TRANSFORMADA DE FOURIER - (Capítulo 6 - Funções Testes e Distribuições)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

Objetivos.

Capítulo 1 - Algumas Motivações e Interpretações.

Capítulo 2 - Ferramentas.

Capítulo 6 - Funções Testes e o Espaço das Distribuições.

Capítulo 7 - Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas.

.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Capítulo 6 - Funções Testes e o Espaço das Distribuições.

6.1 Funções Testes

O espaço das funções testes é o espaço vetorial (complexo) indicado por

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ onde } f \text{ é de classe } C^\infty \text{ e de suporte compacto}\}.$$

Antes de prosseguir, notemos que é bem conhecido o resultado abaixo.

Teorema 6.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f \geq 0$ em todo ponto. Suponha*

$$\int_a^b f(t)dt = 0.$$

Então, f se anula em todo ponto.

Prova. Exercício.

Este simples teorema acima mostra o caminho para estendermos o conceito de função e definirmos distribuições (ou funções generalizadas). No momento, provemos o resultado abaixo.

Teorema 6.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua, satisfazendo*

$$\int f(t)\varphi(t)dt = 0, \quad \textit{para toda função teste.}$$

Então, f se anula em todo ponto.

Prova.

Claramente podemos supor que f é real. Seja $\tau \in \mathbb{R}$. Então, temos

$$\int f(\tau - t)\varphi(t)dt = \int f(s)\varphi(\tau - s)ds = 0 \text{ para toda função teste.}$$

Então, dada uma aproximação da identidade $\{\psi_\epsilon\}$ (e.g., ψ uma gaussiana) temos

$$0 = \int f(\tau - t)\psi_\epsilon(t)dt \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(\tau - 0) = f(\tau) \clubsuit$$

Corolário 6.3. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-integráveis em todo intervalo fechado e limitado e satisfazendo*

$$\int f(t)\varphi(t)dt = \int g(t)\varphi(t)dt, \quad \textit{para toda função teste.}$$

Então, temos $f(t) = g(t)$ em todos os pontos em que f e g são contínuas. Ainda mais, f e g coincidem em todos os pontos exceto um conjunto de medida nula.

Prova.

A primeira afirmação segue analogamente à prova do Teorema 6.2 (cheque). A segunda afirmação é uma consequência do Teorema de Caracterização de Riemann-Lebesgue [vide Capítulo 2 (Ferramentas), seção 2.1] ♣

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-integrável em cada intervalo limitado. A fórmula

$$T_f(\varphi) = \int f(t)\varphi(t)dt, \text{ onde } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

define uma aplicação linear

$$T_f : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}.$$

Pelo Corolário 6.3, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é Riemann-integrável e tal que

$$\{t : f(t) \neq g(t)\} \text{ não tem medida nula}$$

então segue que existe uma função teste φ satisfazendo

$$T_f(\varphi) \neq T_g(\varphi).$$

Donde segue

$$T_f \neq T_g.$$

Então, variando f (e identificando funções que são Riemann-integráveis em cada intervalo limitado e que diferem uma da outra somente em um conjunto de medida nula), vemos que é injetiva (e linear) a associação

$$f \mapsto T_f.$$

Isto mostra que o conjunto das funções que são Riemann integráveis em cada intervalo limitado (e com a identificação acima) é um subconjunto do espaço das aplicações lineares

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}.$$

Assim, até aqui na apresentação, estendemos o já importante conjunto das funções Riemann-integráveis em intervalos limitados a um espaço vetorial "maior".

6.2 Distribuições.

Notemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é Riemann-integrável em intervalos limitados se e somente se f é localmente Riemann-integrável (isto significa que para todo ponto t_0 existe um intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$, com $r > 0$, tal que f é Riemann-integrável em $[t_0 - r, t_0 + r]$).

Definição. Uma **distribuição** (ou **função generalizada**) é um funcional linear

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

que satisfaz a condição de **continuidade**

$$T(\varphi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

para todo sequência (φ_n) contida em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ e tal que

$$\begin{cases} (1) \text{ existe um compacto } K = [a,b] \text{ tal que } \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K, \text{ para todo } n, \\ \text{e} \\ (2)\ D^k\varphi_n = \frac{d^k}{dt^k}(\varphi_n) \xrightarrow{\text{uniformemente}} 0 \text{ para todo } k, \text{ se } n \to \infty. \end{cases}$$

Observemos que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é localmente integrável, então a expressão

$$T_f(\varphi) = \int f(t)\varphi(t)dt, \text{ onde } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

define uma distribuição. De fato, se (φ_n) é uma sequência cumprindo as condições (1) e (2) acima, utilizando a desigualdade triangular para integrais encontramos

$$|T(\varphi_n)| \le \|\varphi_n\|_\infty \int_a^b |f(t)|dt \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Indicamos o **espaço das distribuições** sobre a reta por

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ ou } \mathcal{D}'.$$

Intuitivamente, uma distribuição T é como uma função. Entretanto, T pode ser singular demais para computá-la ponto a ponto. Assim, analisamos suas ações $T(\varphi)$ sobre as funções testes. Apesar de T não ser em geral dada por uma função, é por vezes conveniente a notação (muitos autores a utilizam, mas não todos)

$$T(\varphi) = \int T(x)\varphi(x)dx.$$

[Atenção. É preciso cuidado ao empregar esta notação, pois T é uma distribuição.]

A condição (2) exigida para uma distribuição é uma condição bem fraca (no sentido de que ela é satisfeita pelos funcionais lineares $T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ usualmente encontrados). Via de regra, a condição (2) é trivialmente verificável e em geral deixamos tal tarefa para o leitor.

Dada f e correspondente distribuição T_f, então podemos recuperar f da distribuição T_f. De fato, se t_0 é um ponto de continuidade de f e (φ_ϵ) é uma aproximação da identidade em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ então $t \mapsto \varphi_\epsilon(t - t_0) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e temos

$$T_f[\varphi_\epsilon(t_0 - t)] = \int f(t)\varphi_\epsilon(t_0 - t)dt = f * \varphi_\epsilon(t_0) \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(t_0).$$

Exemplo 6.4. A "função" delta de Dirac

$$\delta(\varphi) = \varphi(0), \text{ onde } \varphi \text{ é uma função teste,}$$

é o mais famoso exemplo de distribuição que não é dada por uma função clássica. Muitos escrevem

$$\delta(\varphi) = \int \delta(t)\varphi(t)dt.$$

O δ de Dirac é então interpretado como uma distribuição de densidade de carga de uma partícula com carga total 1 ao longo do eixo Ox e com toda a carga concentrada na poição $x = 0$. Assim, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_a^b \delta(x)dx = 0 \text{ se } 0 \notin (a, b).$$

Fixado um ponto τ, são bastante práticas as notações integrais simbólicas

$$\int \delta(t - \tau)\varphi(t)dt = \int \delta(s)\varphi(s + \tau)ds = \varphi(0 + \tau) = \varphi(\tau).$$

Também utilizamos as notações rigorosas

$$\delta_\tau(\varphi) = \varphi(\tau) \quad \text{e} \quad \delta_\tau = \delta(\cdot - \tau) = \delta(t - \tau) \clubsuit$$

Por vezes, utilizamos a notação integral simbólica para outras distribuições.

Veremos logo mais que tal extensão (o espaço das funções generalizadas) possui muitas propriedades que o conjunto clássico de funções não possui. Por exemplo, veremos que toda distribuição (função generalizada) é infinitamente derivável.

6.3 Derivação, Translação, Dilatação e Multiplicação por Funções.

Dada uma distribuição T e uma função teste φ, adotemos a notação padrão

$$\langle T, \varphi \rangle \text{ para } T(\varphi).$$

Tal notação revela que T age/atua em φ e que por *dualidade* φ age/atua em T.

Para o delta de Dirac temos

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente Riemann-integrável segue

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f(t)\varphi(t)dt.$$

Então, identificando f com T_f escrevemos

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(t)\varphi(t)dt.$$

Para obter uma expressão para a derivada de uma distribuição, consideremos uma função arbitrária $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Então, temos

$$\langle f', \varphi \rangle = \int f'(t)\varphi(t)dt = f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f(t)\varphi'(t)dt.$$

O produto $f(t)\varphi(t)$ se anula em $\pm\infty$ pois φ tem suporte compacto. Donde segue

$$\langle f', \varphi \rangle = -\int f(t)\varphi'(t)dt.$$

Esta fórmula sugere a definição da derivada de uma distribuição.

A derivada de uma distribuição T é definida por

$$\boxed{\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.}$$

É trivial mostrar que esta definição está bem dada. De fato, φ' é uma função teste. Ainda mais, se (φ_n) é uma sequência de funções testes, todas elas com suporte contido em mesmo compacto, então (cheque)

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, (\varphi_n)' \rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Obviamente, T pode ser derivável tantas vezes quanto necessário. Logo, toda distribuição é infinitamente derivável.

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrável, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e T uma distribuição.

Translação. Seja τ um número real (interpretado como vetor) e a translação

$$f_\tau(t) = f(t - \tau).$$

Segue

$$\int f(t-\tau)\varphi(t)dt = \int f(s)\varphi(s+\tau)ds \int f(s)\varphi_{-\tau}(s)ds.$$

Definimos a translação de T pelo vetor τ por

$$\boxed{\langle T_\tau, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_{-\tau} \rangle.}$$

É trivial mostrar que T_τ é contínuo e portanto uma distribuição (cheque).

Dilatação/Contração. Seja $a \neq 0$. A dilatação de φ pelo fator a é indicada

$$\varphi^{[a]}(t) = \varphi(at).$$

Segue (cheque)

$$\int f(at)\varphi(t)dt = \frac{1}{|a|}\int f(s)\varphi\left(\frac{s}{a}\right)ds = \frac{1}{|a|}\int f(s)\varphi^{[1/a]}(s)ds.$$

Definimos a dilatação de T pelo fator a como

$$\boxed{\langle T^{[a]}, \varphi \rangle = \tfrac{1}{|a|}\langle T, \varphi^{[1/a]} \rangle.}$$

É trivial mostrar que $T^{[a]}$ é contínuo e portanto uma distribuição (cheque).

Multiplicação por Funções Suaves. Seja g uma função de classe C^∞. Segue

$$\int (gf)(t)\varphi(t)dt = \int f(t)(g\varphi)(t)dt.$$

Notemos que $g\varphi$ é uma função teste. Definimos a multiplicação de T por g como

$$\boxed{\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle.}$$

É trivial mostrar que gT é contínuo e portanto uma distribuição (cheque).

Proposição 6.5 (Propriedades Elementare). *Consideremos uma função f em $C^\infty(\mathbb{R})$, um vetor $\tau \in \mathbb{R}$, um número real $a \neq 0$, o operador derivação D e uma distribuição T. Valem as seguintes regras.*

(a) $D(T_\tau) = (DT)_\tau$.

(b) $D(T^{[a]}) = a(DT)^{[a]}$.

(c) $(fT)' = f'T + fT'$.

Prova.

(a) Exercício.

(b) Exercício.

(c) Seja φ uma função teste. Temos,

$$\begin{aligned}
\langle (fT)', \varphi\rangle &= -\langle fT, \varphi'\rangle = -\langle T, f\varphi'\rangle \\
&= -\langle T, (f\varphi)' - f'\varphi\rangle \\
&= -\langle T, (f\varphi)'\rangle + \langle T, f'\varphi\rangle \\
&= \langle T', f\varphi\rangle + \langle f'T, \varphi\rangle \\
&= \langle fT', \varphi\rangle + \langle f'T, \varphi\rangle \\
&= \langle fT' + f'T, \varphi\rangle \ \clubsuit
\end{aligned}$$

Exemplos 6.6. Seja t a variável real. Segue

$$\langle t\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, t\varphi\rangle = 0\varphi(0) = 0.$$

Por outro lado,

$$\langle t\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', t\varphi\rangle = -\langle \delta, (t\varphi)'\rangle = -\varphi(0) = \langle -\delta, \varphi\rangle.$$

Logo,

$$\boxed{t\delta = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{t\delta' = -\delta}.$$

6.4 Derivada de Função X Derivada de Distribuição e a Derivada $H' = \delta$.

Mostremos que dada uma função f de classe C^1, então (como é de suspeitar) a derivada de f no sentido de distribuição coincide com a derivada clássica de f. Assim, o símbolo f' não causa ambiguidade para funções de classe C^1.

Proposição 6.7. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Então segue*

$$(T_f)' = T_{f'}.$$

Prova.

Seja φ uma função teste. Integrando por partes segue

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\int f(t)\varphi'(t)dt = -f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int f'(t)\varphi(t)dt = \langle T_{f'}, \varphi \rangle \ \clubsuit$$

Teorema 6.8. *Seja T uma distribuição tal que*

$$T' = 0.$$

Então, existe uma constante complexa λ tal que $T = \lambda$. Isto é, temos

$$\langle T, \varphi \rangle = \lambda \int \varphi(t)dt, \quad \textit{para toda função teste.}$$

Prova.

Seja φ uma função teste arbitrária. Então, segue

(6.8.1) $$0 = \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle .$$

◇ Caso trivial. Suponhamos

$$\int \varphi(t)dt = 0.$$

Então,

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)ds \quad \text{é uma função teste e} \quad \psi'(t) = \varphi(t).$$

Por (6.8.1) segue

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi' \rangle = 0.$$

◇ Caso geral. Fixemos uma função teste ρ tal que

$$\int \rho(t)dt = 1.$$

Dada uma função teste φ, consideremos a função teste (cheque)

$$\Phi(t) = \varphi(t) - \rho(t) \int \varphi(s)ds.$$

A integral de Φ sobre a reta vale zero (cheque). Pelo caso trivial temos

$$\langle T, \Phi \rangle = 0.$$

Donde segue

$$\langle T, \varphi \rangle = \lambda \int \varphi(s)ds, \quad \text{onde} \quad \lambda = \langle T, \rho \rangle \ \clubsuit$$

A seguir, mostremos que o reverso da Proposição 6.8 também é verdadeiro.

Teorema 6.9 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua. Suponhamos que, no sentido de distribuições, a derivada f' é dada por uma função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Então, a função f é de classe C^1 e satisfaz*

$$f'(t) = g(t), \ \textit{para todo} \ t \in \mathbb{R}.$$

Prova.

Seja φ uma função teste. Por hipótese e por definição, nesta ordem, temos

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \quad \text{e} \quad \langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo existe $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $G' = g$. Notemos que G é de classe C^1. Pelas identidades acima e pela proposição 6.7 (nesta ordem) segue

$$-\langle f, \varphi' \rangle = \langle G', \varphi \rangle = -\langle G, \varphi' \rangle.$$

Segue também

$$0 = \langle T_{f-G}, \varphi' \rangle = -\langle (T_{f-G})', \varphi \rangle.$$

Então, pelo Teorema 6.8 existe uma constante complexa λ tal que

$$T_{f-G} = \lambda \ \text{ e então } \quad \int (f - G - \lambda)(t)\varphi(t)dt = 0, \ \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Donde segue $f(t) = G(t) + \lambda$, para todo t, e portanto que f é de classe C^1 ♣

Seja φ uma função teste. A derivada (no sentido de distribuições) da função de Heaviside [vide figura abaixo] satisfaz

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(t)dt = -\varphi(t)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \,.$$

Logo,

$$\boxed{H' = \delta \,.}$$

No sentido de função, temos o gráfico para a função de Heaviside

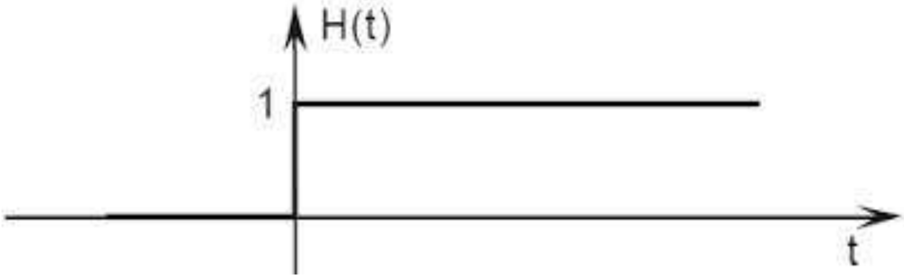

Figura 1: A função de Heaviside.

No sentido de função, temos a derivada

$$H'(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0, \\ \text{não existe}, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Façamos duas observações.

Primeira. No sentido de distribuições, a derivada $H' = \delta$ concorda com a intuição de que a distribuição H' é nula em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ [isto é, a distribuição H' se anula em toda função teste com suporte disjunto da origem] e portanto herda a propriedade de a função $H'(t)$ ser nula em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Segunda. A função $H(t)$ tem uma descontinuidade do tipo salto na origem e "salta" de 0 para 1. Então, intuitivamente, a derivada da função $H(t)$ na origem vale $+\infty$. [Adotando $H(0) = 1/2$ as derivadas laterais à direita e à esquerda valem $H'_+(0) = H'_-(0) = +\infty$ e efetivamente temos $H'(0) = +\infty$, e certamente este é um motivo para vários autores definirem $H(0) = 1/2$.] Assim, interpretamos que a distribuição H' "vale" $+\infty$ na origem.

Estas duas observações mostram intuitivamente a fórmula $H' = \delta$.

A seguir, estudemos funções com descontinuidade do tipo salto. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ suave por partes [vide Capítulo 4 - seção 4.1]. Para distinguir, indiquemos

f' a derivada no sentido de distribuições e $f^{(1)}$ a derivada no sentido de função.

Proposição 6.10. *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ suave por partes (isto é, de classe C^1 por partes) e diferenciável em todo ponto $t\neq 0$ (em particular, f é contínua fora da origem). Suponhamos que f tem uma descontinuidade (obrigatoriamente do tipo salto) na origem. Então, segue*

$$f' = [f(0+)-f(0-)]\delta + f^{(1)} \quad \textit{ou, ainda,} \quad (T_f)' = [f(0+)-f(0-)]\delta + T_{f^{(1)}}.$$

Prova.

Seja φ uma função teste. Então,

$$\begin{aligned}
\langle f',\varphi\rangle &= -\int f(t)\varphi'(t)dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t)\varphi'(t)dt - \int_{0}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt\\
&= -f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f'(t)\varphi(t)dt - f(t)\varphi(t)\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt\\
&= -f(0-)\varphi(0) + f(0+)\varphi(0) + \int f'(t)\varphi(t)dt.\\
&= \Big\langle [f(0+)-f(0-)]\delta + f^{(1)}, \varphi\Big\rangle \ \clubsuit
\end{aligned}$$

Teorema 6.11. *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe C^1 por partes (isto é, suave por partes) e com descontinuidades (obrigatoriamente isoladas) em $t_1, t_2, \ldots$. Seja $f^{(1)}$ a derivada clássica de f, a qual existe e é contínua exceto nos pontos $t_{j's}$ e possivelmente em um outro conjunto (contável e isolado) de pontos nos quais $f^{(1)}$ tem descontinuidade do tipo salto. Seja $f' = (T_f)'$ a distribuição derivada de f. Então, temos*

$$\langle f',\varphi\rangle = \int f^{(1)}(t)\varphi(t)dt + \sum \Big[f(t_j+) - f(t_j-)\Big]\varphi(t_j), \quad \textit{para toda função teste } \varphi.$$

Isto é,

$$f'(t) = f^{(1)}(t) + \sum\Big[f(t_j+)-f(t_j-)\Big]\delta(t-t_j) \ \textit{ ou } \ (T_f)' = T_{f^{(1)}} + \sum\Big[f(t_j+)-f(t_j-)\Big]\delta(t-t_j).$$

Prova.

Seja φ uma função teste. Podemos supor $\text{supp}(\varphi) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$. Então a função f tem no máximo uma quantidade finita de descontinuidades em $[a,b]$, as quais podemos supor contidas em $\{t_1, \ldots, t_N\}$ para algum N. Podemos supor, sem perda de generalidade,

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N < b.$$

Então segue

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt \\
&= -\int_a^{t_1} f(t)\varphi'(t)dt - \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)\varphi'(t)dt - \int_{t_N}^b f(t)\varphi'(t)dt \\
&= -f(t)\varphi(t)\Big|_a^{t_1} + \int_a^{t_1} f^{(1)}(t)\varphi(t)dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \left[-f(t)\varphi(t)\Big|_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f^{(1)}(t)\varphi(t)dt \right] \\
&\quad -f(t)\varphi(t)\Big|_{t_N}^{b} + \int_{t_N}^b f^{(1)}(t)\varphi(t)dt \\
&= -f(t_1-)\varphi(t_1) + \sum_{j=1}^{N-1} \left[-f(t_{j+1}-)\varphi(t_{j+1}) + f(t_j+)\varphi(t_j) \right] + f(t_N+)\varphi(t_N) \\
&\quad + \int_a^b f^{(1)}(t)\varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\langle f', \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{N} \left[f(t_j+) - f(t_j-) \right] \varphi(t_j) + \int f^{(1)}(t)\varphi(t)dt. \tag{6.11.1}$$

Se $k > n$, então t_k não pertence ao intervalo $[a,b]$, pois $t_1, \ldots, t_n$ são todos os pontos de descontinuidade de f no intervalo $[a,b]$. Portanto temos

$$\varphi(t_k) = 0 \text{ se } k > N.$$

Donde segue

$$\langle f', \varphi \rangle = \sum \left[f(t_j+) - f(t_j-) \right] \varphi(t_j) + \int f^{(1)}(t)\varphi(t)dt.$$

Para finalizar, basta notar que

$$\varphi(t_j) = \langle \delta, \varphi(t + t_j) \rangle = \langle \delta(t - t_j), \varphi \rangle \; \clubsuit$$

6.5 Convergência.

Dizemos que uma sequência de distribuições (T_n) **converge fracamente**, ou no **sentido de distribuições**, a uma distribuição T se

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle T, \varphi \rangle\,, \text{ para toda função teste.}$$

Analogamente, se $\{T_\lambda\}$ é uma família de distribuições indexadas no parâmetro real λ, dizemos que $\{T_\lambda\}$ converge fracamente à distribuição T, onde $\lambda \to \lambda_0$, se

$$\langle T_\lambda, \varphi \rangle \xrightarrow{\lambda\to\lambda_0} \langle T, \varphi \rangle\,, \text{ para toda função teste.}$$

Neste caso, escrevemos (brevemente)

$$T_\lambda \xrightarrow{\mathcal{D}'} T.$$

A terminologia *convergência fraca* é apropriada, pois dada uma sequência (f_n) de funções localmente integráveis (uma exigência branda) que converge à função localmente integrável f no sentido (também uma exigência branda)

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

então temos (cheque)

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f.$$

[Com a teoria da integração de Lebesgue e o teorema da convergência dominada de Lebesgue, é trivial mostrar que se a sequência (f_n) apenas e tão somente converge simplesmente à função f e satisfaz $|f_n(t)| \leq |g(t)|$, para todo n e todo t, onde g é localmente Lebesgue integrável, então vale a convergência $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$.]

Notemos que se $f_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} f$ sobre os intervalos limitados, então $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$.

Ainda mais, suponhamos que f e cada f_n são de quadrados integráveis em cada intervalo limitado $[a,b]$ e que, utilizando a pseudo-norma $\|\cdots\|_2$, satisfazem

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Então, a desigualdade de Cauchy-Schwartz garante que

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt = \int_a^b 1.|f_n(t) - f(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b 1^2 dt}\sqrt{\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt}.$$

Donde segue, pelos comentário acima,

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f.$$

Exemplo. Consideremos a sequência de funções $e^{2\pi int}$, com $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Então,

$$e^{2\pi int} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ no sentido de distribuições.}$$

Prova.

Seja φ uma função teste. Pelo lema de Riemann-Lebesgue segue

$$\left\langle e^{2\pi int}, \varphi \right\rangle = \int e^{2\pi int}\varphi(t)dt = \widehat{\varphi}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \clubsuit$$

Exemplo. Com o parâmetro $\epsilon > 0$, consideremos a família de funções

$$H_\epsilon(t) = \begin{cases} e^{-\epsilon t}, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Seja H a função de Heaviside. Então,

$$\lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon(t) = H(t) \quad \text{e} \quad H_\epsilon \xrightarrow{\text{fracamente}} H.$$

Prova.

O primeiro limite é óbvio. A seguir, seja φ uma função teste. Então temos

$$\langle H_\epsilon, \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{-\epsilon t}\varphi(t)dt.$$

A função

$$(\epsilon, t) \mapsto e^{-\epsilon t}\varphi(t) \text{ é contínua em } [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

e satisfaz a desigualdade

$$|e^{-\epsilon t}\varphi(t)| \leq |\varphi(t)| \text{ para quaisquer } \epsilon \text{ e } t \text{ em } [0, \infty).$$

O teorema da continuidade sob o sinal de integração mostra que

$$\epsilon \mapsto \int_0^\infty e^{-\epsilon t}\varphi(t)dt \text{ é contínua em } [0, +\infty).$$

Logo,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon t}\varphi(t)dt = \int_0^\infty \varphi(t)dt.$$

Isto é,

$$\langle H_\epsilon, \varphi \rangle \xrightarrow{\epsilon\to 0} \langle H, \varphi \rangle.$$

Concluímos então que

$$H_\epsilon \xrightarrow{\text{fracamente}} H \clubsuit$$

Proposição 6.12. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável e tal que*

$$\int f(t)dt = 1.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{t}{\epsilon}\right).$$

Então,

$$f_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta.$$

Prova.

Segue diretamente do Teorema 5.6 (convergência pontual), item (ii) ♣

Teorema 6.13 (Continuidade do Operador Derivação). *Seja (T_n) uma sequência de distribuições tal que $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$. Então,*

$$(T_n)' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'.$$

Prova.

Seja φ uma função teste. Devido à hipótese, segue

$$\langle (T_n)', \varphi \rangle = -\langle T_n, \varphi' \rangle \xrightarrow{n\to\infty} -\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle \quad ♣$$

Comentários. Seja D o operador derivação e t a variável real.

(1) **Convergência de Funções X Convergência de Distribuições.** O Teorema 6.13 exibe uma diferença marcante entre convergência no sentido de funções e convergência no sentido de distribuições. Se uma sequência de funções (f_n) converge pontualmente (i.e., simplesmente) ou uniformemente a uma função f, não é possível afirmar que a sequência das derivadas $Df_1, Df_2, \ldots$ existe. Caso tais derivadas existam, não podemos afirmar que a respectiva sequência Df_n converge a alguma função. Caso a sequência Df_n convirja a uma função, não podemos garantir que a derivada $Df = f'$ existe. Caso a sequência Df_n convirja a uma função e a derivada $Df = f'$ exista, ainda assim não podemos garantir que Df_n converge a $Df = f'$.

Como exemplo, consideremos a sequência de funções

$$f_n(t) = \frac{\cos nt}{n}.$$

Temos

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{n} \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e para todo } n \geq 1.$$

Logo, $f_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} 0$. Donde segue

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0 \quad \text{e então} \quad Df_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0.$$

Entretanto, no sentido de funções, a sequência numérica

$$(Df_n)(t) = f_n'(t) = -\sin nt \text{ não converge, exceto nos pontos } t \in \pi\mathbb{Z}.$$

Observemos também que dada uma função teste φ então temos

$$\langle Df_n, \varphi \rangle = -\int (\sin nt)\varphi(t)dt$$

e

$$-\int (\sin nt)\varphi(t)dt = -\int \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}\varphi(t)dt = \frac{\widehat{\varphi}(n) - \widehat{\varphi}(-n)}{2i}.$$

O que também mostra, com o Lema de Riemann-Lebesgue, que

$$\int \varphi(t) \sin nt \, dt \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

(2) **Interpretando as Derivadas de δ.** Consideremos uma aproximação da identidade $\{f_\epsilon\}$ como na Proposição 6.12. Então segue

$$D^j f_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} D^j \delta = \delta^{(j)}.$$

Escolhendo $\{f\}$ como uma função simples e esboçando os gráficos das funções f_ϵ, conquistamos uma boa intuição sobre as derivadas do δ de Dirac. Escolhamos (com era de esperar) a gaussiana

$$f(t) = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Temos

$$(a) \quad f_\epsilon(t) = \frac{e^{-t^2/\epsilon^2}}{\epsilon\sqrt{\pi}}.$$

Donde segue

$$(b)\quad f_\epsilon'(t) = \frac{-2t}{\epsilon^3\sqrt{\pi}}e^{-t^2/\epsilon^2} \qquad \text{e} \qquad (c)\quad tf_\epsilon'(t) = \frac{-2t^2}{\epsilon^3\sqrt{\pi}}e^{-t^2/\epsilon^2}.$$

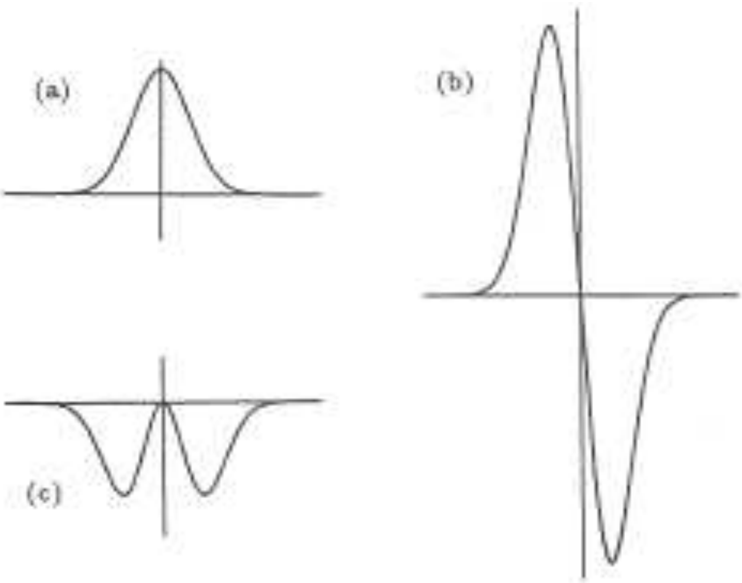

Figura 2: Os gráficos das funções definidas em (a), (b) e (c), respectivamente.

O gráfico (b) de f_ϵ' tem um salto positivo à esquerda da origem e um salto negativo à direita da origem. Se τ é um ponto de máximo/mínimo de f_ϵ' então

$$f_\epsilon''(\tau) = 0, \quad \pm\sqrt{2}\tau = \epsilon \quad \text{e} \quad f_\epsilon'(\tau) = \pm\frac{1}{\epsilon^2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)e^{-1/2}.$$

A altura destes saltos é então proporcional a $\frac{1}{\epsilon^2}$ e a área entre estes saltos e o eixo Ox é proporcional a $1/\epsilon$, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon'(t)|dt = -2f_\epsilon(t)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = -2\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\right] = \frac{2}{\epsilon\sqrt{\pi}},$$

em contraste com f_ϵ cuja altura é proporcional a $1/\epsilon$ e a área é constante. As abscissas dos centros de massas desses saltos são

$$\pm\frac{\int_0^{+\infty} tf_\epsilon'(t)dt}{\int_0^{\infty} |f_\epsilon'(t)|dt} = \pm\frac{\int_0^{+\infty} tf_\epsilon'(t)dt}{\frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}} = \pm\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}} = \pm\frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2}.$$

Desta forma, podemos interpretar estes saltos aproximadamente como

deltas de Dirac centrados em $\pm\,\dfrac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2}$ e escalonados pelo fator $\dfrac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}$.

Assim, o efeito de integrar f'_ϵ contra uma função teste φ é aproximadamente

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}\int\left[\delta\left(t+\frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2}\right)\right]\varphi(t)dt=\frac{\varphi\left(-\frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2}\right)}{\epsilon\sqrt{\pi}}.$$

O TVM mostra que

$$\frac{\varphi\left(-\frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\epsilon\sqrt{\pi}}{2}\right)}{\epsilon\sqrt{\pi}}\xrightarrow{\epsilon\to 0}-\varphi'(0),$$

o que efetivamente concorda com o limite

$$f'_\epsilon\longrightarrow-\delta',\ \text{no sentido de distribuições.}$$

Aproximações análogas também propiciam um melhor entendimento da identidade [exemplo dado em "multiplicação por funções suaves"]

$$t\delta'=-\delta.$$

Novamente utilizando a gaussiana

$$f(t)=\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

encontramos

$$tf'_\epsilon(t)=\frac{-2t^2}{\epsilon^3\sqrt{\pi}}e^{-t^2/\epsilon^2}=g_\epsilon(t),\quad\text{onde } g(t)=\frac{-2t^2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}.$$

Integração por partes nos mostra que

$$\int g(t)dt=-\int f(t)dt=-1.$$

Portanto, resultados sobre aproximação da identidade garantem que

$$g_\epsilon\xrightarrow{\mathcal{D}'}-\delta\text{ se }\epsilon\to 0.$$

A Figura 2(c) revela que: $tf'_\epsilon(t)$ tem um par de saltos negativos próximos à origem e a área entre os saltos e o eixo Ox é 1. Conforme $\epsilon\to 0$, então $tf'_\epsilon(t)$ se aproxima de $-\delta$.

Como regra geral, passamos a entender melhor uma distribuição quando a aproximamos por funções suaves. Para felicidade geral da nação, toda distribuição pode ser aproximada desta forma. Vejamos a seguir.

6.6 Convolução e Aproximação.

Seja φ uma função teste e um vetor (um número) τ na reta. Então, efetuando uma translação e então uma reflexão vemos que a função

$$t \mapsto \varphi(\tau - t) = (\varphi^{-})_h(t)$$

também é uma função teste. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente Riemann-integrável. Segue então a convergência do produto de convolução

$$f * \varphi(\tau) = \int f(t)\varphi(\tau - t)dt.$$

Baseados nesta fórmula damos a definição abaixo.

Definição. *Consideremos uma distribuição T e uma função teste φ. Seja t a variável na reta. O* **produto de convolução de T por φ** *é a função*

$$\boxed{T * \varphi(\tau) = \langle T, \varphi(\tau - t)\rangle\,, \quad \text{em cada ponto } \tau \in \mathbb{R}.}$$

É também usual a omissão da variável t, trocando a por "$\cdot$", e escrever

$$\boxed{T * \varphi(\tau) = \langle T, \varphi(\tau - \cdot)\rangle.}$$

Abusando da notação e mantendo a atenção, escreve-se também

$$T * \varphi(\tau) = \int T(t)\varphi(\tau - t)dt.$$

Seja D o operador derivação.

Teorema 6.14. *Com as notações acima, a função $T * \varphi$ é de classe C^∞ e*

$$\boxed{D^j(T * \varphi) = T * D^j\varphi.}$$

Prova.

◇ Fixemos τ e seja h real tal que $0 < |h| < 1$. Seja t a variável real. Temos

$$(6.14.1) \qquad \frac{T * \varphi(\tau + h) - T * \varphi(\tau)}{h} = \left\langle T, \frac{\varphi(\tau + h - t) - \varphi(\tau + h - t)}{h}\right\rangle.$$

Consideremos a família de funções

$$(6.14.2) \qquad \psi_h(t) = \frac{\varphi(\tau - t + h) - \varphi(\tau - t)}{h}, \text{ onde } 0 < |h| < 1.$$

É trivial ver que existe $r > 0$ satisfazendo (cheque)

$$\text{supp}(\psi_h) \subset [-r, r], \text{ para todo } 0 < |h| < 1.$$

Pelo teorema do valor médio existe θ, com $0 < \theta < 1$, tal que

$$\left|\frac{\varphi(\tau - t + h) - \varphi(\tau - t)}{h} - \varphi'(\tau - t)\right| = \left|\varphi'(\tau - t + \theta h) - \varphi'(\tau - t)\right|.$$

Como φ' tem suporte compacto e é portanto uniformemente contínua na reta, a identidade acima mostra

$$\psi_h(t) = \frac{\varphi(\tau - t + h) - \varphi(\tau - t)}{h} \xrightarrow{\text{uniformemente}} \varphi'(\tau - t) \text{ se } h \to 0.$$

Trocando φ por $\varphi', \varphi'', \ldots$ obtemos

$$\psi_h^{(j)}(t) \xrightarrow{\text{uniformemente}} \varphi^{(j+1)}(\tau - t) \text{ para todo } j, \text{ se } h \to 0.$$

Portanto, pela definição de continuidade de uma distribuição segue

$$\langle T, \psi_h \rangle \xrightarrow{h \to 0} \langle T, \varphi'(\tau - t) \rangle.$$

Tal limite e as equações (6.14.1) e (6.14.2) garantem

$$\frac{T * \varphi(\tau + h) - T * \varphi(\tau)}{h} \xrightarrow{h \to 0} \langle T, \varphi'(\tau - t) \rangle.$$

Isto é, a função $T * \varphi$ é derivável e

$$(T * \varphi)'(\tau) = \langle T, \varphi'(\tau - t) \rangle = T * \varphi'(\tau).$$

◇ Podemos derivar infinitamente e então obtemos a fórmula anunciada ♣

Lema 6.15. *Sejam T uma distribuição e φ e ψ funções testes. Então temos*

$$\boxed{\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \varphi^- * \psi \rangle, \quad \text{com } \varphi^-(t) = \varphi(-t) \text{ o reverso de } \varphi.}$$

Abusando da notação e mantendo a atenção, escreve-se também

$$\int (T * \varphi)(t)\psi(t)dt = \int T(\tau)(\varphi^- * \psi)(\tau)d\tau.$$

Prova.

Existe $N > 0$ tal que $\text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\varphi^-) \cup \text{supp}(\psi) \cup \text{supp}(\varphi^- * \psi) \subset [-N, N]$. Observemos que $\varphi^-(\tau - t) = \varphi(t - \tau)$.

Consideremos as somas de Riemann (apenas aparentemente infinitas)

$$\text{(6.15.1)} \qquad S_m(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{m} - \tau\right) \psi\left(\frac{k}{m}\right) \frac{1}{m}, \text{ onde } m = 1, 2, \ldots.$$

Cada S_m é dada por uma soma finita e só interessam parcelas com $|k| \le mN$.

Cada S_m é de classe C^∞, com $\text{supp}(S_m) \subset [-2N, 2N]$, independente de m.

Com todas as somas abaixo dependendendo de somente uma quantidade finita de parcelas (para $k = -mN, \ldots, 0, \ldots, mN$), escrevemos

$$\begin{aligned} S_m(\tau) - (\varphi^- * \psi)(\tau) &= S_m(\tau) - \int \varphi(t-\tau)\psi(t)dt \\ &= \sum_k \varphi\left(\frac{k}{m} - \tau\right)\psi\left(\frac{k}{m}\right)\frac{1}{m} - \sum_k \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \varphi(t-\tau)\psi(t)dt. \\ &= \sum_k \left[\varphi\left(\frac{k}{m} - \tau\right)\psi\left(\frac{k}{m}\right)\frac{1}{m} - \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \varphi(t-\tau)\psi(t)dt\right]. \end{aligned}$$

Pelo primeiro TVM para integrais, existe $\theta = \theta(m,k,\tau) \in (0,1)$ tal que

$$\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \varphi(t-\tau)\psi(t)dt = \varphi\left(\frac{k}{m} - \tau + \frac{\theta}{m}\right)\psi\left(\frac{k}{m} + \frac{\theta}{m}\right)\frac{1}{m}.$$

Donde então segue

$$S_m(\tau) - (\varphi^- * \psi)(\tau) = \sum_k \left[\varphi\left(\frac{k}{m} - \tau\right)\psi\left(\frac{k}{m}\right) - \varphi\left(\frac{k}{m} - \tau + \frac{\theta}{m}\right)\psi\left(\frac{k}{m} + \frac{\theta}{m}\right)\right]\frac{1}{m}.$$

Notemos que a função infinitamente derivável, com suporte compacto,

$$(t,\tau) \mapsto \varphi(t-\tau)\psi(t)$$

é uniformemente contínua. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $M \geq 1$ tal que temos

$$|\varphi(t_1 - \tau)\psi(t_1) - \varphi(t_2 - \tau)\psi(t_2)| \leq \epsilon \text{ se } |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{M}.$$

Seja $m \geq M$. Destacando as parcelas não nulas na soma para S_m, temos

$$|S_m(\tau) - (\varphi^- * \psi)(\tau)| = \sum_{|k| \leq mN} \frac{\epsilon}{m} = \epsilon N.$$

Isto mostra que S_m converge uniformemente à função $\varphi^- * \psi$, para $m \to \infty$. Trocando, na equação (6.15.1), a função φ por $-\varphi', \varphi'', -\varphi''', \ldots$ segue que

$$D^j S_m \xrightarrow{\text{uniformemente}} D^j(\varphi^- * \psi) \text{ se } m \to \infty, \text{ para todo } j.$$

Então, pela condição de continuidade para distribuições,

$$\langle T, S_m \rangle \xrightarrow{m \to \infty} \langle T, \varphi^- * \psi \rangle.$$

Por outro lado, pela equação (6.15.1) segue a identidade

$$\langle T, S_m \rangle = \sum_k \left\langle T, \varphi\left(\frac{k}{m} - \cdot\right)\right\rangle \psi\left(\frac{k}{m}\right)\frac{1}{m} = \sum_k (T * \varphi)\left(\frac{k}{m}\right)\psi\left(\frac{k}{m}\right)\frac{1}{m}.$$

Para finalizar, é trivial ver que (pois ψ tem suporte compacto)

$$\langle T, S_m \rangle = \sum_k (T * \varphi)\left(\frac{k}{m}\right)\psi\left(\frac{k}{m}\right)\frac{1}{m} \xrightarrow{m \to \infty} \int (T * \varphi)(\tau)\psi(\tau)d\tau = \langle T * \varphi, \psi \rangle \clubsuit$$

Teorema 6.16. *Seja $T \in \mathcal{D}'$. Consideremos uma função teste φ, com*

$$\int \varphi(t)dt = 1, \quad \text{e} \quad \varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{t}{\epsilon}\right).$$

Então,

$$T * \varphi_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} T.$$

Prova.

Consideremos a função reversa $\varphi^-(t) = \varphi(-t)$. É claro que

$$\int \varphi^-(t)dt = 1.$$

Ainda, temos

$$(\varphi_\epsilon)^- = (\varphi^-)_\epsilon$$

portanto podemos escrever φ_ϵ^-.

Assim, para toda função teste ψ segue

$$\varphi_\epsilon^- * \psi \xrightarrow{\text{uniforme}} \psi \quad \text{e} \quad D^j\big[\varphi_\epsilon^- * \psi\big] = \varphi_\epsilon^- * D^j\psi \xrightarrow{\text{uniforme}} D^j\psi.$$

Se $\epsilon \leq 1$ então todas as funções $\varphi_\epsilon^- * \psi$ estão suportadas em um mesmo compacto (cheque). Então, pelo Lema 6.15 segue

$$\langle T * \varphi_\epsilon, \psi\rangle = \langle T, \varphi_\epsilon^- * \psi\rangle \xrightarrow{\epsilon\to 0} \langle T, \psi\rangle \clubsuit$$

Comentário. Aproximar distribuições por funções nos permite uma outra prova (que lembra a prova clássica) do resultado "Se $T' = 0$, então T é constante."

Seja φ_ϵ uma aproximação da identidade, com φ uma função teste [cuja integral vale 1]. Pelos teoremas 6.13, 6.14 e 6.16 temos que

$$\varphi_\epsilon * T \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad (\varphi_\epsilon * T)' = \varphi_\epsilon * T', \quad \varphi_\epsilon * T \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \quad \text{e} \quad \varphi_\epsilon * T' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'.$$

Por hipótese, temos $T' = 0$. Donde segue $(\varphi_\epsilon * T)' = \varphi_\epsilon * T' = 0$. Assim, $\varphi_\epsilon * T$ é uma constante λ_ϵ. Pelo primeiro limite em destaque, segue

$$\lambda_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} T.$$

Consideremos a função φ [cuja integral vale 1]. Vale o limite

$$\langle \lambda_\epsilon, \varphi\rangle \xrightarrow{\epsilon\to 0} \langle T, \varphi\rangle \qquad \text{e então} \qquad \lambda_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} \lambda, \text{ com } \langle T, \varphi\rangle.$$

Por fim, para uma arbitrária função teste ψ, encontramos

$$\langle T, \psi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\langle \lambda_\epsilon, \psi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int \lambda_\epsilon \psi(t)dt = \langle \lambda, \psi\rangle \clubsuit$$

6.7 Distribuições e Equações Diferenciais.

O resultado a seguir, apesar de não essencial a uma introdução à transformadas de Fourier, é altamente recomendável a uma introdução à teoria das distribuições. De certa forma, podemos compará-lo com o papel desempenhado pelos números complexos em análise real.

Como princípio, *dada uma equação diferencial clássica, basta resolve-la no sentido de distribuições.* Determinados resultados garantem que, sob certas condições, a solução encontrada é de fato uma função clássica. Vejamos um exemplo básico.

Passemos a indicar uma distribuição pela letra u.

Teorema. 6.17 *Consideremos a equação, na indeterminada u, dada por*

$$u' + au = f,$$

onde $f = f(t)$ é uma função contínua na reta e $a = a(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Suponhamos que exista uma solução u no sentido de distribuições. Então,

$$u \in C^1(\mathbb{R}) \ \text{ e } \ u \ \text{ é uma solução clássica.}$$

Prova.

Consideremos a função fator integrante

$$A(t) = e^{\int_{-\infty}^{t} a(s)ds}.$$

Utilizando propriedades elementares [proposição 6.5 (c)], segue

$$[A(t)u]' = A'u + Au' = aAu + Au' = A(u' + au) = Af.$$

Seja $F(t)$ uma primitiva de $A(t)f(t)$. No sentido de distribuições, temos [vide proposição 6.7]

$$F' = Af = (Au)'.$$

Pelo Teorema 6.8 segue que existe uma constante complexa λ tal que

$$F - Au = \lambda.$$

Logo,

$$u = e^{-\int_{-\infty}^{t} a(s)ds}(F(t) - \lambda) \clubsuit$$

6.8 Caracterização da Continuidade de uma Distribuição.

No espaço das funções testes $C_c^\infty(\mathbb{R})$, definimos a família de **normas**

$$p_n(\varphi) = \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty + \cdots + \|\varphi^{(n)}\|_\infty. \text{ onde } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \text{ para } n = 1, 2, \ldots.$$

Teorema 6.18. *Seja $T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então, T é contínuo (no sentido de distribuições) se e somente para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$ existem uma constante $C > 0$ e uma norma p_N tais que temos*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C p_N(\varphi), \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ com } supp(\varphi) \subset K.$$

[Isto é, T é contínuo em relação à norma p_N (respeitada a condição sobre K).]
Prova.

($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Seja T contínuo no sentido de distribuições. Suponhamos que a afirmação é falsa. Então, existe um compacto K satisfazendo a seguinte condição: para todo natural n, existe uma função teste φ_n (suportada em K) tal que

$$|\langle T, \varphi_n\rangle| > n p_n(\varphi_n).$$

Então, cada função teste
$$\psi_n = \frac{\varphi_n}{|\langle T, \varphi_n\rangle|}$$
tem suporte em K. Dividindo a última desigualdade por $|\langle T, \varphi_n\rangle|$ segue

$$1 > n p_n(\psi_n).$$

Fixemos uma arbitrário natural j. Para todo $n \geq j$ temos

$$\|D^j\psi_n\|_\infty \leq \|D^0\psi_n\|_\infty + \cdots + \|D^n\psi_n\|_\infty = p_n(\psi_n) < \frac{1}{n}.$$

Logo, cada ψ_n está suportada em K e $D^j\psi_n \to 0$ uniformemente se $n \to \infty$.

A continuidade de T garante

$$\langle T, \psi_n\rangle \to 0, \quad \text{porém} \quad |\langle T, \psi_n\rangle| = 1 \ \lightning$$

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
3. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).
4. Lang, S. *Complex Analysis*, 4th ed., Springer, 1999
5. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
6. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.
7. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

$\varnothing$

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`