Ano 2015

TEOREMAS DA FUNÇÃO IMPLÍCITA E DA FUNÇÃO INVERSA: PROVAS FÁCEIS

Baseado em *The Implicit and the Inverse Function Theorems: Easy Proofs*, de Oliveira, Oswaldo. Real Anal. Exchange 39 (2013), no. 1, 207–218.

http://projecteuclid.org/euclid.rae/1404230147.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

htpp://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

1. Notações e Preliminares.

Assumimos, nas provas dos teoremas que seguem, os resultados abaixo.

- (TVI) Teorema do Valor Intermediário.
- (TVM) Teorema do Valor Médio em Várias Variáveis.
- Regra da Cadeia.

Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{f_1, \ldots, f_m\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, em $\mathbb{R}^n$, seu produto interno é

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

A norma de x é $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

A bola aberta de centro x e raio $r > 0$ é $B(x; r) = \{y \text{ em } \mathbb{R}^n : \ |y - x| < r\}$.

Seja Ω um aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$. Dada uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, escrevemos

$$F = (F_1, \ldots, F_m)$$

onde $F_i : \Omega \to \mathbb{R}$ é a i-ésima componente de F para cada $i = 1, \ldots, m$. Dizemos que F é de classe C^1 se F e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em Ω. Notação: $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Denotamos o determinante de uma matriz quadrada M por $\det M$.

Lema 1. *Seja F em $C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n$, e p em Ω tal que* $\det JF(p) \neq 0$. *Então, F restrita a alguma bola $B(p; r)$, onde $r > 0$, é injetora.*

Prova.

A função F é de classe C^1, a função determinante $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é contínua e

$$\det JF(p) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \right) \neq 0.$$

Logo, existe $r > 0$ tal que $\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\xi_{ij}) \right)$ não se anula, para quaisquer pontos ξ_{ij} na bola $B(p; r)$, onde $1 \leq i, j \leq n$.

Sejam a e b distintos em $B(p; r)$. Dado $i = 1, \ldots, n$, pelo TVM existe um ponto c_i no segmento $\overline{ab}$ tal que $F_i(b) - F_i(a) = \langle \nabla F_i(c_i), b - a \rangle$. Donde

$$\begin{pmatrix} F_1(b) - F_1(a) \\ \vdots \\ F_n(b) - F_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(c_1) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(c_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(c_n) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(c_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Como $\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_i) \right) \neq 0$ e $b - a \neq 0$, deduzimos $F(b) \neq F(a)$♣

2. O Teorema Básico da Função Implícita.

Seja (x,y) a variável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 1. *Sejam F em $C^1(\Omega;\mathbb{R})$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, e um ponto (a,b) em Ω tal que $F(a,b)=0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)>0$. Existem um aberto X, contido em $\mathbb{R}^n$ e contendo a, e um aberto Y, contido em $\mathbb{R}$ e contendo b, satisfazendo o que segue.*

- *Para cada x em X, existe um único $y=f(x)$ em Y tal que $F\big(x,f(x)\big)=0$.*
- *Temos $f(a)=b$. Ainda mais, $f:X\to Y$ é de classe C^1 e*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} \ \text{ para todo } x \text{ em } X, \text{ onde } j=1,\ldots,n.$$

Prova. Dividamos a prova em três partes.

◇ Existência e Unicidade. Como temos

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)>0,$$

por continuidade existe um paralelepípedo não degenerado $(n+1)$-dimensional $X'\times[b_1,b_2]$, centrado em (a,b) e contido em Ω, com arestas paralelas aos eixos coordenados tal que $\frac{\partial F}{\partial y}>0$ sobre $X'\times[b_1,b_2]$. A função $F(a,y)$, com y variando em $[b_1,b_2]$, é estritamente crescente e $F(a,b)=0$. Logo, $F(a,b_1)<0$ e $F(a,b_2)>0$. Como F é contínua, existe um paralelepípedo aberto n-dimensional X, centrado em a e contido em X', com arestas paralelas aos eixos tal que para todo x em X temos $F(x,b_1)<0$ e $F(x,b_2)>0$. Fixando x em X e aplicando o TVI à função estritamente crescente $F(x,y)$, com y variando em $[b_1,b_2]$, obtemos um único $y=f(x)$ no intervalo aberto $Y=(b_1,b_2)$ tal que $F(x,f(x))=0$.

◇ Continuidade. Sejam $\overline{b_1}$ e $\overline{b_2}$ tais que $b_1<\overline{b_1}<b<\overline{b_2}<b_2$. Pelo visto acima, existe um aberto X'', contido em X e contendo a, tal que $f(x)$ está no intervalo aberto $(\overline{b_1},\overline{b_2})$, para todo x em X''. Logo, f é contínua em $x=a$. Agora, dado a' em X, seja $b'=f(a')$. Então, $f:X\to Y$ é uma solução do problema $F(x,h(x))=0$, para todo x in X, com a condição $h(a')=b'$. Assim, pelo que acabamos de mostrar, f é contínua em a'.

◇ Diferenciabilidade. Dado x em X, seja e_j o j-ésimo vetor canônico em $\mathbb{R}^n$ e $t \neq 0$ pequeno o suficiente tal que $x + te_j$ pertence a X. Para $P = \big(x, f(x)\big)$ e $Q = \big(x + te_j, f(x + te_j)\big)$, temos $F(P) = F(Q) = 0$. Pelo teorema do valor médio existe $(\overline{x}, \overline{y})$ no segmento $\overline{PQ}$ [contido em $X \times Y$] tal que

$$\begin{aligned} 0 &= F\big(x + te_j, f(x + te_j)\big) - F\big(x, f(x)\big) = \\ &= \tfrac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{y})t + \tfrac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})[f(x + te_j) - f(x)]. \end{aligned}$$

Sabidamente $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são contínuas, com $\frac{\partial F}{\partial y}$ não se anulando em $X \times (b_1, b_2)$, f é contínua e $(\overline{x}, \overline{y}) \to (x, f(x))$ se $t \to 0$. Logo,

$$\frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})} \longrightarrow -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \text{ se } t \to 0.$$

Isto prova a fórmula desejada para $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ e mostra que f é de classe C^1♣

Obs. Localmente, em (a, b), a superfície de nível 0 de F é o gráfico de f. Isto é,

$$\boxed{\Big\{(x, y) \in X \times Y : F(x, y) = 0\Big\} = \mathrm{Gr}(f) = \Big\{(x, f(x)) : x \in X\Big\}.}$$

Prova. Imediata♣

3. A Forma Geral do Teorema da Função Implícita.

Indiquemos

$$\begin{cases} x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \\ y' = (y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}, \\ y = (y_1; y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \\ (x_1, \ldots x_n; y_1, \ldots, y_m) = (x; y) = (x; y_1; y'). \end{cases}$$

Dada $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ diferenciável, Ω aberto em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, pomos $F = (F_1, \ldots, F_m)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le n}}.$$

Teorema 2 (Teorema da Função Implícita). *Seja F em $C^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$, com Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, e (a,b) um ponto em Ω tal que $F(a,b)=0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ é inversível. Então existem um aberto X, contido em $\mathbb{R}^n$ e contendo a, e um conjunto aberto Y, contido em $\mathbb{R}^m$ e contendo b, satisfazendo o que segue.*

- *Para cada x em X, existe um único $y=f(x)$ em Y tal que $F\big(x,f(x)\big)=0$.*
- *Temos $f(a)=b$. Ainda mais, $f:X\to Y$ é de classe C^1 e*

$$Jf(x)=-\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\right]^{-1}_{m\times m}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))\right]_{m\times n}\ \textit{para todo } x \textit{ em } X.$$

Prova. Dividamos a prova em quatro partes.

◇ Achando Y. Definindo $\Phi(x,y)=\big(x,F(x,y)\big)$, para (x,y) em Ω, temos

$$\det J\Phi=\det\left(\begin{array}{c|c} I & 0\\ \hline \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{array}\right)=\det\frac{\partial F}{\partial y},$$

com I a matriz identidade de ordem n e 0 a matriz nula de tamanho $n\times m$. Logo, $\det J\Phi(a,b)\neq 0$. Encolhendo Ω, se preciso, pelo Lema 1 assumimos que Φ é injetora e $\Omega=X'\times Y$, um aberto em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ que contém (a,b).

◇ Existência e diferenciabilidade. Provemos, por indução em m, que o sistema

$$\begin{cases} F_1(x;y_1,\ldots,y_m)=0,\\ F_2(x;y_1,\ldots,y_m)=0,\\ \quad\vdots\\ F_m(x;y_1,\ldots,y_m)=0,\end{cases}\quad\text{com as condições}\quad\begin{cases} y_1(a)=b_1\\ y_2(a)=b_2\\ \quad\vdots\\ y_m(a)=b_m,\end{cases}$$

tem uma solução $f=f(x)$ de classe C^1 em algum aberto contendo a.

O caso $m=1$ já foi feito. Admitamos o resultado válido para $m-1$.

No caso m, pomos $\mathcal{F}=(F_2,\ldots,F_m)$. Consideremos a matriz $M=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ e a bijeção linear associada $\mathcal{M}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$. Pela regra da cadeia, a função

$$G(x;z)=F[x;b+\mathcal{M}^{-1}(z-b)],$$

definida num aberto contendo (a,b), satisfaz $\frac{\partial G}{\partial z}(a;b)=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)M^{-1}=MM^{-1}$ e $G(a;b)=0$. Logo, podemos supor que M é a matriz identidade.

Agora, vejamos a equação $F_1(x; y_1; y') = 0$, onde x e y' são variáveis independentes e y_1 é a variável dependente, sujeita à condição $y_1(a; b') = b_1$. Como $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a; b_1; b') = 1$, pelo Teorema 1 existe uma função $\varphi(x; y')$ de classe C^1 em algum aberto contendo $(a; b')$ e satisfazendo

$$F_1[x; \varphi(x; y'); y'] = 0 \text{ e a condição } \varphi(a; b') = b_1.$$

Destaquemos que $\mathcal{F}[a; \varphi(a; b'); b'] = \mathcal{F}(a; b) = 0 \in \mathbb{R}^{m-1}$.

A seguir, substituindo $y_1 = \varphi(x; y')$ em $\mathcal{F}(x; y_1; y') = 0$, resolvamos o sistema

$$\begin{cases} F_2(x; \varphi(x; y'), y') = 0 \\ \qquad\vdots \\ F_m(x; \varphi(x; y'), y') = 0 \end{cases}, \quad \text{com a condição } \; y'(a) = b'.$$

Diferenciando $\mathcal{F}[x; \varphi(x; y'); y']$, com respeito às variáveis $y_2, \ldots, y_m$, temos

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(a; b)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a; b') + \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a; b) = \; 0 + \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a; b), \text{ onde } 2 \le i, j \le m.$$

A matriz $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a; b)\right)$, onde $2 \le i, j \le m$, é a identidade de ordem $m - 1$. Assim, graças à hipótese de indução, existe um função ψ de classe C^1 em algum aberto X contendo a e satisfazendo

$$\mathcal{F}\big[x; \varphi\big(x; \psi(x)\big), \psi(x)\big] = 0, \text{ para todo } x \in X \text{ e a condição } \psi(a) = b'.$$

Também temos $F_1\big[x; \varphi\big(x; \psi(x)\big); \psi(x)\big] = 0$, para todo x em X. Definindo

$$f(x) = \big(\varphi(x; \psi(x)); \psi(x)\big), \text{ para } x \text{ em } X,$$

temos $F[x; f(x)] = 0$, para todo x em X, e $f(a) = \big(\varphi(a; b'); b'\big) = (b_1; b') = b$, onde f é de classe C^1 sobre X.

◇ Fórmula de Diferenciação. Diferenciando $F[x, f(x)] = 0$ obtemos

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \; + \; \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0, \quad \text{com } 1 \le i \le m \text{ e } 1 \le k \le n.$$

Em forma matricial, escrevemos $\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, f(x)\big) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big) Jf(x) = 0$.

◇ Unicidade. Seja g satisfazendo $F\big(x, g(x)\big) = 0$, para todo x em X, e $g(a) = b$. Dado x em X deduzimos $\Phi(x, g(x)\big) = \big(x, F(x, g(x)\big) = (x, 0) = \Phi\big(x, f(x)\big)$. A injetividade de Φ implica $g(x) = f(x)$, para todo x em X♣

Obs. Localmente, em (a,b), a superfície de nível 0 de F é o gráfico de f. Isto é,

$$\boxed{\Big\{(x,y)\in X\times Y : F(x,y)=0\Big\} = \mathrm{Gr}(f) = \Big\{(x,f(x)) : x\in X\Big\}.}$$

Prova. Imediata$\clubsuit$

4. O Teorema da Função Inversa.

Teorema 3 (Teorema da Função Inversa). *Seja $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 e p em Ω tal que $JF(p)$ é inversível. Existem um aberto X contendo p, um aberto Y contendo $F(p)$, e uma função $G:Y\to X$ de classe C^1 satisfazendo $F\big(G(y)\big)=y$, para todo y in Y, e $G\big(F(x)\big)=x$, para todo x em X. Ainda mais,*

$$JG(y) = JF\big(G(y)\big)^{-1}, \text{ para todo } y \text{ em } Y.$$

Prova.

- Existência. Pelo Lema 3 podemos assumir F injetora. A função

  $$\Phi(x,y) = F(x) - y, \text{ para } (x,y) \text{ em } \Omega\times\mathbb{R}^n,$$

  é de classe C^1, com $\Phi\big(p,F(p)\big)=0$ e $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\big(p,F(p)\big) = JF(p)$.

  O Teorema da Função Implícita garante um aberto Y contendo $F(p)$ e uma função $G:Y\to\Omega$ de classe C^1 tal que $\Phi\big(G(y),y\big) = F\big(G(y)\big) - y = 0$, para todo y em Y. Donde segue

  $$F(G(y)) = y, \text{ para todo } y \text{ em } Y.$$

  Logo, G é bijetora de Y em $X=G(Y)$ e F é bijetora de X em Y. Também temos $X=F^{-1}(Y)$. Sendo F contínua, X é um aberto contendo p.

- Fórmula de diferenciação. Pela regra da cadeia,

  $$JG(F(y))JG(y) = I, \text{ com } I \text{ a matriz identidade } m\times m\clubsuit$$

5. Contra-exemplos e Exemplo.

Mostremos a importância de algumas hipóteses em Teorema 1 e Teorema 3.

Contra-exemplos. *Seja $F(x,y) = x - f(y)$, para todo (x,y) no plano, com*

$$f(y) = \frac{y}{2} + y^2 \sin\frac{1}{y}, \quad \textit{se } y \neq 0, \ \textit{e } f(0) = 0.$$

Algumas observações. Temos

$$f'(y) = 1/2 + 2y\sin\left(\frac{1}{y}\right) - \cos\left(\frac{1}{y}\right), \text{ se } y \neq 0, \text{ e } f'(0) = 1/2.$$

Donde F é diferenciável, $F(0,0) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0.$$

Ainda, fixado x em $\mathbb{R}$, claramente

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, \frac{1}{k\pi}\right) = -f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) = -1/2 + (-1)^k$$

alterna sinais, conforme k assume os valores $1, 2, \ldots$, e portanto, pela teorema do valor intermediário para derivadas (propriedade de Darboux), toda vizinhança de $(0,0)$ contém um ponto no qual $\partial F/\partial y$ se anula. Ainda mais, dada qualquer vizinhança V de 0 na reta, f não é monótona em V e f' se anula em algum ponto em V. Assim, f' não é contínua na origem.

Suponhamos que uma função g satisfaz $F(x, g(x)) = x - f(g(x)) = 0$, para todo x em um intervalo aberto V centrado em 0, e $g(0) = 0$. Então, vale o seguinte.

- ⋄ A função g não é contínua (nem diferenciável). Caso contrário, g é contínua e pela identidade $f(g(x)) = x$, para todo x em V, segue que g é injetora. Donde, g é estritamente monótona e $g(V)$ é vizinhança da origem. Assim, f restrita a $g(V)$ é monótona, contradizendo as observações iniciais.

- ⋄ A função g não é unicamente definida. De fato, como a função contínua f não é monótona em nenhuma vizinhança da origem, segue que f não é injetora em tais vizinhanças. Portanto, a equação $x = f(y)$ não define y unicamente como uma função de x em nenhuma vizinhança da origem.

- ⋄ A função f é diferenciável, com $f'(0) \neq 0$ e não é monótona em nenhuma vizinhança de 0. Logo, f não é inversível em nenhuma vizinhança de 0♣

Exemplo 1. (Vide Knapp [7]). Consideremos o sistema não linear com duas equações e quatro variáveis x, y, w, e z,

$$\begin{cases} xz^3 + y^3w^2 + 2xy & = 0 \\ xywz - 1 & = 0. \end{cases}$$

Tratemos x e y como variáveis independentes e as variáveis w e z como funções nas variáveis x e y. Então, considerando a função

$$F(x,y,w,z) = (xz^3 + y^3w^2 + 2xy, xywz - 1),$$

determinemos, se possível, as derivadas parciais da função em duas variáveis $f(x,y) = \big(w(x,y), z(x,y)\big)$ que satisfaz a equação

$$F\big(x,y,f(x,y)\big) = (0,0).$$

Pela regra da cadeia temos, utilizando matrizes jacobianas,

$$\begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x & 2y^3w & 3xz^2 \\ ywz & xwz & xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e obtemos

$$\begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde segue,

$$(E1.1) \qquad \begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix}.$$

Estas última equação matricial nos permite obter as derivadas parciais de $w(x,y)$ e $z(x,y)$ nos pontos (x,y,w,z) que satisfazem

$$\begin{vmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{vmatrix} \neq 0,$$

e em tais pontos obtemos

$$(E1.2)\qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix}.$$

Ainda mais, indicando F segundo suas funções componentes

$$F = (F_1, F_2),\ \text{com } F_1(x,y,w,z) = xz^3 + y^3w^2 + 2xy \ \text{ e } \ F_2(x,y,w,z) = xywz - 1,$$

reescrevemos a equação (E1.2) como

$$(E1.3)\qquad Jf = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial w} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix},\ \text{ com } Jf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Assim, $-Jf$ é o produto da inversa da matriz das derivadas parciais de F em relação às variáveis dependentes w e z, nesta ordem, pela matriz das derivadas parciais de F em relação às váriaveis independentes x e y, nesta ordem♣

7. Aplicação. Multiplicadores de Lagrange.

O resultado abaixo é local. Por praticidade o enunciamos em todo o espaço.

Escrevamos $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } y \in \mathbb{R}^m\}$.

Teorema 4. *Sejam $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ diferenciável e $g = (g_1, \ldots, g_m)$ em $C^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^m)$. Suponhamos que F tem um extremante local no ponto P em $S = g^{-1}(0,\ldots,0)$ e que $\{\nabla g_1, \ldots, \nabla g_m\}$ é linearmente independente em todo ponto. Então, existem m números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tais que*

$$\nabla F(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(P).$$

Prova.

Suponhamos $P = 0 = (0,0)$. A matriz $Jg(0,0)$ tem posto m e podemos supor

$$\Big[\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(x,y)\Big]$$

inversível. Pelo Teorema da Função Implícita existe $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$, de classe C^1, satisfazendo

$$g\big(x, \varphi(x)\big) = 0,\ \text{para todo } x \text{ no aberto } \Omega \text{ em } \mathbb{R}^n,\ \text{ e } \varphi(0) = 0 \in \mathbb{R}^m.$$

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. As n curvas $\gamma_i(t) = \big(te_i; \varphi(te_i)\big)$, com $i = 1, \ldots, n$, contidas em S e definidas para $|t|$ suficientemente pequeno, satisfazem:

$$\gamma_i(0) = P,\ \gamma_i'(0) \neq 0 \text{ e } \{\gamma_1'(0), \ldots, \gamma_n'(0)\} \text{ é linearmente independente.}$$

Os vetores $\gamma_i'(0)$ e $\nabla g_j(0)$ são ortogonais, para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. É então trivial ver que

$$\{\gamma_1'(0), \ldots, \gamma_n'(0), \nabla g_1(0), \ldots, \nabla g_m(0)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^{n+m}$. Ainda, o vetor $\nabla f(0)$ é ortogonal a cada $\gamma_i'(0)$. Logo, $\nabla f(0)$ é gerado por $\nabla g_1(0), \ldots, \nabla g_m(0)$♣

REFERÊNCIAS

1. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis - A Modern Approach to Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957.

2. G. A. Bliss, A new proof of the existence theorem for implicit functions, *Bulletin of the American Mathematical Society* **18** No. 4 (1912) 175–179.

3. O. de Oliveira, The Implicit and the Inverse Function Theorems: Easy Proofs, *Real Analysis Exchange*, Vol. 39 (2013), no. 1, 207–218. `http://projecteuclid.org/euclid.rae/1404230147`

4. U. Dini, *Lezione di Analisi Infinitesimale*, volume 1, Pisa, 1907, 197–241.

5. P. M. Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, 2nd ed., Pure and Applied Undergraduate Texts vol. 5, American Mathematical Society, Providence, 2009.

6. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 2, 5 ed., Editora LTC.

7. A. W. Knapp, *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2005.

8. S. G. Krantz and H. R. Parks, *The Implicit Function Theorem - History, Theory, and Applications*, Birkhaüser, Boston, 2002.

9. Lima, Elon, *Curso de Análise*, Vol 2, 11 ed., IMPA.

10. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd. ed., McGraw-Hill, Beijing, China, 1976.

11. M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, 1965.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`