TRANSFORMADA DE FOURIER (Capítulo 4 - O Valor Principal e $\widehat{f}$)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

Objetivos.

Capítulo 1 - Introdução.

Capítulo 2 - Ferramentas.

Capítulo 3 - Transformada de Fourier.

Capítulo 4 - A Transformada de Fourier Estendida como Valor Principal.

Capítulo 5 - Produto de Convolução e Aproximação da Identidade.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Capítulo 4 - A Transformada de Fourier Estendida como Valor Principal

4.1 Introdução

Já encontramos várias vezes a função seno cardinal (não normalizado)

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Também provamos a fórmula

$$\widehat{\Pi}(\xi) = \operatorname{sinc}(\pi\xi) \quad [\text{com } \Pi \text{ a função retângulo}].$$

É então razoável que computemos efetivamente e de forma elementar a transformada de Fourier do seno cardinal. O obstáculo que encontramos é que tal função não é absolutamente integrável (nem Lebesgue integrável) e então

$$\int e^{-2\pi i\xi t}\frac{\sin \pi t}{\pi t}dt \quad \text{não converge.}$$

É de esperar que ultrapassar tal obstáculo produza ganhos significativos.

Em suma, devemos estender o conceito de transformada de Fourier.

Iniciemos com um cômputo ingênuo. É de se esperar que a transformada inversa de $\operatorname{sinc}(\pi t)$ seja a função retângulo $\Pi(t)$. Ainda mais, como $\operatorname{sinc}(\pi\xi)$ é uma função par então devemos ter $\mathcal{F}[\operatorname{sinc}(\pi\xi)](t)$ também par e então

$$\Pi(t) = \mathcal{F}^{-1}[\operatorname{sinc}(\pi\xi)](t) = \mathcal{F}[\operatorname{sinc}(\pi\xi)](-t) = \mathcal{F}[\operatorname{sinc}(\pi\xi)](t).$$

Isto é, dentro de uma "teoria razoável" devemos encontrar

$$\widehat{\operatorname{sinc}(\pi\xi)} = \Pi.$$

Para estabelecermos tal fórmula, comentemos três abordagens possíveis.

Fatos Gerais. No capítulo anterior definimos para uma função arbitrária $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente e impropriamente integrável, a transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi t} f(t)dt.$$

Entretanto, o espaço de tais funções não é um espaço vetorial normado completo [i.e., não é um espaço normado em que as sequências de Cauchy sejam todas convergentes] e isto limita a utilização de argumentos que envolvem convergência. Tal espaço de funções não é sequer normado pois

$$\int |f(t)|dt = 0 \quad \text{não implica } f(t) = 0 \text{ em todo ponto.}$$

Para obtermos uma norma é necessária a condição adicional "f contínua", no contexto da integração de Riemann, e esta é uma condição muito restritiva.

Abordagem via teoria de Lebesgue. Para maior versatilidade e para utilizar técnicas de análise funcional é conveniente definir a transformada de Fourier em um espaço vetorial normado, completo e com a norma derivada de um produto interno. Assim, é vantajoso definir a transformada de Fourier no espaço das funções de quadrado Lebesgue-integráveis definido por

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : |f(t)|^2 \text{ é Lebesgue-integrável na reta}\}.$$

Mostrando que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é denso no espaço completo $L^2(\mathbb{R})$ e utilizando que operador $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é uma isometria [Plancherel 3.26, seção 3.8] segue que

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ é uma isometria.}$$

A função $\text{sinc}(t)$ é de quadrado Riemann-integrável e portanto de quadrado Lebesgue-integrável. Segue então que

$$\widehat{\text{sinc}(\pi\xi)} \text{ está bem definido em } L^2(\mathbb{R}).$$

A abordagem da transformada de Fourier via integral de Lebesgue requer resultados não triviais da teoria de Lebesgue (e.g., teorema de Fubini, as completudes dos espaço L^p e as desigualdades de Hölder e de Minkowiski). Ainda que considerando "elementar" o teorema da convergência Dominada de Lebesgue.

Abordagem via distribuições. Como já comentado, a fórmula de multiplicação (Teorema 3.21, seção 3.7)

$$\int \widehat{f}(\tau)g(\tau)d\tau = \int f(\tau)\widehat{g}(\tau)d\tau$$

nos permitirá estender o conceito de transformada de Fourier para distribuições temperadas. Esta abordagem não requer muito trabalho [como veremos no Capítulo 7 - Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e Distribuições Temperadas], apesar de sofisticada.

Abordagem via Valor Principal de Cauchy. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que é Riemann-integrável em todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ temos dois conceitos usuais para a integral de f sobre a reta. Podemos considerar a integral imprópria

$$\int f(t)dt = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(t)dt$$

ou (se a integral imprópia não existir) o limite

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(t)dt,$$

denominado **valor principal de Cauchy** para a integral de f e indicado por

$$V.P. \int f(t)dt.$$

Se a integral imprópria de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existe então é claro que o valor principal de Cauchy também existe e temos

$$V.P. \int f(t)dt = \int f(t)dt.$$

Sendo assim, podemos estender o conceito de transformada de Fourier.

Definição. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-integrável em cada intervalo limitado da reta. Seja $\xi \in \mathbb{R}$. A **transformada de Fourier** de f no ponto ξ é dada por

$$\widehat{f}(\xi) = V.P. \int e^{-2\pi i \xi t} f(t)dt,$$

se este limite existir.

Com tal definição, podemos escrever brevemente

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi t} f(t)dt,$$

subentendendo que a integral se refere ao valor principal de Cauchy. Não há dubiedade com tal notação pois o valor principal de Cauchy coincide com a integral imprópria (se esta existe). Na maioria dos casos, só consideramos o valor principal de Cauchy se a função f não é absolutamente integrável.

Para a fórmula de inversão que provaremos utilizaremos os conceitos abaixo.

Definição. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é* **contínua por partes** *se existe uma sequência estritamente crescente de pontos* $\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\}$ *tal que*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, a_{n+1}], \quad \text{com} \quad f \text{ contínua em cada intervalo aberto } (a_n, a_{n+1}),$$

e existem (são finitos) os limites laterais (à esquerda e à direita)

$$f(a_n-) = \lim_{h \to 0^+} f(a_n - h) \quad \text{e} \quad f(a_n+) = \lim_{h \to 0^+} f(a_n + h), \quad \text{para cada } n.$$

[Se f *é contínua, evidentemente* f *é contínua por partes.]*

Assim, uma função descontínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é contínua por partes se o conjunto de descontinuidades de f [possivelmente $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ com a notação acima] é enumerável, seus pontos são isolados e cada qual é um ponto de descontinuidade do tipo salto de f [também dito descontinuidade de primeira espécie de f]. Desta forma, dado um intervalo fechado e limitado $[c, d]$ então f tem no intervalo $[c, d]$ no máximo uma quantidade finita de pontos de descontinuidades [caso contrário, $\{a_n\}$ tem um ponto de acumulação p e existe k tal que $p \in [a_k, a_{k+1}]$ mas tanto $p = a_k$, $p \in (a_k, a_{k+1})$ ou $p = a_{k+1}$ são impossíveis.].

Definição. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é* **suave por partes** *[ou,* **de classe** C^1 **por partes***] se*

$$f \quad \text{e} \quad f' \quad \text{são contínuas por partes.}$$

Assim, f' tem no máximo uma quantidade infinita $\{b_n : n \in \mathbb{Z}\}$ de descontinuidades (isoladas) de tipo salto, sendo f' contínua em (b_n, b_{n+1}) para cada n. O conjunto de descontinuidades de f é um subconjunto de $\{b_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Figura 1: À esquerda, uma função suave por partes. À direita, uma que não é.

4.2 A Transformada de Fourier $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right](\xi) = \Pi(\xi)$ [exceto dois pontos].

Proposição 4.1. *A transformada de Fourier do seno cardinal (normalizado) é*

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right](\xi) = \begin{cases} \Pi(\xi), & se\ \xi \neq \pm\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & se\ \xi = \pm\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Prova.

Temos

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right](\xi) = \int e^{-2\pi i \xi t}\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) dt = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} e^{-2\pi i \xi t}\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) dt.$$

A função seno é ímpar e a função $\operatorname{sinc}(\pi t) = (\sin \pi t)/(\pi t)$ é par. Logo,

$$(4.1.1)\quad \int_{-r}^{r} e^{-2\pi i \xi t}\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) dt = \int_{r}^{r} \frac{\cos(2\pi\xi t)\sin(\pi t)}{\pi t} dt$$

$$= 2\int_{0}^{r} \frac{\cos(2\pi\xi t)\sin(\pi t)}{\pi t} dt.$$

As fórmulas trigonométricas

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \end{cases}$$

mostram que

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).$$

Donde segue

$$(4.1.2)\quad 2\int_{0}^{r} \frac{\cos(2\pi\xi t)\sin(\pi t)}{\pi t} dt = \int_{0}^{r} \frac{\sin(\pi t + 2\pi\xi t) + \sin(\pi t - 2\pi\xi t)}{\pi t} dt$$

$$= \int_{0}^{r} \frac{\sin[(1+2\xi)\pi t]}{\pi t} dt + \int_{0}^{r} \frac{\sin[(1-2\xi)\pi t)]}{\pi t} dt.$$

A seguir, seja $\lambda \neq 0$. Com a mudança de variável $s = \lambda \pi r$ obtemos

$$(4.1.3)\qquad \int_{0}^{r} \frac{\sin \lambda\pi t}{\pi t} dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda\pi r} \frac{\sin s}{s} ds.$$

Agora, utilizemos as identidades [vide Capítulo 2 - Ferramentas, seção 2.16]

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2}.$$

Destas identidades segue

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^{\lambda\pi r}\frac{\sin s}{s}ds=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{se } \lambda>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } \lambda<0.\end{cases}$$

Utilizando (4.1.3) encontramos a fórmula

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^{r}\frac{\sin\lambda\pi t}{\pi t}dt=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda\pi r}\frac{\sin s}{s}ds=\frac{\lambda}{2|\lambda|}. \tag{4.1.4}$$

Supondo $\xi\neq\pm1/2$ obtemos então

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\int_0^{r}\frac{\sin[(1+2\xi)\pi t]}{\pi t}dt+\int_0^{r}\frac{\sin[(1-2\xi)\pi t)]}{\pi t}dt\right\}=\frac{1+2\xi}{2|1+2\xi|}+\frac{1-2\xi}{2|1-2\xi|}.$$

Temos [monte um "varal" com os sinais das funções $1+2\xi$ e $1-2\xi$, é fácil]

$$\frac{1+2\xi}{2|1+2\xi|}+\frac{1-2\xi}{2|1-2\xi|}=\begin{cases}1, & \text{se } -\frac{1}{2}<\xi<\frac{1}{2},\\ \\ 0, & \text{se } \xi<-\frac{1}{2} \text{ ou } \xi>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

A seguir, utilizando as equações (4.1.1) e (4.1.2) encontramos

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}e^{-2\pi i\xi t}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)dt=\Pi(\xi),\ \text{se } \xi\neq\pm\frac{1}{2}.$$

Se $\xi=1/2$, as equações (4.1.1), (4.1.2) e (4.1.4) mostram que

$$\int_{-r}^{r}e^{-\pi it}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)dt=\int_0^{r}\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}dt\xrightarrow{r\to+\infty}\frac{1}{2}.$$

Se $\xi=-1/2$ temos (cheque)

$$\int_{-r}^{r}e^{\pi it}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)dt\xrightarrow{r\to+\infty}\frac{1}{2}.$$

Concluímos então que

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right](\xi)=\begin{cases}\Pi(\xi), & \text{se } \xi\neq\pm\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}, & \text{se } \xi=\pm\frac{1}{2}\ \clubsuit\end{cases}$$

Comentário. No Capítulo 7 - Distribuições Temperadas veremos que no sentido de distribuições efetivamente temos

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right]=\Pi.$$

4.3 A Fórmula de Inversão de Fourier Revisitada

O exemplo com o seno cardinal (normalizado) é generalizável. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável e derivável por partes. Fixemos um ponto t na reta.

Então $\widehat{f}$ é contínua e investigamos se existe o valor principal de Cauchy

$$\int e^{2\pi i t\xi} \widehat{f}(\xi) = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} e^{2\pi i\xi t} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Passamos então a estudar a integral de Riemann (de uma função contínua)

$$\int_{-r}^{r} e^{2\pi i\xi t} \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{4.2.1}$$

Isto é, analisemos

$$\int_{-r}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) ds d\xi.$$

Mostremos que podemos trocar a ordem de integração nesta integral iterada. Pelo Lema de Convergência (3.3) segue a convergência uniforme de funções contínuas

$$f_{nm}(\xi) = \int_{-n}^{m} e^{-2\pi i\xi s} f(s) ds \xrightarrow{\text{uniformemente na reta}} \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi s} f(s) ds,$$

com $n \to +\infty$ e $m \to +\infty$. Multiplicando por $e^{2\pi i\xi t}$ (contínua) e integrando segue

$$\int_{-r}^{r} \int_{-n}^{m} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) ds d\xi \xrightarrow{n\to+\infty \text{ e } m\to+\infty} \int_{-r}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) ds d\xi. \tag{4.2.2}$$

A função

$$e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s), \text{ onde } (\xi, s) \in [-r, r] \times [-n, m],$$

é integrável em duas variáveis e em cada variável e as integrais iteradas são integráveis. O teorema de Fubini, versão simples [seção 2.7] garante a igualdade

$$\int_{-r}^{r} \int_{-n}^{m} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) ds d\xi = \int_{-n}^{m} \int_{-r}^{r} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) d\xi ds.$$

Tal igualdade e o limite (4.2.2) mostram que

$$\int_{-n}^{m} \int_{-r}^{r} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) d\xi ds \xrightarrow{n\to+\infty \text{ e } m\to+\infty} \int_{-r}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) ds d\xi.$$

Portanto, pela definição de integral de Riemann imprópria temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-r}^{r} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) d\xi ds = \int_{-r}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi t} e^{-2\pi i\xi s} f(s) ds d\xi.$$

Efetuada a troca desejada na ordem de integração, passemos a estudar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-r}^{r} e^{2\pi i \xi t} e^{-2\pi i \xi s} f(s) d\xi ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int_{-r}^{r} e^{2\pi i \xi (t-s)} d\xi \right) ds.$$

A troca de variável $x = t - s$, no lado direito da equação acima, nos fornece

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \left(\int_{-r}^{r} e^{2\pi i \xi x} d\xi \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \left[\int_{-r}^{r} \cos(2\pi \xi x) d\xi \right] dx.$$

O que nos leva a analisar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \frac{\sin(2\pi r x)}{\pi x} dx.$$

Pela equação (4.2.1) e pelas simplificações acima, o valor principal procurado vale

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \frac{\sin(2\pi r x)}{\pi x} dx.$$

Substituindo $2\pi r = \lambda$ e omitindo os extremos de integração, computemos

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int f(t-x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx. \tag{4.2.3}$$

Trocando λ por $1/\epsilon$ com $\epsilon \to 0$, o problema é o de uma aproximação da identidade com uma função não gaussiana [figura abaixo] e impropriamente integrável. A interpretação é útil. A troca λ por $1/\epsilon$ nem tanto e a evitamos na prova a seguir.

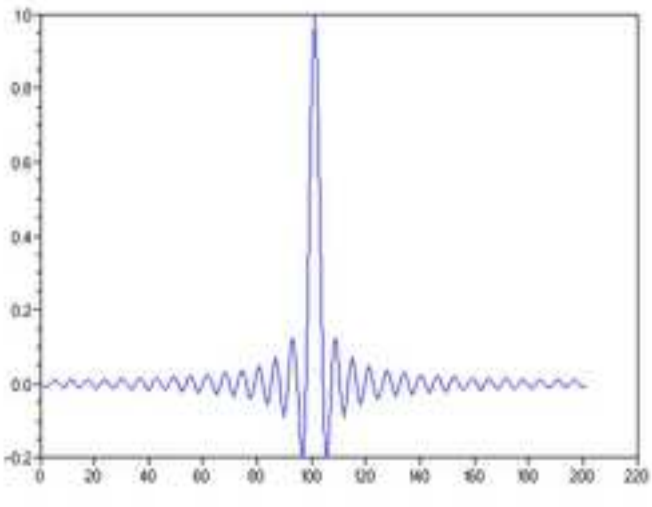

Figura 2: Uma representação de $\frac{\sin \lambda x}{x} = \lambda \frac{\sin \lambda x}{\lambda x}$ para λ "grande".

Teorema 4.2 (Fórmula de Inversão de Fourier, como valor principal de Cauchy). *Seja f absolutamente integrável e derivável por partes. Seja $t \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\int e^{2\pi i t\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}, \text{ para todo } t.$$

Prova. Mantenhamos as notações acima.

◇ Reduções 1. Definindo $g(s) = f(s+t)$ temos $g(0) = f(t)$ e $\widehat{g}(\xi) = e^{2\pi i t\xi}\widehat{f}(\xi)$. Portanto, podemos supor $t = 0$.

Por (4.2.3), basta mostramos

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int f(-x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx = \frac{f(0+)+f(0-)}{2}.$$

A mudança de variável de integração $x \mapsto -x$ mostra que basta provarmos

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx = \frac{f(0+)+f(0-)}{2}. \tag{4.2.4}$$

◇ Seja $\lambda > 0$. Pela integral vista no Capítulo 2, seção 2.16, segue

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{\sin\lambda x}{x}dx = \frac{1}{\pi}\int\frac{\sin y}{y}dy = 1.$$

◇ Reduções 2. Por (4.2.4) e a última integral acima devemos mostrar que

$$\frac{1}{\pi}\int\left[f(x)-\frac{f(0+)+f(0-)}{2}\right]\frac{\sin\lambda x}{x}dx \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0.$$

A função $\sin(\lambda x)/x$ é par e é suficiente verificar

$$\int_0^\infty[f(x)-f(0+)]\frac{\sin\lambda x}{x}dx \;+\; \int_{-\infty}^0[f(x)-f(0-)]\frac{\sin\lambda x}{x}dx \;\xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0.$$

Neste ponto, basta mostrar que a integral à esquerda tende a 0 se $\lambda \to +\infty$. A integral à direita é redutivel à integral à esquerda [considere $h(u) = f(-u)$].

◇ Seja $\epsilon > 0$. Seja $M > 1$. Pelas reduções acima, basta estimarmos a soma

$$\int_0^M[f(x)-f(0+)]\frac{\sin\lambda x}{x}dx + \int_M^\infty[f(x)-f(0+)]\frac{\sin\lambda x}{x}dx.$$

A integral no intervalo $[M, \infty)$. Temos [com a mudança $y = \lambda x$]

$$\left|\int_M^\infty [f(x) - f(0+)]\frac{\sin \lambda x}{x}dx\right| \leq \int_M^\infty |f(x)|dx + |f(0+)|\left|\int_{\lambda M}^\infty \frac{\sin y}{y}dy\right|.$$

Como $|f|$ é integrável e $(\sin y)/y$ é integrável impropriamente, existem $M > 1$ e λ grande o suficiente (digamos $\lambda \geq n$ e n dependente de M) tais que

$$\int_M^\infty |f(x)|dx < \epsilon \quad \text{e} \quad |f(0+)|\left|\int_{\lambda M}^\infty \frac{\sin y}{y}dy\right| < \epsilon.$$

A integral no intervalo $[0, M]$. Pelas hipóteses e o TVM segue (cheque),

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0+)}{x} = f'(0+).$$

Portanto,

$$\frac{f(x) - f(0+)}{x} \text{ é contínua e limitada em } [0, m] \text{ para algum } 0 < m < 1.$$

Então, como f é integrável em $[m, M]$ segue que

$$\frac{f(x) - f(0+)}{x} \text{ é integrável em } [0, M].$$

Escrevamos

$$\int_0^M [f(x) - f(0+)]\frac{\sin \lambda x}{x}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x) - f(0+)}{x}\chi_{[0,M]}(x)\sin(\lambda x)dx,$$

onde temos $\chi_{[0,M]}(x) = 1$ se $x \in [0, M]$ e $\chi_{[0,M]}(x) = 0$ caso contrário.

A função

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(0+)}{x}\chi_{[0,M]}(x)$$

é absolutamente integrável na reta. Pelo Lema de Riemann-Lebesgue, a transformada $\widehat{\psi}(\lambda)$ tende a 0 se $\lambda \to +\infty$. Portanto (cheque),

$$\int_0^M [f(x) - f(0+)]\frac{\sin \lambda x}{x}dx = \int_{-\infty}^\infty \psi(x)\sin(\lambda x)dx \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0 \clubsuit.$$

Comentário. Seja $\lambda > 0$. Definindo

$$\varphi(x) = \frac{\sin \lambda x}{\pi x},$$

analogamente às aproximações da identidade com gaussianas temos as fórmulas

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\lambda x}{\epsilon}\right)}{\pi x} \quad \text{e} \quad \int \varphi_\epsilon(x)dx = 1.$$

Exemplo. Consideremos a função "decaimento exponencial de um só lado"

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

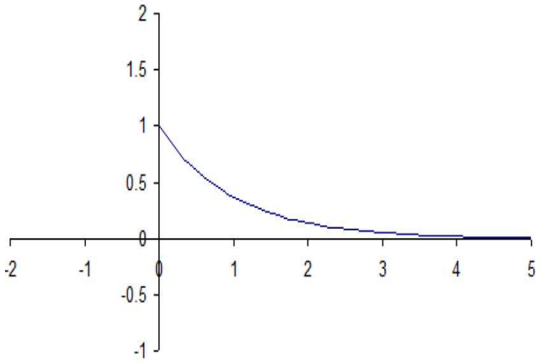

Figura 3: Decaimento exponencial do lado direito.

É usual apresentar f na forma

$$f(t) = H(t)e^{-t}, \quad \text{onde } \; H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

[A função H é chamada de **função impulso unitário** ou **função de Heaviside**, especificamente comentada nas seções 4.5, 6.4 e 7.5.]

A função $f(t) = H(t)e^{-t}$ satisfaz a condições do Teorema 4.2. No capítulo 3 (vide tabela na seção 3.3) mostramos que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi + 1}.$$

Pelo Teorema 4.2, no ponto $t = 0$ temos

$$\int e^{2\pi i\, 0\, \xi}\widehat{f}(\xi) = \frac{f(0+) + f(0-)}{2}.$$

Logo,

$$\int \frac{d\xi}{2\pi i\xi + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{(como valor principal)}.$$

Esta integral não existe no sentido impróprio, pois temos

$$\int \frac{d\xi}{2\pi i\xi + 1} = \int \frac{1 - 2\pi i\xi}{4\pi^2\xi^2 + 1}d\xi \quad \text{e} \quad \int \frac{\xi\, d\xi}{4\pi^2\xi^2 + 1} \text{ não converge impropriamente} \clubsuit$$

4.4 A Identidade $\widehat{1} = \delta$.

Computemos "ingenuamente" a transformada de Fourier da função

$$f(t) = 1.$$

Obviamente, só podemos computar o valor principal

$$VP \int 1.e^{-2\pi i\xi t}dt = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} e^{-2\pi i\xi t}dt.$$

Interpretando o símbolo de integral já como um valor principal, temos

$$\int e^{-2\pi i\xi t}dt = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \cos(2\pi\xi t)dt = \lim_{r\to+\infty} \frac{\sin(2\pi r\xi)}{\pi\xi}.$$

Com a substituição $\lambda = 2\pi r$ encontramos

$$\int e^{-2\pi i\xi t}dt = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\sin(\lambda\xi)}{\pi\xi},$$

que em geral não existe na reta. De fato, não existe se $\xi \notin 2\pi\mathbb{Z} = \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

Mudemos o enfoque. Com a substituição $\lambda = 1/\epsilon$ obtemos

$$\int e^{-2\pi i\xi t}dt = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)}{\pi\xi}.$$

Definindo (vide comentário ao Teorema 4.1)

$$\varphi(\xi) = \frac{\sin\xi}{\pi\xi} \quad \text{e} \quad \varphi_\epsilon(\xi) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)}{\pi\xi}$$

encontramos (cheque)

$$\int \varphi_\epsilon(\xi)dx = 1.$$

Pelo Teorema (4.1), a família $\{\varphi_\epsilon\}$ é uma aproximação da identidade. Isto é,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \varphi_\epsilon = \delta \quad \text{(no contexto de aproximação da identidade).}$$

Donde então segue

$$\int e^{-2\pi i\xi t}dt = \lim_{\epsilon\to 0^+} \varphi_\epsilon(\xi) = \delta.$$

Isto é (formalizamos tais cômputos no Capítulo 7 - Distribuições Temperadas),

$$\widehat{1} = \delta \clubsuit$$

4.5 A Função de Heaviside $H(t)$.

A função

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é chmamada de **função de Heaviside** ou **função degrau unitário**.

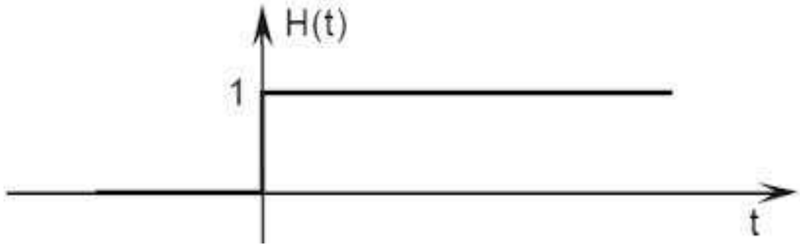

Figura 4: A função de Heaviside.

A função de Heaviside representa um sinal acionado em um certo instante e que então permanece ligado indefinidamente. Oliver Heaviside, desenvolveu o cálculo operacional (teoria das distribuições) estudando comunicações telegráficas.

Existem muitas representações úteis para $H(t)$. Definindo a **função rampa**

$$t \mapsto \max(t, 0),$$

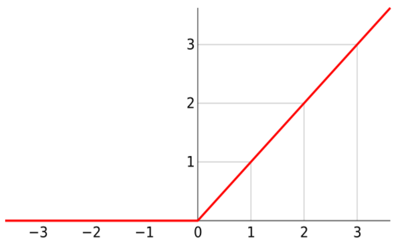

Figura 5: O gráfico da função rampa $t \mapsto \max(t, 0)$.

a função de Heaviside é dada pela derivada

$$H(t) = \frac{d}{dt}\Big\{\max(t, 0)\Big\}, \text{ para todo } t \neq 0.$$

Temos também,

$$\int_{-\infty}^{t} H(s)ds = \max(t, 0), \text{ para todo } t.$$

Vale também a fórmula

$$H(t) = \frac{t + |t|}{2}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como H é em geral utilizada em teoria da integração, via de regra não importa o valor escolhido para $H(0)$. Assim, $H(0)$ pode ser definido conforme o contexto.

- A definição
$$H(0) = \frac{1}{2},$$
torna (cheque) a função
$$H - \frac{1}{2} \text{ ímpar.}$$

- O valor $H(0) = 1$ torna H contínua à direita, o que é útil na teoria da integração de Lebesgue-Stieltjes [vide G. B. Folland, Real Analysis, second edition p. 35]. Neste caso H é a função característica (ou indicador)
$$H(t) = \chi_{[0,\infty)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0,\infty), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- O valor $H(0) = 0$ torna H contínua à esquerda.

A transformada de Fourier de H em um ponto $\xi \neq 0$ é, como valor principal,
$$\begin{aligned} \int e^{-2\pi i\xi t} H(t)dt &= \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-2\pi i\xi t}dt \\ &= \lim_{r\to+\infty} \left(-\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{2\pi i\xi}\Big|_0^r \right) \\ &= \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i\xi} - \frac{\cos(2\pi\xi r)}{2\pi i\xi} + \frac{\sin(2\pi\xi r)}{2\pi\xi} \right]. \end{aligned}$$
Este limite não existe em $\mathbb{C}$. No Capítulo 7 - Distribuições Temperadas (seção 7.5) computaremos este limite no sentido de distibuições.

No momento, observemos que vale o limite (para números complexos)
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi i\xi} = \frac{1}{2\pi i\xi}.$$

Ainda, como aproximação da identidade, ao computar $\widehat{1} = \delta$ vimos que
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\sin(2\pi\xi r)}{2\pi\xi} = \frac{1}{2} \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\sin\lambda\xi}{\pi\xi} = \frac{\delta}{2}.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Beerends, R.J. & ter Morsche, H. G. & van den Berg, J. C. & van de Vrie, E. M., *Fourier and Laplace Transform*, Cambridge University Press, 2003.
3. Boggess, A. & Narcowich, F. J., *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, 2nd ed., Wiley, 2009.
4. Folland, G. B. *Fourier Analysis and its Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, 1992.
5. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
6. Köerner, T. W. *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
7. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).
8. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
9. Osgood, B., *The Fourier Transform and its Applications*, Lectures Notes - Electrical Engineering Department - Stanford University - CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014. [free PDF on the internet].
10. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.
11. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Fourier Analysis*, Princeton University Press, 2003.

Departamento de Matemática

Universidade de São Paulo

oliveira@ime.usp.br

`http://www.ime.usp.br/~oliveira`