REGRAS DE L'HOSPITAL E O TVM GENERALIZADO (CAUCHY)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

1. Introdução 1
2. Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio (TVM) 2
3. Teorema do Valor Intermediário para Derivadas (Darboux) 5
4. Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy) 6
5. Regras de L'Hospital 8
Referências .... 13.

1. Introdução

Neste texto provamos o Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy) e as duas regras de L´Hospital usualmente encontradas no Cálculo 1. Além desses resultados, apresentamos o Teorema de Rolle, o Teorema do Valor Médio para Derivadas (TVM) e o Teorema do Valor Intermediário para Derivadas (Darboux).

Apresentamos, sem demonstração, os teoremas abaixo.

Teorema do Valor Intermediário (TVI, Bolzano). *Seja* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então, a imagem de* f*, denota por e definida por*

$$Im(f) = f((a,b)) = \{f(x) : x \in (a,b)\},$$

é um intervalo. Isto é, dado um número y *satisfazendo* $f(x_1) < y < f(x_2)$*, com* x_1 *e* x_2 *ambos em* (a,b)*, então existe* x *em* (a,b) *tal que*

$$f(x) = y.$$

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, f assume um valor máximo, M, e um valor mínimo, m, no intervalo $[a, b]$. Isto é, existem x_1 e x_2, ambos em $[a, b]$, tais que*

$$m = f(x_1) \leq \; f(x) \; \leq f(x_2) = M, \text{ para todo } \; x \in [a, b].$$

A seguir, utilizamos os resultados acima.

2. Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio (TVM).

Condição Necessária para Máximos e Mínimos. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Seja p um ponto de máximo local ou de mínimo local de f. Então,*

$$f'(p) = 0.$$

Prova. Notemos que $p \in (a, b)$.

Temos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = f'(p).$$

Se p é ponto de máximo local, o primeiro limite é maior ou igual a zero e o segundo é menor ou igual a zero. Como eles coincidem, temos $f'(p) = 0$.

Se p é ponto de mínimo local, analisando $-f$ recaímos no caso acima$\clubsuit$

Teorema de Rolle. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b) e tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe c em (a,b) tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Prova.

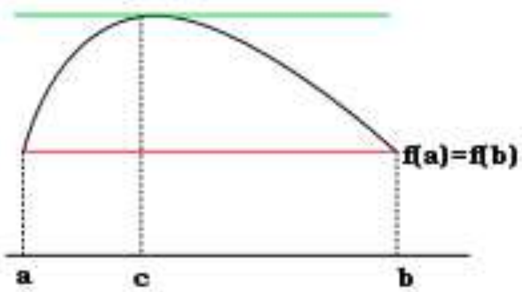


Figura 1: Teorema de Rolle

Se f é constante, o resultado é óbvio.

Caso contrário, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass f assume um mínimo $m = f(x_1)$ e um máximo $M = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in [a,b]$ e $m \neq M$. Logo, como $f(a) = f(b)$, concluímos que ou $x_1 \in (a,b)$ ou $x_2 \in (a,b)$.

Isto é, ou x_1 é um ponto de mínimo local e $f'(x_1) = 0$ ou x_2 é um ponto de máximo local e $f'(x_2) = 0$ ♣

Teorema do Valor Médio (TVM). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Então, existe um ponto c no intervalo aberto (a,b) tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Prova.

A reta secante ao gráfico de f pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$S(t) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a), \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

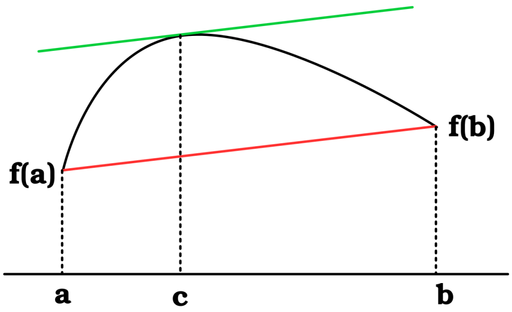


Figura 2: Teorema do Valor Médio (TVM)

A seguir, definimos a função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b),

$$\varphi(t) = f(t) - S(t), \text{ onde } t \in [a, b].$$

É claro que $\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0$ e $\varphi(b) = f(b) - f(b) = 0$ e então, pelo Teorema de Rolle aplicado à função φ, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - S'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \clubsuit$$

Interpretação física do Teorema do Valor Médio. Suponhamos que uma partícula move-se sobre uma reta e que $s(t)$, onde

$$s : [t_1, t_2] \to \mathbb{R},$$

indica a distância em metros desta partícula em relação à origem adotada na reta, no instante t medido em segundos. Então, o Teorema do Valor Médio expressa que em algum instante $t_0 \in [t_1, t_2]$ a velocidade instantânea $v(t_0) = s'(t_0)$ é igual à velocidade média $v_{\text{média}}$ no período $[t_1, t_2]$. Isto é, temos

$$s'(t_0) = v(t_0) = v_{\text{média}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \clubsuit$$

É também importante a propriedade abaixo.

3. Teorema do Valor Intermediário para Derivadas (Darboux).

Teorema (Propriedade do Valor Intermediário para Derivadas, Darboux). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável em $[a,b]$. Então, a imagem da função f' é um intervalo.*

Prova.

Consideremos um número λ tal que

$$f'(c) < \lambda < f'(d), \text{ com } c \text{ e } d \text{ em } [a,b].$$

Mostremos que existe p em (c,d) tal que $f'(p) = \lambda$. Analisemos dois casos.

- O caso $\lambda = 0$. Então temos $f'(c) < 0$ e $f'(d) > 0$.

  Para x em um pequeno intervalo $(c, c+\epsilon)$ [com $\epsilon > 0$] temos

  $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

  e portanto $f(x) < f(c)$.

  Para x em um pequeno intervalo $(d-\delta, d)$ [com $\delta > 0$] temos

  $$\frac{f(x) - f(d)}{x - d} > 0$$

  e portanto $f(x) < f(d)$. Desta forma, o ponto de mínimo $x = p$ da função $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ (com existência garantida pelo Teorema de Weierstrass) pertence ao intervalo aberto (c,d). Temos assim, $f'(p) = 0 = \lambda$.

- O caso geral. Basta vermos que $g(x) = f(x) - \lambda x$ satisfaz

  $$g'(c) < 0 < g'(d) \clubsuit$$

4. TVM Generalizado (Cauchy).

Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy). *Sejam* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínuas, deriváveis em* (a, b) *e com* $f'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$. *Então, existe um ponto* $p \in (a, b)$ *tal que*

$$[g(b) - g(a)]f'(p) = [f(b) - f(a)]g'(p).$$

Em particular, se $f'(p) \neq 0$ *então temos*

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(p)}{f'(p)}.$$

Prova.

Consideremos a função

$$\varphi(t) = [g(b) - g(a)]f(t) - [f(b) - f(a)]g(t), \text{ onde } t \in [a, b].$$

Notemos que φ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

Temos, é claro,

$$\begin{cases} \varphi(a) & = & g(b)f(a) & - & f(b)g(a) \\ \text{e} \\ \varphi(b) & = & -g(a)f(b) & + & f(a)g(b). \end{cases}$$

Logo, $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Assim, pelo TVM existe p em (a, b) tal que

$$0 = \varphi'(p) = [g(b) - g(a)]f'(p) - [f(b) - f(a)]g'(p) \clubsuit$$

Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio Generalizado. Esboçando no plano uma curva $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, onde $t \in [a, b]$, e a reta S pelos pontos $(f(a), g(a))$ e $(f(b), g(b))$ vemos que existe uma reta T tangente à curva γ, em algum ponto $\gamma(c)$, e também paralela à reta S. Isto é, se m_T e m_S são os coeficientes angulares de T e S temos,

$$m_T = m_S = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

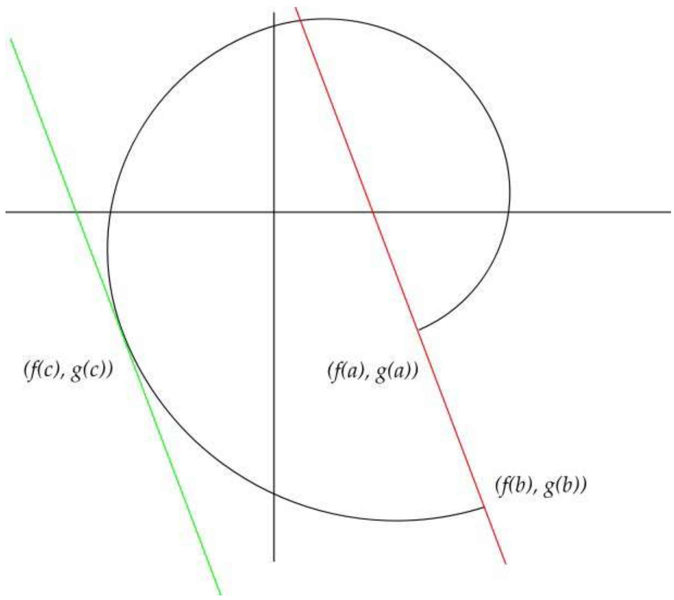


Figura 3: TVM Generalizado

Note que geometricamente o vetor tangente à curva γ no ponto c é o vetor

$$\gamma'(c) = \lim_{t\to c} \frac{\gamma(t) - \gamma(c)}{t - c} = \lim_{t\to c} \left(\frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right)$$

$$= \left(\lim_{t\to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \lim_{t\to c} \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right) = (f'(c), g'(c)),$$

interpretado fisicamente como o vetor velocidade da curva γ no "instante c".

Ainda mais, o coeficiente angular m_T da reta T, paralela ao vetor $\gamma'(c)$, é a tangente do ângulo θ que o vetor forma com o eixo Ox. Logo,

$$m_T = \tan\theta = \frac{g'(c)}{f'(c)} \clubsuit$$

5. Regras de L'Hospital.

Tais regras aplicam-se à análise das indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty}\,.$$

Mostremos com exemplos que são também indeterminações

$$\text{(i)}\ \ 0.\infty \qquad \text{(ii)}\ \ \infty-\infty \qquad \text{(iii)}\ \ 0^0 \qquad \text{(iv)}\ \ \infty^0 \quad \text{e} \quad \text{(v)}\ \ 1^\infty.$$

Verificação. Temos,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x\frac{13}{x} = 13.$

(ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} [(x+15)-x] = 15.$

(iii) $\lim\limits_{x\to -\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7.$

(iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7.$

(v) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{\ln \pi}{x})^x = e^{\ln \pi} = \pi$ ♣

Estas cinco indeterminações são redutíveis às indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
É trivial ver que $0.\infty$ é reduzido a

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Quanto aos casos (iii), (iv) e (v), temos

$$0^0 = e^{0\ln 0} = e^{0.(-\infty)} \ \ ; \ \ \infty^0 = e^{0\ln\infty} = e^{0\infty} \ \ ; \ \ 1^\infty = e^{\infty\ln 1} = e^{\infty.0}.$$

Peço ao leitor analisar o caso (ii).

Atenção. 0^∞ não é indeterminação pois

$$0^\infty = e^{\infty\ln 0} = e^{\infty.(-\infty)} = e^\infty \in \{0,+\infty\}.$$

Motivação às Regras de L'Hospital. Mostremos inicialmente uma versão simples e bem útil de tais regras. Suponhamos $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriváveis (logo, contínuas) e $p \in (a, b)$ satisfazendo

$$f(p) = g(p) = 0 \ \text{ e } \ g'(p) \neq 0.$$

Então, temos

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

Verificação.

É trivial ver que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} \\ &= \lim_{x \to p} \frac{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} \\ &= \frac{\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\lim\limits_{x \to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}} \\ &= \frac{f'(p)}{g'(p)} \clubsuit \end{aligned}$$

Exemplos. Aplicando a regra acima encontramos

$$(1) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = \frac{1-0}{1} = 1.$$

$$(2) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1 \clubsuit$$

Teorema (Primeira Regra de L'Hospital). Sejam f e g duas funções deriváveis no intervalo aberto (p, b), com $g'(x) \neq 0$ para todo x. Suponhamos que

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to p^+} g(x) \ \text{ e}$$

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad (\text{com } L \in \mathbb{R} \text{ ou } L = -\infty \text{ ou } L = +\infty).$$

Então, temos

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Prova.

Definindo

$$f(p) = g(p) = 0$$

obtemos f e g contínuas em $[p, b)$ e deriváveis no intervalo aberto (p, b). Assim, dado $x \in (p, b)$ e aplicando o TVM generalizado ao intervalo fechado $[p, x]$, vemos que existe $x_1 \in (p, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} .$$

Se $x \to p^+$, então $x_1 \to p^+$. Concluímos então que

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_1 \to p^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \clubsuit$$

Comentário. Valem regras similares à dada acima nas seguintes quatro condições,

$$x \to p^- \qquad x \to p \qquad x \to +\infty \qquad e \qquad x \to -\infty.$$

De fato, a primeira regra de L'Hospital sob a condição "$x \to p^-$" é trivialmente equivalente à primeira regra de L'Hospital sob a condição "$x \to p^+$" pois

$$x \to p^+ \iff -x \to -p^-$$

e, definindo $F(x) = f(-x)$ e $G(x) = g(-x)$ obtemos $F'/G' = f'/g'$.

A seguir, apresentamos a Segunda Regra de L'Hospital. Enunciamos tal regra sob a condição

$$x \to p^-.$$

Analogamente à primeira regra de L'Hospital, valem regras análogas à enunciada na segunda regra de L'Hospital nas seguintes quatro condições

$$x \to p^+ \qquad x \to p \qquad x \to +\infty \qquad \text{e} \qquad x \to -\infty.$$

Teorema (Segunda Regra de L'Hospital). Sejam f e g deriváveis no intervalo $[a, p)$, com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, p)$. Suponhamos

$$\lim_{x \to p^-} |g(x)| = +\infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad (\text{com } L \in \mathbb{R} \text{ ou } L = -\infty \text{ ou } L = +\infty).$$

Então, temos

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

[**Atenção.** A tradicional hipótese $|f(x)| \to +\infty$ se $x \to p^-$, é supérflua.]

Prova.

Simplificações.

◇ Se L é real, podemos supor $L = 1$. Se $L \neq 0$ basta trocarmos g por Lg. Se $L = 0$, basta trocarmos a função f por $F = f + g$ e observarmos que

$$\frac{F'}{g'} = \frac{f'}{g'} + 1 \quad \text{e} \quad \frac{F}{g} = \frac{f}{g} + 1.$$

◇ Como g' não se anula, temos que g é injetora e contínua. Logo, g é estritamente crescente ou estritamente descrescente. Podemos então supor

$$g \text{ estritamente crescente}, \quad g' > 0, \quad \lim_{x \to p^-} g(x) = +\infty \quad \text{e} \quad g > 0.$$

◇ Seja $L = 1$ ou $L = +\infty$. Encolhendo $[a, p)$ se preciso, podemos supor

$$\frac{f'}{g'} > \frac{1}{2} \text{ no intervalo } [a, p) \ \text{ e } \ f' > 0.$$

Pelo TVM generalizado, para todo $x \in (a, p)$ existe $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} > \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(x) - f(a) > \frac{g(x) - g(a)}{2}.$$

As informações já obtidas revelam que temos

$$f \text{ estritamente crescente} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty \quad (\text{podemos supor } f > 0).$$

Com tais simplificações, temos apenas os casos $L = 1$ e $L = +\infty$ para analisar.

$\diamond$ Caso $L = 1$. Seja ϵ, com $0 < \epsilon < 1$. Encolhendo $[a, p)$, podemos supor

$$(1) \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} \in (1 - \epsilon\,, 1 + \epsilon), \text{ para todo } c \in (a, p).$$

Seja $x \in (a, p)$. O TVM generalizado e as hipóteses sobre f e g garantem

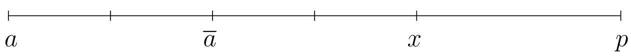
$$(2) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ para algum } c \in (a, p).$$

Observemos que

$$(3) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}{1 - \frac{g(a)}{g(x)}} \right).$$

Temos $\lim g(x) = \lim f(x) = +\infty$, se $x \to p^-$. Para algum $\overline{a} \in (a, p)$ temos,

$$(4) \qquad \text{se } x \in (\overline{a}, p) \text{ então } \frac{1 - \frac{g(a)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon).$$



Utilizando (3), (2), (1) e (4), para todo ponto $x \in (\overline{a}\,, p)$ temos (é trivial)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(\frac{1 - \frac{g(a)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} \right) \in \big((1-\epsilon)^2, (1+\epsilon)^2\big) \subset (1 - 3\epsilon, 1 + 3\epsilon).$$

$\diamond$ Caso $L = +\infty$. Seja $M > 0$. Encolhendo $[a, p)$, se preciso, podemos supor

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} > 2M \text{ para todo } c \in [a, p).$$

Para $\epsilon = 1/2$, seja $\overline{a}$ como em (4). Utilizando (3), (2) e (4) encontramos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(\frac{1 - \frac{g(a)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} \right) > 2M(1 - \epsilon) = M, \text{ para todo } x \in (\overline{a}, p) \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Referências

1. Bressoud, D., *A Radical Approach to Real Analysis*, 2nd ed., MAA, 2007.

2. Browder, A., *Mathematical Analysis, An Introduction*, Springer, 1996.

3. Hainer, E. & Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer, 1996.

4. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1976.

5. Spivak, M., *Calculus*, 4th ed., Publish or Perish, 2008.

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo
Rua do Matão 1010 - CEP 05508-090
São Paulo, SP - Brasil
e-mail: oliveira@ime.usp.br