçamos a mudança de coordenadas no plano cartesiano efetuada ao girarmos os eixos tradicionais Ox e Oy no sentido anti-horário de um ângulo θ rad., com $0 < \theta < 2\pi$.

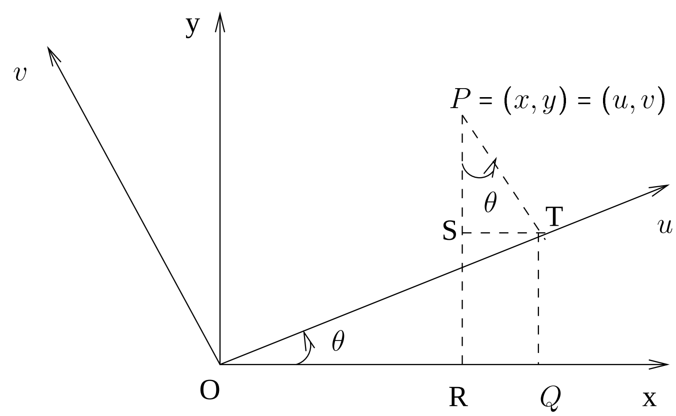

Figura 1: Rotação de Eixos

Não é difícil ver que dado um ponto P a relação entre as coordenadas (x, y) no sistema de coordenadas Oxy e suas novas coordenadas (u, v) no novo sistema de coordenadas Ouv é dada pelo sistema (com as equações de rotações de eixos)

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta\ . \end{cases}$$

Em notação matricial escrevemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Também é usual escrevermos

$$(x\,, y) \;=\; (u\cos\theta - v\sin\theta\,, u\sin\theta + v\cos\theta).$$

Consideremos a base canônica de $\mathbb{R}^2$, definida por

$$C = \{\, \overrightarrow{e_1} = (1, 0)\,,\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1)\,\},$$

e também a base $B = \{\overrightarrow{f_1} = (\cos\theta\,, \sin\theta)\,, \overrightarrow{f_2} = (-\sin\theta\,, \cos\theta)\}$. Então temos

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;=\; [\,I\,]_C^B\,.$$

4. INTERPRETAÇÕES PARA UM PRODUTO MATRICIAL

Consideremos o produto matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Chamemos as três matrizes acima de X, M e Y, segundo a ordem de surgimento.

Por definição de produto de matrizes encontramos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que

- x_1 é obtido multiplicando ordenadamente as três entradas da primeira linha da matriz M,pelas três entradas da matriz coluna Y e então somando os resultados.
- x_2 é obtido multiplicando ordenadamente as três entradas da segunda linha de M pelas três entradas da matriz coluna Y e então somando os resultados.
- x_3 é obtido multiplicando ordenadamente as três entradas da terceira linha de M pelas três entradas de Y e então somando os resultados.

Primeira Interpretação. Dizemos que x_1, x_2 e x_3 são, respectivamente, os " produtos escalares" da primeira linha , segunda linha e terceira linha da matriz quadrada M pela matriz-coluna Y.

Por outra perspectiva, também é fácil ver que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

Segunda Interpretação (uma Proposição). O vetor-coluna X é a combinação linear dos três vetores-coluna da matriz M, naturalmente ordenados, cujos coeficientes são dados pelas entradas, usualmente ordenadas ("de cima para baixo"), do vetor-coluna Y.

As argumentações acima se estendem naturalmente ao produto de duas matrizes quaisquer A e X tais que exista o produto matricial AX.

Exemplifiquemos. Suponhamos que A é de tamanho 3×2 e que X é de tamanho 2×2. Escrevamos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix}.$$

Então,

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bt & ay+bz \\ cx+dt & cy+dz \\ ex+ft & ey+fz \end{pmatrix}.$$

Indiquemos a primeira, a segunda e a terceira linhas de A por, respectivamente, A^1, A^2 e A^3. Analogamente, sejam X^1 e X^2 a primeira e a segunda linhas de X. Similarmente, sejam A_1 e A_2 a primeira e a segunda colunas de A e sejam X_1 e X_2 a primeira e a segunda colunas de X.

Indiquemos o produto escalar de vetores pelo símbolo "$\cdot$" (um ponto). Então

$$AX = \begin{pmatrix} (a,b)\cdot(x,t) & (a,b)\cdot(y,z) \\ (c,d)\cdot(x,t) & (c,d)\cdot(y,z) \\ (e,f)\cdot(x,t) & (e,f)\cdot(y,z) \end{pmatrix}.$$

Assim, com as notações para linhas e colunas podemos escrever.

$$AX = \begin{pmatrix} A^1\cdot X_1 & A^1\cdot X_2 \\ A^2\cdot X_1 & A^2\cdot X_2 \\ A^3\cdot X_1 & A^3\cdot X_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o elemento na posição ij, da matriz AX, é dado pelo produto escalar $A^i \cdot X_j$.

Ainda mais, a primeira coluna da matriz produto AX é

$$(AX)_1 = \begin{pmatrix} ax+bt \\ cx+dt \\ ex+ft \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = xA_1 + tA_2.$$

Assim, a primeira coluna de AX é uma combinação linear das colunas de A, com os coeficientes desta combinação dados pela primeira linha de X.

Cheque que a segunda coluna de AX é uma combinação linear das colunas de A, com os coeficientes desta combinação dados pela segunda linha de X.

5. EXEMPLOS

1. Considerando as bases ordenadas $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ e $F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$, ache a matriz de mudança da base F para E sabendo que

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\,. \end{cases}$$

Solução.

A matriz de mudança $[\,I\,]_E^F$, da base F para a base E, é tal que suas colunas, primeira, segunda e terceira, correspondem às coordenadas de $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$ e $\overrightarrow{f_3}$ em relação à base E, respectivamente. Logo,

$$[\,I\,]_E^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \clubsuit$$

2. Sendo E e F como no Exemplo 1 acima, e sendo

$$\vec{v} = (1,-1,3)_F = \overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_2} + 3\overrightarrow{f_3}\,,$$

ache as coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base E.

Solução.

Temos

$$[\,\vec{v}\,]_E = [\,I\,]_E^F\,[\,\vec{v}\,]_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \clubsuit$$

Observação. No Exemplo 2 acima notemos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,,$$

em concordância com a Segunda Interpretação, à página 8.

3. A matriz de mudança da base, de $F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ para $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, é

$$[\,I\,]_E^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exprima os elementos de F em termos da base E.

Solução.

Repetindo a argumentação no Exemplo 1, temos que a matriz de mudança $[\,I\,]_E^F$, da base F para a base E, é tal que suas colunas, primeira, segunda e terceira, correspondem às coordenadas de $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$ e $\overrightarrow{f_3}$ em relação à base E, respectivamente. Donde segue,

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} \;\clubsuit \end{cases}$$

4. Ache a matriz de mudança da base E para a base F no caso do Exemplo 1. Exprima os vetores $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$ segundo a base F.

Solução (a mais simples neste particular exercício simples).

É óbvio que temos $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_2}$.

É muito fácil ver que

$$\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}\,.$$

Combinando as duas equações acima segue

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3}\,.$$

Por fim, da primeira identidade obtida $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_2}$ e da identidade dada

$$\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$$

obtemos

$$\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3}\quad.$$

Portanto, a matriz de mudança da base E para a base F é

$$[\,I\,]_F^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \clubsuit$$

5. Sejam $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, $F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ e $G = (\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3})$ três bases tais que

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{f_1} + 2\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_3} \\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3} \end{cases} \qquad\qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} \overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{g_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{g_3} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}\ . \end{cases}$$

Determine as matrizes de mudança de

(i) E para F (ii) G para E (iii) G para F

(iv) F para E (v) E para G (vi) F para G .

Solução.

(i) É claro que

$$[\,I\,]_F^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) É claro que

$$[\,I\,]_E^G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Pela Proposição 2 e pelos ítens (i) e (ii) temos,

$$\begin{aligned} [\,I\,]_F^G &= [\,I\,]_F^E\ [\,I\,]_E^G \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iv) Pelo Corolário 3 segue

$$[\,I\,]_E^F \;=\; \left([\,I\,]_F^E\right)^{-1}.$$

Computemos a matriz

$$\left([\,I\,]_F^E\right)^{-1}.$$

Escrevendo a matriz $[\,I\,]_F^E$ e a matriz identidade lado a lado,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|,$$

e realizando sucessivas **operações elementares** (vide definição ma próxima seção) na matriz à esquerda até obtermos a matriz identidade, executamos estas mesmas operações, e na mesma ordem, sobre a matriz identidade à direita.

Ao obtermos, à esquerda, a matriz identidade de tamanho 3×3, obteremos à direita a inversa da matriz $[\,I\,]_F^E$.

6. OPERAÇÕES ELEMENTARES (SOBRE MATRIZES)

Operações elementares sobre as linhas (colunas) da matriz A.

- Troca de duas linhas (colunas).
- Multiplicação de uma linha (coluna) por uma constante não nula.
- Adição a uma linha (coluna) de outra linha (coluna).
- Adição a uma linha (coluna) de outra linha (coluna) já multiplicada por uma constante.

Então, como primeiro passo, na matriz à esquerda, multipliquemos a primeira linha por -2 e somemos à segunda linha, e procedamos analogamente com a matriz à direita. Obtemos,

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como segundo passo, multipliquemos as terceiras linhas por -1 e então somemo-las às segundas linhas:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como terceiro passo e quarto passos, somemos as segundas linhas às primeiras linhas e multipliquemos as segundas linhas por -1 e então somemo-las às terceiras linhas:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right|.$$

Como quinto passo, multipliquemos as segundas linhas por -1:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right|.$$

Consequentemente temos

$$[\,I\,]_E^F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(v) Pelo Corolário 3 sabemos que

$$[\,I\,]_G^E \;=\; \Big(\,[\,I\,]_E^G\Big)^{-1}\;.$$

Computemos $\Big(\,[\,I\,]_E^G\Big)^{-1}$.

Escrevamos a matriz $[\,I\,]_E^G$ e a matriz identidade lado a lado,

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Então, como primeiro passo, na matriz à esquerda, multipliquemos a primeira linha por 2 e somemos à segunda linha, e procedamos analogamente com a matriz à direita. Obtemos

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como segundo passo, somemos as terceiras linhas às segundas linhas:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como terceiro passo, dividamos as segundas linhas por 3:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como quarto e quinto passo, multipliquemos as segundas linhas por -1 e somemo-las às primeiras e terceiras linhas das respectivas matrizes:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right|.$$

Como sexto e último passo, multiplicamos as terceiras linhas por -1:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right|.$$

Consequentemente temos

$$[\,I\,]_G^E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(vi) Pelo Corolário 3 temos

$$[\,I\,]_G^F = \big(\,[\,I\,]_F^G\,\big)^{-1}.$$

Computemos $\big(\,[\,I\,]_F^G\,\big)^{-1}$.

Escrevamos a matriz $[\,I\,]_F^G$ e a matriz identidade lado a lado,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|,$$

(Primeiro e segundo passos.) Multipliquemos as primeiras linhas por 2 e as somemos às segundas e terceiras linhas das respectivas matrizes:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

(Terceiro passo.) Troquemos as segundas linhas com as terceiras linhas:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right|.$$

(Quarto e quinto passos.) Multipliquemos as primeiras linhas por -1 e as segundas por $\frac{1}{3}$:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right|.$$

(Sexto e sétimo passos.) Adicionemos as segundas linhas às primeiras linhas e, multiplicando as segundas linhas por -5 adicionemo-as então às terceiras linhas:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right|.$$

(Oitavo passo.) Adicionemos as terceiras linhas às primeiras linhas:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right|.$$

Consequentemente temos

$$[\,I\,]_G^F = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

6. Sejam $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ e $F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ bases ordenadas tais que

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}. \end{cases}$$

Com $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, ache as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ em relação à base F.

Solução.

Necessitamos da matriz $[\,I\,]_F^E$, sendo que é facilmente identificável a matriz

$$[\,I\,]_E^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procedendo analogamente ao Exemplo 5 determinamos

$$[\,I\,]_F^E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a resposta ao exercício é

$$\left[\,\vec{u}\,\right]_F = [\,I\,]_F^E \left[\,\vec{u}\,\right]_E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} \clubsuit$$