

TRANSFORMADA DE FOURIER (Capítulo 1 - Introdução)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

Objetivos.....	5
Capítulo 1 - Introdução.	
1.1 Sinal e Séries de Fourier.....	7
1.2 Período $T \neq 1$	15
1.3 Energia de um Sinal e Energia Espectral.....	16
1.4 Planetas, Hiparcus-Ptolomeu e a Transformada de Fourier.....	23
1.5 Transformada de Fourier.....	27
Capítulo 2 - Ferramentas.	
2.1 Integral de Riemann (Caracterização).....	
2.2 Integral de Riemann X Integral de Lebesgue.....	
2.3 Números Complexos.....	
2.4 Séries e Somas Não Ordenadas.....	
2.5 Exponencial Complexa.....	
2.6 Segundo TVM para Integrais. Função Teste. O δ de Dirac.....	
2.7 Teorema de Fubini (em retângulos).....	
2.8 Continuidade Uniforme. Sequências e Séries de Funções (e de Potências).....	
2.9 Integral Imprópria na Reta.....	
2.10 Integral Imprópria no Plano e Respectivos Tonelli e Fubini.....	
2.11 A integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$	
2.12 Continuidade e Derivação sob o Signo de Integral.....	
2.13 Integral sobre Curvas em \mathbb{C}	
2.14 Índice de uma Curva.....	
2.15 Método das Frações Parciais em \mathbb{C} , para Quociente de Analíticas.....	
2.16 A Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left \frac{\sin t}{t} \right dt = \infty$ e a Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$	

Capítulo 3 - Transformada de Fourier.

3.1	Introdução.....
3.2	Definições e Propriedades Básicas.....
3.3	Exemplos de Transformadas de Fourier.....
3.4	O Lema de Riemann-Lebesgue.....
3.5	Decaimento x Suavidade.....
3.6	Gaussianas e Aproximação.....
3.7	A Transformada de Fourier Inversa.....
3.8	Fórmulas de Parseval e Plancherel.....
3.9	Fórmula para a Soma de Poisson.....
3.10	Teorema de Paley-Wiener.....

Capítulo 4 - A Transformada de Fourier Estendida como Valor Principal.

4.1	Introdução.....
4.2	A Transformada de Fourier $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right](\xi) = \Pi(\xi)$
4.3	A Fórmula de Inversão de Fourier Revisitada.....
4.4	A Identidade $\widehat{\hat{1}} = \delta$
4.5	A Função de Heaviside $H(t)$

Capítulo 5 - Produto de Convolução e Aproximação da Identidade.

5.1	Convolução.....
5.2	Aproximação da Identidade.....

Capítulo 6 - Funções Testes e o Espaço das Distribuições.

6.1	Funções Testes.....
6.2	Distribuições.....
6.3	Derivação, Translação, Dilatação e Multiplicação por Funções
6.4	A Derivada $H' = \delta$ e Derivada de Função X Derivada de Distribuição.....
6.5	Convergência.....
6.6	Convolução e Aproximação.....
6.7	Propriedades da Convolução.....
6.8	Caracterização da Continuidade de uma Distribuição.....

Capítulo 7 - Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas.

7.1	Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
7.2	Distribuições Temperadas: $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
7.3	Transformadas de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
7.4	A Identidade $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$
7.5	A Transformada de Fourier $\widehat{H} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} PV\left(\frac{1}{\xi}\right)$
7.6	A Transformada de Fourier do Seno Cardinal (revisitada).....
7.7	As fórmulas $\widehat{e^{2\pi i a t}} = \delta(t-a)$, $\widehat{1} = \delta$ (revisitada) e $\widehat{\delta} = 1$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

OBJETIVOS

O entendimento de transformada de Fourier é muito apropriado na atualidade, tanto para matemáticos puros ou aplicados, engenheiros, físicos e para outros profissionais de ciências aplicadas. O campo de aplicações é vasto: estudo de sinais, ondas eletro-magnéticas, raio-x, medicina, sonar, radar, equações diferenciais (ordinárias e parciais), física (incluindo mecânica quântica), som (incluindo música e ruídos), imagens (incluindo PDF), etc.

Entretanto, como outros já observaram, de forma geral não muito espaço é devotado ao estudo deste tópico nos cursos de graduação ou pós-graduação (ao menos nos cursos de graduação e pós-graduação em Matemática) e isto apesar de existirem vários livros sobre Transformada de Fourier.

Este livros podem ser divididos, inicialmente, em dois grupos: os bastante devotados a aplicações (vários deles muitíssimo bem escritos por engenheiros e outros dedicados a ciências aplicadas - mas em geral não muito rigorosos quanto às demonstrações dos resultados empregados) e aqueles mais devotados aos aspectos abstratos (e escritos por matemáticos). Este texto pertence ao segundo grupo, mas com algumas diferenças significativas quanto aos textos a que tive acesso neste grupo. Confio que tais diferenças justifiquem a existência destas notas.

Em geral, os textos sobre transformada de Fourier e escritos por matemáticos são baseados na integral de Lebesgue e em uns poucos teoremas da teoria da integração complexa. Por exemplo, este é o enfoque do excelente livro “Fourier Analysis and its Applications” por G. B. Folland. Registre-se que por um lado a teoria da integral de Lebesgue é essencial para o estudo mais aprofundado da Transformada de Fourier mas por outro lado tal integral é sofisticada (e mais apropriada para pós-graduação e pesquisa), não dominada por muitos profissionais e não é essencial para uma primeira abordagem ao estudo de tal transformada [talvez o enfoque direto via integral de Lebesgue até ofusque, para alguns, uma melhor compreensão da transformada de Fourier]. Para exemplificar, o enfoque via integral de Riemann é empregado no excelente livro “Fourier Analysis” (Princeton Lectures in Analysis I) por E. Stein e R. Shakarchi e no também excelente e quase enciclopédico “Fourier Analysis” por T. W. Körner.

Estas notas, como os livros de Körner e Stein/Shakarchi, baseia-se na integral de Riemann. Devo então comentar as diferenças significativas entre as notas que apresento com relação a estes e outros textos que baseiam-se na integral de Riemann. Destaco as características abaixo.

1. Evita desnecessárias hipóteses adicionais para provar vários resultados fundamentais. [Por exemplo, evita a introdução do espaço das funções moderadamente crescentes assim como (tanto quanto possível) intersecções de espaços de funções.]
2. Evita teoria da integração complexa (fórmula integral de Cauchy e teorema dos resíduos).
3. Baseia-se na integral de Riemann na reta e assim não inclui exemplos em equações a derivadas parciais e transformada de Fourier em várias dimensões.
4. Os exemplos são em boa parte baseados em teoria dos sinais. A maior parte dos comentários, exemplos, figura e tabelas foram retirados de livros escritos por engenheiros e outros profissionais de ciências aplicadas.
5. Inclui uma introdução à Teoria das Distribuições (Capítulo 6) e uma introdução à Teoria das Distribuições Temperadas (Capítulo 7).

Para finalizar, devo esclarecer que este texto é em grande parte uma coletânea (vide bibliografia) do que considerarei mais apropriado a uma abordagem inicial ao estudo de Transformada de Fourier (em uma variável real). As diferenças fundamentais estão explicitadas acima, em [1], [2] e [5].

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 Sinal e Séries de Fourier

Sinal. Em comunicações, processamento de sinais e engenharia elétrica, um sinal é *uma função que apresenta informações sobre o comportamento ou atributos de um fenômeno*. No mundo físico, qualquer quantidade exibindo variação ao longo do tempo (e.g., som) ou variação no espaço (e.g., imagem) é potencialmente um sinal que pode fornecer informação sobre o status de um sistema físico ou uma mensagem entre observadores, entre outras possibilidades. O termo **sinal** inclui audio, vídeo, fala, imagem, comunicações (e.g., telégrafo e GPS), sonar, radar, sinais médicos e musicais.

Um sinal, em eletrônica, é uma corrente elétrica ou eletromagnética utilizada para transportar dados. Os sinais encontrados na natureza podem ser convertidos em sinais eletrônicos e transportados. Seguem alguns exemplos.

- ◇ **Movimento.** O movimento de uma avião é um sinal. Um radar fornece sinais eletromagnéticos para seguir o avião. Um sinal de movimento tem dimensão 1 (tempo) e o contra-domínio é geralmente tri-dimensional.
- ◇ **Som.** O som é uma vibração do meio (e.g., ar e água). Um sinal de som associa um valor de pressão a todo vetor no tempo e no espaço tri-dimensional. Para gravar e ouvir um CD: um sinal de som é convertido a um sinal elétrico por um microfone, gerando um sinal de **voltagem (potencial elétrico, por unidade de carga)** que é passado ao CD (como sinais discretos). Os sinais no CD são convertidos a um sinal elétrico por uma leitora a laser.
- ◇ **Imagens.** Uma foto ou imagem consiste de uma função sinal de cor (domínio plano). A aparência do objeto é dada via uma onda eletromagnética (sinal eletrônico) emitida ou refletida. As cores seguem de uma combinação de imagens em 3 cores primárias. O contra-domínio do sinal é tri-dimensional.

- ◊ **Videos.** Um sinal de video é uma sequência de imagens. Um ponto no vídeo é identificado pela posição bi-dimensional e pelo instante em que ele surge. Um sinal de video (não analógico) tem um domínio tri-dimensional.
- ◊ **Potencial de membranas biológicas.** O valor do sinal é uma **voltagem (potencial elétrico, por unidade de carga)**. É difícil estabelecer o domínio. Algumas células ou organelas tem mesmo potencial de membrana em todo ponto. Neurônios geralmente tem potenciais distintos em pontos distintos. Estes sinais tem baixa energia mas suficiente para que o sistema nervoso funcione e eles podem ser medidos por técnicas por eletrofisiologia.

A seguir apresentamos os comentários da APRITEL (Associação dos Operadores de Telecomunicações) sobre sinais analógicos e sinais digitais.

Sinal Analógico. Tomando o caso comum nas telecomunicações dos circuitos, em um circuito analógico a informação “viaja” por meio de ondas electromagnéticas. Este sinal é afectado por outros campos eléctricos que danificam a qualidade do sinal, a chamada estática. Por outro lado, quanto maior a distância percorrida, menor a potência do sinal. Para ultrapassar tais dificuldades são utilizados amplificadores de sinal. No entanto, dado que o “ruído” também é um sinal eléctrico, a amplificação tem o efeito de também aumentar o ruído.

Sinal Digital. No caso dos sinais digitais a informação viaja por “pacotes” de bits binários. Além de ser um meio de maior rapidez e qualidade, e de apresentar maior confiança, o sinal enfraquece mais lentamente, sendo que as despesas com o equipamento de amplificação são então reduzidas. Adicionalmente, os amplificadores são mais eficazes visto que, dada a natureza do sinal, conseguem distinguir o ruído do sinal e permitem maior clareza mesmo nas comunicações de longa distância.

A seguir, façamos uma muito breve e informal apresentação das séries de Fourier para funções periódicas e em uma variável real.

Seja i tal que

$$i^2 = -1.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Séries de Fourier. Informalmente, apresentemos algumas computações. Consideremos uma função 2π -periódica e a valores complexos

$$F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ com } F(0) = F(2\pi).$$

Suponhamos que F é dada em cada ponto pela série numérica

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx}, \text{ com } d_n \in \mathbb{C} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Multiplicando a identidade acima por e^{-ikx} , onde $k \in \mathbb{Z}$, e integrando obtemos

$$\int_0^{2\pi} F(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = 2\pi d_k.$$

Logo,

$$d_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-ikx} dx.$$

A seguir, formalizemos. Suponhamos que F é Riemann-integrável. A série trigonométrica complexa (seja ela convergente ou não à função F) dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx}, \text{ onde } d_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-inx} dx,$$

é a **série de Fourier** de F . Escrevemos

$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx} \quad \text{e} \quad S_N(F; x) = \sum_{n=-N}^N d_n e^{inx}.$$

Os números d_n são os **coeficientes de Fourier** de F e as funções $S_N(F; x)$ são as somas parciais da série de Fourier de F .

Harmônico, é o nome de cada termo e^{inx} . Assim, a série de Fourier de F pode apresentar uma quantidade finita ou infinita de harmônicos.

Podemos interpretar a função F como uma onda ou um sinal.

Reescalamos $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, escrevendo

$$f(t) = F(2\pi t), \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Então, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é 1-periódica e escrevemos a sua série de Fourier como

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi int}, \text{ com } c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt.$$

Neste formato temos os **harmônicos** $e^{2\pi int}$, com $n \in \mathbb{Z}$. O harmônico $e^{2\pi int}$ tem período $T = \frac{1}{n}$ (segundos) e frequência $\frac{1}{T} = n$ (hertz = $\frac{\text{radianos}}{\text{segundos}}$).

Frequência e Período. A frequência, *tradicionalmente positiva*, é o número de repetições de um evento por unidade de tempo. Se o coração de um bebê bate 120/minuto, a **frequência** é 2 Hz (duas batidas por segundo e lê-se “dois Hertz”) e o **período** (entre batidas) é

$$T = (1/2)\text{s}.$$

Exemplo (uma interpretação para o harmônico $e^{2\pi int}$, fixado $n \geq 1$). Consideremos uma partícula em movimento circular uniforme (velocidade angular ω constante) em torno de um eixo de rotação (*axis of rotation*) identificado com a origem no plano. Sejam r o raio da circunferência, t o tempo em segundos, e a posição da partícula dada por

$$x(t) = re^{2\pi int} \quad [\text{sentido anti-horário}].$$

Neste caso, a velocidade da partícula (vetor tangente à circunferência), a velocidade angular vetorial e a velocidade angular (frequência angular) são, em ordem,

$$v(t) = x'(t), \quad \vec{\omega}(t) = \frac{v(t)}{r} = 2\pi in e^{2\pi int} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{d(2\pi nt)}{dt} = 2\pi n.$$

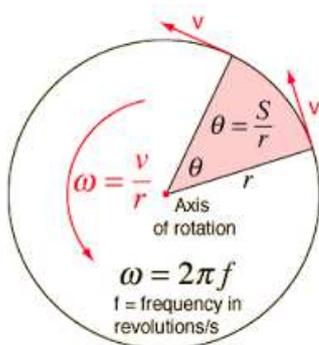


Figura 1: Movimento circular $x(t) = re^{2\pi int}$, frequência (cíclica) $f = n$ e $\omega = 2\pi n$.

Em 1 segundo, o ângulo percorrido é $2\pi n$ (sentido anti-horário). **O número de revoluções/segundo em torno da origem** (*frequency in revolutions/s*) é

a frequência (cíclica) $f = n$.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Alerta. Não é interessante “jogar a água da bacia com o bebê dentro” e dizer resumidamente que dada uma função f com série de Fourier

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n t},$$

todos os harmônicos $e^{2\pi i n t}$ tem período 1 e frequência 1. Tal procedimento despreza superposição (de harmônicos) e informações relevantes. Segue um exemplo.

Exemplo. Seja t uma variável indicando segundos. Seja f a função superposição

$$f(t) = \cos 2\pi t + \frac{1}{2} \cos 4\pi t.$$

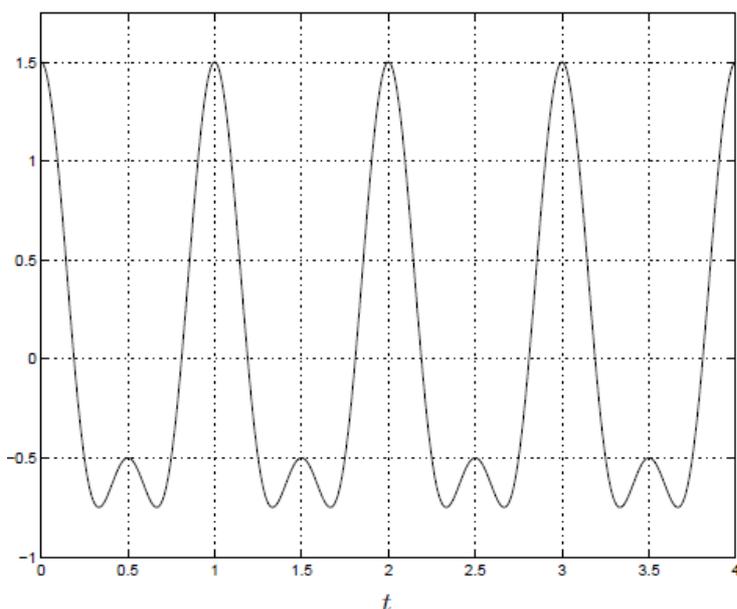


Figura 2: Gráfico de $f(t) = \cos 2\pi t + \frac{1}{2} \cos 4\pi t$.

A função $\cos 2\pi t$ tem período 1 e frequência 1 enquanto $\cos 4\pi t$ tem período $1/2$ e frequência 2. A onda se repete a cada segundo, mas não parece prático dizer que a onda tem frequência 1. É mais útil dizer que a onda exibe **duas frequências**, um cosseno de frequência 1 Hz (1 Hertz) e um cosseno de frequência 2 Hz ♣

A **amplitude** da onda periódica $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é o número

$$\sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

Isto é, a altura máxima que a onda $|f(t)|$ alcança.

O **coeficiente de Fourier** c_n da série de Fourier da função (sinal ou onda) contínua e 1-periódica $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é

$$c_n = \hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Lemos \hat{f} como o *chapéu* de f . Assim temos

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t}.$$

Suponhamos que a série de Fourier de f converge a f em cada ponto. Isto é,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t}, \text{ para todo } t.$$

Então, a função f é expressa por muitos harmônicos e muitas frequências, positivas e negativas, talvez por uma quantidade infinita de ambos. Notemos que

$$\boxed{\hat{f}(n) = c_n \text{ mede a componente de } f \text{ que oscila (vibra) com frequência } n.}$$

As frequências são números tais como $\pm 2, \pm 7, \pm 325$, etc., e não valores como $\hat{f}(\pm 2), \hat{f}(\pm 7), \hat{f}(\pm 325)$ [coeficientes de Fourier].

Espectro. O espectro da função (sinal, onda) f , é o **conjunto de frequências**

$$\mathbb{Z},$$

se a quantidade de frequências não nulas é infinita.

Caso contrário, a quantidade de frequência não nulas é finita e então existe o menor índice $N \in \mathbb{N}$ tal que temos $c_n = 0$ para todo $|n| > N$ donde segue que a série de Fourier de f é finita, com

$$f \sim \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t}.$$

Neste caso dizemos que tal onda não tem espectro ou que o espectro está limitado entre $-N$ e N ou ainda que a **largura de banda** é N (ou $2N$, em alguns textos) ou, ainda, que o espectro é de **banda limitada**.

Se a série de Fourier do sinal (função ou onda) f é finita, então as frequências não nulas variam entre a menor frequência não nula e a maior frequência não nula, as quais são os valores extremos da largura de banda.

Se a série de Fourier é finita, ela é dita um **polinômio trigonométrico**. O grau do polinômio é o maior número $|n|$ tal que $c_n \neq 0$ [com a notação imediatamente acima, temos $|n| = N$].

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Exemplo. Consideremos a *onda quadrada* e 1-periódica dada pela função ímpar

$$f(t) = \begin{cases} +1, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

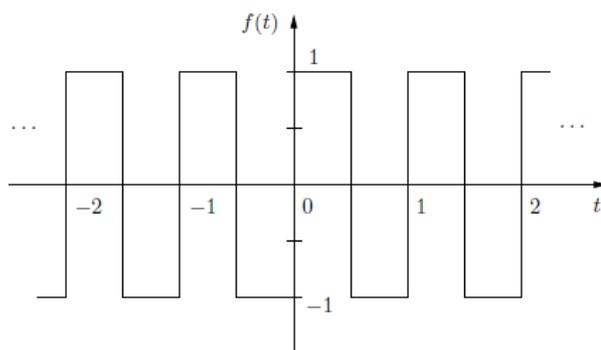


Figura 3: A *onda quadrada* 1-periódica e ímpar f .

É simples ver que, como f só assume valores reais então a série de Fourier não tem parte imaginária e pode ser expressa em uma soma de senos e cossenos. Ainda, como f é ímpar, a série de Fourier de f é uma soma de senos. Ainda mais, para cada n podemos combinar os termos (harmônicos) correspondentes a $-n$ e n . Com alguns cálculos achamos a série de Fourier

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin 2\pi(2k+1)t.$$

Seguem os gráficos para duas somas parciais (finitas) desta série de Fourier.

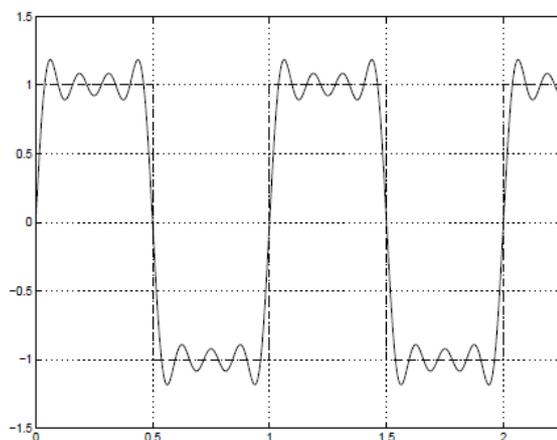


Figura 4: Gráfico da soma dos termos da serie de Fourier até a frequência 9.

Nos pontos $\pm n/2$ e $\pm n$ (com $n \in \mathbb{N}$) a série de Fourier vale 0, que é a média entre os valores -1 e $+1$ assumidos pela onda.

Somando os termos associados às primeiras 39 frequências, temos o gráfico

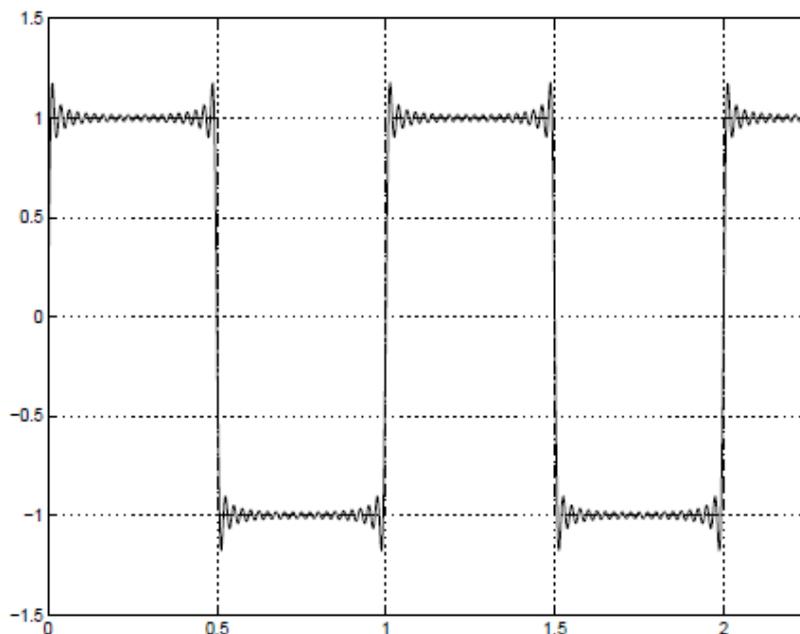


Figura 5: Gráfico da soma dos termos da serie de Fourier até a frequência 39 .

A seguir, suponhamos que a série de Fourier de f converge absolutamente e uniformemente a f . Então, encontramos

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 f(t) \overline{f(t)} dt = \sum_{\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t) \overline{c_n} e^{-2\pi i n t} dt \right) = \sum_{\mathbb{Z}} \overline{c_n} c_n$$

donde segue a **Identidade de Parseval**

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{\mathbb{Z}} |c_n|^2,$$

entre a **energia do sinal** (a integral à esquerda) e a **energia espectral** (o somatório à direita). A identidade de Parseval é também conhecida em física por **Identidade de Rayleigh**. Logo mais, na seção Energia, apresentamos a relação desta integral e deste somatório com o conceito de **energia**.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1.2 Período $T \neq 1$.

A dilatação do período de um sinal (função ou onda) revela um fenômeno e fórmulas importantes. Vejamos.

Consideremos uma função f que é T -periódica. Então,

$$g(t) = f(tT)$$

é 1-periódica e, se a série de Fourier de g converge uniformemente a g , temos

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n t}.$$

Escrevendo $s = tT$ chegamos a $g(t) = f(s)$. Donde segue

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T} s}.$$

Notemos que para f os harmônicos são

$$e^{2\pi i \frac{n}{T} s}, \text{ onde } n \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

e as frequências são

$$\dots, -\frac{2}{T}, -\frac{1}{T}, 0, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots$$

Reescrevamos os coeficientes $c_n = \hat{g}(n)$ em termos da função f . Isto segue de

$$c_n = \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i n t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-2\pi i \frac{n}{T} s} ds.$$

O n -ésimo coeficiente de Fourier da função T -periódica f é definido por

$$\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-2\pi i \frac{n}{T} s} ds.$$

[Donde segue, se T é um número natural,

$$\dots, \hat{f}(-2) = c_{-2T}, \hat{f}(-1) = c_{-T}, \hat{f}(0) = c_0, \hat{f}(1) = c_T, \hat{f}(2) = c_{2T}, \dots]$$

O intervalo entre duas frequências consecutivas arbitrárias de f mede $1/T$. Segue então o comentário abaixo.

Quanto maior o período, menor é o intervalo entre duas frequências. Quanto menor o período, maior é o intervalo entre duas frequências.

De forma simplificada, e em analogia com música, podemos associar longos períodos a oscilações lentas e curtos períodos a oscilações rápidas.

Notemos que conforme $T \rightarrow +\infty$, o conjunto discreto de frequências se aproxima de um **continuum de frequências**.

1.3 Energia de um Sinal e Energia Espectral.

A energia de um sinal $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$E = \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

Comentário.

- ◇ A energia $E_s = E$ de um sinal (digamos que de voltagem) não é a energia convencional E_{conv} em Física. Mas, os conceitos são próximos e é possível converter um no outro através da fórmula

$$E_{\text{conv}} = \frac{E_s}{m} = \frac{1}{m} \int_0^1 |f(t)|^2 dt,$$

onde a constante m representa a magnitude (o valor absoluto), em unidades de medida apropriada, da carga transportada pelo sinal.

Por exemplo, se $f(t)$ representa o potencial em volts de um sinal elétrico $g(t)$ que se propaga ao longo de uma linha de transmissão então a constante m representa a impedância (resistência), em ohms da linha de transmissão.

Façamos uma análise dimensional. O sinal $f(t)$ representa o potencial

$$\text{medido em volts (V) e na forma } \frac{\text{energia}}{\text{carga elétrica}} = \frac{\text{joules}}{\text{coulomb}} = \frac{J}{C} = V.$$

As unidades de medida de E_s aparecem como

$$(\text{volts})^2 \times \text{tempo} = V^2 \times s,$$

contrariamente à energia convencional (medida em joules).

Segue então que a constante m representa a impedância (resistência)

$$\text{medida em ohms e na forma } \frac{\text{energia} \times \text{tempo}}{(\text{carga elétrica})^2} = \frac{V \times s}{C}.$$

Finda a análise dimensional, façamos um parêntese. Em Matemática é usual associar à integral

$$\int_0^1 |g'(t)|^2 dt$$

o conceito de energia [cinética, com $g'(t)$ interpretada como velocidade].

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

A **energia espectral**, associada a uma frequência $n \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ de um sinal 1-periódico $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é o número real

$$|\hat{f}(n)|^2 = |c_n|^2.$$

A energia espectral (*energy spectrum*) é chamada **potência espectral** (*power spectrum*), especialmente em comunicações, ou também chamada densidade espectral de potência [*spectral power density (SPD)*], especialmente em ótica.

A **(função) energia espectral** é uma função real positiva de uma frequência variável associada a um sinal que depende do tempo. Geralmente é chamada apenas por espectro do sinal. A função densidade espectral de potência de um sinal define a densidade de potência por unidade de banda em função da frequência deste sinal.

A unidade da densidade de potência espectral é

$$\frac{\text{watts} \times \text{radianos}}{\text{segundo}} = \frac{\text{watts}}{\text{hertz}},$$

lembrando que

$$\text{watts} = \frac{\text{joules}}{\text{segundo}} \quad \text{e} \quad \text{hertz} = \frac{\text{radianos}}{\text{segundo}}.$$

Intuitivamente, a função densidade espectral de potência auxilia na captura da frequência e identifica periodicidades.

A soma das energias espectrais é

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Assim, a identidade de Parseval

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

expressa a igualdade entre a energia do sinal e a soma das energias espectrais (identidade de Rayleigh).

Exemplo. Um sinal não periódico e a representação gráfica dos coeficientes de Fourier. Seja $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o sinal (uma função escada)

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

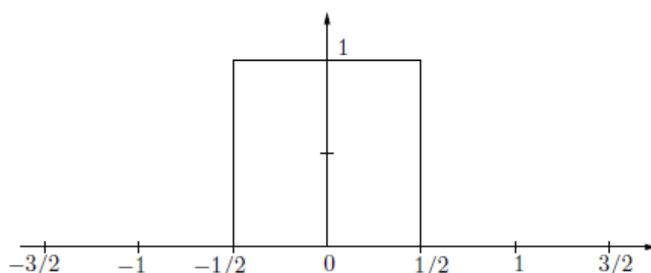


Figura 6: O gráfico da função-escada (sinal), par e centrada na origem, $\chi(t)$.

Podemos interpretar χ como modelando um interruptor ligado por um segundo e desligado no restante do tempo. A função χ é também dita **função indicador** ou **função característica** do intervalo aberto $(-1/2, 1/2)$.

A função χ não é periódica e portanto não tem uma série de Fourier. O estudo de versões periódicas de χ é útil por si mesmo e também para antecipar o conceito de transformada de Fourier de um sinal não periódico e definido em toda a reta real.

O gráfico abaixo representa uma versão periódica de χ e com período $T = 15$

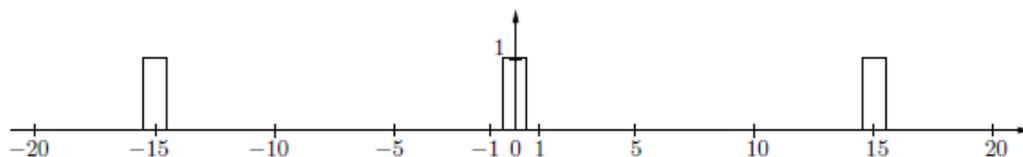


Figura 7: Versão periódica de $\chi(t)$, com $T = 15$.

Nesta versão periódica, e seguindo a interpretação citada acima, deixamos o interruptor ligado por exatamente 1 segundo a cada 14 segundos ininterruptos em que o interruptor permanece desligado.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Consideremos os períodos $T = 2$, $T = 4$ e $T = 16$. Os gráficos abaixo representam os números c_n obtidos (através de uma mudança de escala) multiplicando por T os coeficientes de Fourier das versões periódicas do sinal χ para os períodos $T = 2$, $T = 4$ e $T = 16$, respectivamente [vide cálculos abaixo]. Como χ é real e par, tais coeficientes de Fourier são números reais (ainda mais, a respectiva série de Fourier pode ser reescrita como um somatório de cossenos).

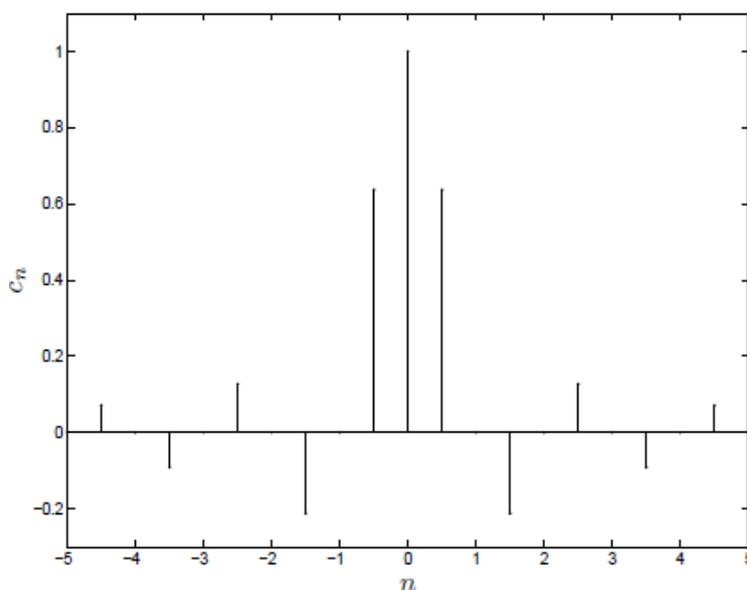


Figura 8: Coeficientes de Fourier (escalonados) da versão 2-periódica de $\chi(t)$.

Seja χ_T a versão T -periódica de χ , com $T \in \{2, 4, 16\}$. Então temos

$$\widehat{\chi_T}\left(\frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \chi_T(t) e^{-2\pi i \frac{m}{T} t} dt \quad \text{e} \quad \chi_T(t) = \chi(t), \quad \text{para todo } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right].$$

Donde segue

$$\widehat{\chi_T}\left(\frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \chi(t) e^{-2\pi i \frac{m}{T} t} dt$$

e as fórmulas

$$c_n = T \widehat{\chi_T}(n), \quad c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \chi(t) e^{-2\pi i n t} dt \quad \text{e} \quad c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i n t} dt \quad \text{se } n = \pm \frac{m}{T}.$$

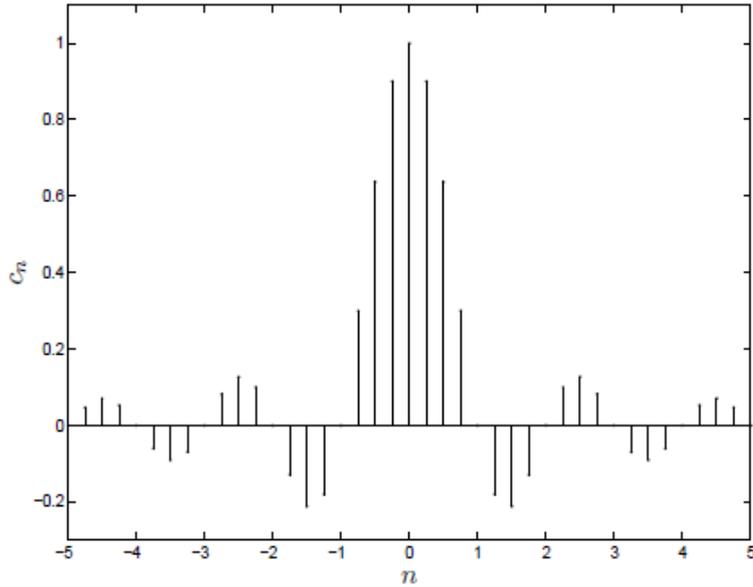


Figura 9: Coeficientes de Fourier da versão 4-periódica $\chi_4(t)$ de $\chi(t)$.

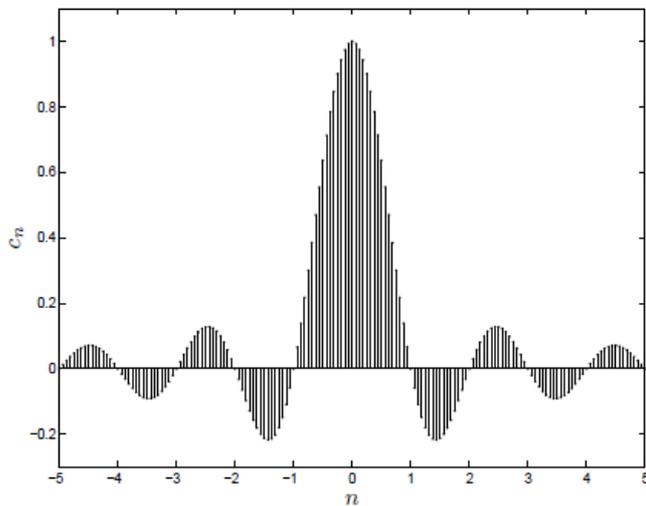


Figura 10: Coeficientes de Fourier da versão 16-periódica $\chi_{16}(t)$ de $\chi(t)$.

Os coeficientes c_n independem de T e, se $T \rightarrow +\infty$, a distribuição dos c_n 's se assemelha a uma curva bem definida e contínua. De fato, pela fórmula

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i n t} dt = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} \quad [\text{com } c_0 = 1]$$

segue que c_n , como uma função da frequência/variável n [isto é, $c_n = c(n)$], é uma função contínua se virmos n como a variável contínua em $(-\infty, +\infty)$.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Por outro lado, pela outra fórmula em destaque para c_n temos

$$c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \chi(t) e^{-2\pi i n t} dt, \text{ para todo } T \text{ grande.}$$

Então, impondo $T \rightarrow +\infty$ obtemos abaixo outra fórmula para c_n , a qual pode servir como **inspiração** para a definição da transformada de Fourier,

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

A seção Transformada de Fourier exibe um outro argumento, ainda mais sugestivo, para encontrarmos a definição da transformada de Fourier.

Observemos que provamos a fórmula (para todo n inteiro)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) e^{-2\pi i n t} dt = \begin{cases} \frac{\sin \pi n}{\pi n}, & \text{se } n \neq 0, \\ 1, & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Comentário. A função seno cardinal $\text{sinc}(x)$, não normalizada.

Em matemática, a função seno cardinal (não normalizada) $\text{sinc}(x)$ é dada por

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Em processamento digital de sinais a função $\text{sinc}(x)$ normalizada é dada por

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Os adjetivos que elas recebem (normalizada e não normalizada) se devem aos valores das **integrais oscilatórias**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx = 1.$$

[Para o cômputo destas integrais vide Capítulo 2 - Ferramentas - Seção 2.16 ou <http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DERIVAR-SOB-INTEGRAL.pdf>.]

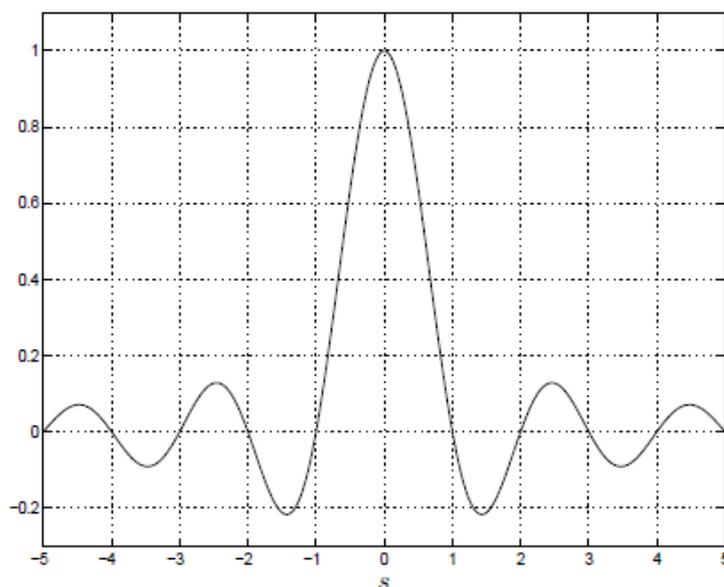


Figura 11: A função seno cardinal (*sinus cardinallis*) normalizada.

Todos os zeros da função normalizada são valores inteiros do variável x . Após definirmos a transformada de Fourier, provaremos (como já suspeitamos que seja verdade, graças ao exemplo anterior) que a função $\text{sinc}(x)$ normalizada é a transformada de Fourier da função-escada

$$\chi(t), \text{ com } \chi(t) = 1 \text{ se } t \in [-1/2, 1/2] \text{ e } \chi(t) = 0 \text{ caso contrário.}$$

A função $\text{sinc}(x)$ normalizada é fundamental em teoria dos sinais (por exemplo, para reconstruir sinais contínuos e de banda limitada sob certas condições).

Pelo primeiro limite fundamental do Cálculo, ambas as funções são contínuas na origem. Assim, mudando da variável real x para a variável complexa z , ambas as funções tem singularidade removível na origem $z = 0$ e portanto ambas são funções analíticas definidas em todo o plano complexo (isto é, ambas são funções **inteiras**).

O nome “sinc” para o seno cardinal normalizado foi introduzido por Phillip M. Woodward em 1952–1953 em um artigo e em um livro sobre teoria da informação, probabilidade, comunicações e radar.

1.4 Planetas, Hiparcus-Ptolomeu e a transformada de Fourier.

Da antiguidade grega e até o renascimento, vigorava o modelo para o movimento planetário descrito na obra *Almagesto* (± 150 DC), escrito em Alexandria (Egito) por Ptolomeu. Este modelo conduz a uma espetacular interpretação geométrica para séries de Fourier truncadas (e então para séries de Fourier infinitas e para transformada de Fourier). Suponhamos que

$$z_1(t) = a_1 e^{\frac{2\pi i t}{T_1}}, \text{ onde } -\infty < t < \infty,$$

com $a_1 = |a_1|e^{i\phi_1}$, onde $0 \leq \phi_1 < 2\pi$ descreve o movimento circular uniforme de um planeta P em torno da Terra E (Earth) na origem. Aqui $|a_1|$ é o raio da órbita, T_1 é o período and parâmetro de fase (ângulo) ϕ_1 serve para localizar o planeta no instante $t = 0$. Este modelo com uma circunferência não explica os ocasionais movimentos retrógrados dos planetas Marte, Jupiter e Saturno. Construímos um modelo mais sofisticado, com duas circunferências, escrevendo

$$z_2(t) = z_1(t) + a_2 e^{\frac{2\pi i t}{T_2}}$$

com $a_2 = |a_2|e^{i\phi_2}$, onde $0 \leq \phi_2 < 2\pi$. O planeta P agora descreve um movimento circular uniforme em torno de um ponto que, por sua vez, descreve um movimento circular uniforme em torno da planeta Terra E na origem [vide figura abaixo]. Este modelo duas-circunferências pode produzir o observado movimento retrógrado. mas não é bom o suficiente.

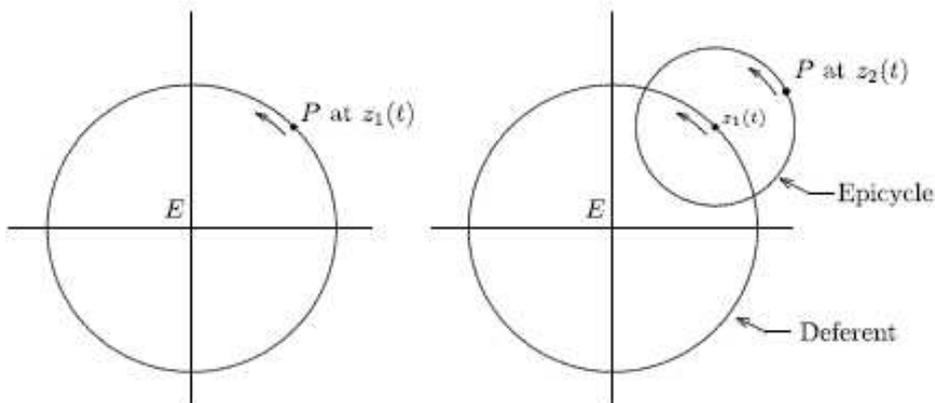


Figura 12: Dois movimentos circulares uniformes.

Procedendo desta forma obtemos uma interpretação geométrica do movimento com o somatório de exponenciais

$$z_n(t) = a_1 e^{\frac{2\pi i t}{T_1}} + a_2 e^{\frac{2\pi i t}{T_2}} + \dots + a_n e^{\frac{2\pi i t}{T_n}},$$

utilizando uma circunferência fixa (a deferente) e $n - 1$ moving circunferências (epiciclos). Tal movimento é periódico se T_1, T_2, \dots, T_n são múltiplos de algum $T > 0$. Neste caso, o somatório é uma série de Fourier com uma quantidade finita de termos. Hiparcus e Ptolomeu empregaram uma construção deste tipo com quatro circunferências (com a Terra próxima mas não na origem do sistema) para acompanhar o movimento de cada planeta. Tais modelos foram usados para prever a posição dos cinco planetas desde a antiguidade até que Kepler e Newton descobrissem as leis do movimento planetário, 1300 anos depois.

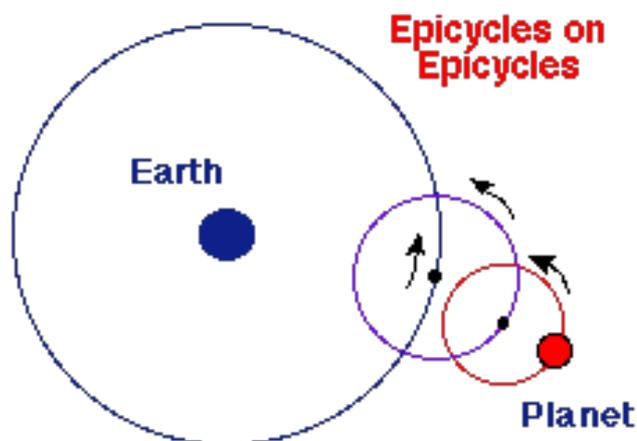


Figura 13: Três movimentos circulares uniformes.

Ressaltemos que os antigos gregos (vários séculos antes de Ptolomeu) tinham uma teoria segundo a qual o Sol, a Lua e os planetas se moviam em torno da Terra em círculos. Isto logo foi mostrado que estava errado pois uma observação cuidadosa mostra que às vezes os planetas se movem “para trás” nos céus. Assim, Ptolomeu teve uma nova idéia - os planetas se movem em torno de um grande círculo e simultaneamente se movem em torno de pequenos círculos.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Porém, analisando mais detidamente tal modelo percebeu-se que mesmo esse modelo (com três circunferências) não funcionava assim eles colocaram círculos e mais círculos... Por fim, chegou-se a um mapa como o abaixo

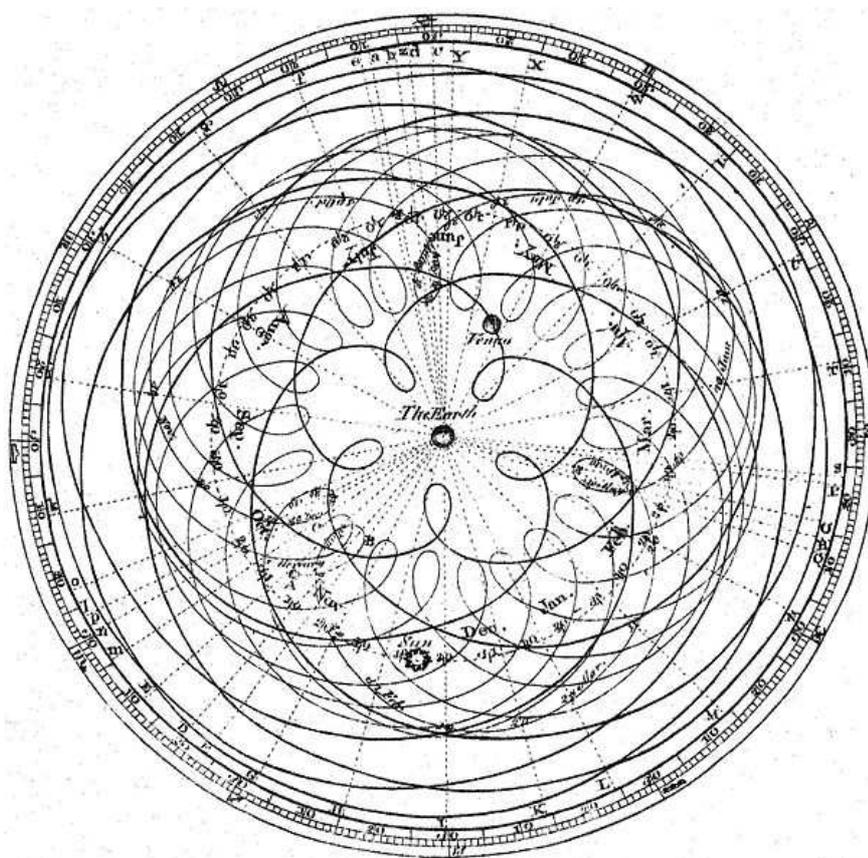


Figura 14: Sistema geocêntrico de Hiparcus-Ptolomeu. A Terra (*Earth*) no centro, o planeta Venus e o Sol (*Sun*), com revolução anual circular e indicada por meses. James Ferguson, *Astronomy Explained*, 1756.

Para melhor entender a superposição de um grande número de circunferências e transformadas de Fourier, vale a pena ver o vídeo abaixo.

<https://www.youtube.com/watch?v=QVuU2YCwHjw>

Este vídeo, ilustra que podemos apresentar uma órbita qualquer adicionando uma quantidade suficiente de circunferências desde que variemos o tamanho das circunferências e as velocidades angulares.

Uma forma simples de representar o movimento em uma circunferência pode ser obtida com números complexos. Um ponto movendo-se no plano é dado por uma função complexa $z(t)$ na variável temporal t . Assim, o movimento em uma circunferência de raio R e com frequência angular ω é dada por

$$z(t) = Re^{i\omega t}.$$

Se o movimento ocorre em torno de duas circunferências, com uma delas apoiada e ao redor da outra, a posição é dada por

$$z(t) = R_1 e^{i\omega_1 t} + R_2 e^{i\omega_2 t}.$$

Podemos aumentar para três, quatro ou mesmo uma quantidade infinita de circunferências. Se permitirmos circunferências com qualquer possível frequência angular, obtemos a fórmula

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

A função $R(\omega)$ é a **transformada de Fourier** de $z(t)$. Traçando um caminho no plano e dependente do tempo tal curva pode ser esboçada adicionando uma quantidade infinita de circunferências de distintas frequências. O raio das circunferências é a transformada de Fourier do caminho. [Atenção: devemos permitir que as circunferências tenham raio complexo. Isto não é esquisito. É como dizer que as circunferências tem raios reais, mas não precisam começar no mesmo lugar. No instante $t = 0$ pode-se começar tão distante quanto desejado em cada circunferência.]

Se o caminho é fechado (como no vídeo), a transformada de Fourier é de fato uma série de Fourier. A maioria das frequências não é necessária e obtemos

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

onde ω_0 é a frequência angular associada com a repetição (isto é, ao período). A única circunferência que é necessária é a mais lenta e então: a que é duas, três, quatro,... vezes mais rápida. Para reproduzir um caminho fechado ainda é necessário uma quantidade infinita de circunferências mas desta feita tal quantidade é enumerável. Uma quantidade finita e suficientemente grande de circunferências fornece uma aproximação razoável.

Este é um resumo razoável sobre análise de Fourier. As questões que surge são: como executar, para que serve e porque funciona,

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1.5 Transformada de Fourier

A teoria das séries de Fourier lida com funções periódicas na reta [ou, dito de outra forma, funções definidas no círculo unitário

$$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Correspondentemente, analisamos uma função definida na reta e não periódica com a Transformada de Fourier desta função. Esta transformada, distintamente das séries de Fourier (com conjunto discreto de frequências, igualmente espaçado e possivelmente \mathbb{Z}), tem um conjunto contínuo de frequências (a reta real \mathbb{R}).

Uma das importâncias da transformada de Fourier se dá na teoria das equações diferenciais. Nesta área, por vezes a transformada de Fourier permite transformar um *problema difícil* envolvendo uma dada função f em um *problema fácil* envolvendo a transformada de Fourier $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. Obtida a solução φ deste problema fácil, a solução do problema difícil é a transformada de Fourier inversa $g = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$. Vide diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{f} \\ \text{equação difícil} \downarrow & & \downarrow \text{equação fácil} \\ g & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \varphi \end{array} .$$

A seguir, procuremos “deduzir de uma forma sensata” a fórmula para a transformada de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (logo, definida na reta real).

Para utilizarmos métodos de integração para funções definidas na reta real, tais funções devem ter algum *decaimento no infinito*. Ainda, o espaço de funções que desejamos analisar deve ser suficientemente amplo de forma a conter as funções infinitamente deriváveis e de *suporte compacto* (isto é, nulas no complementar de um intervalo da forma $[-r, r]$). Concentraremos então nossa análise em uma função arbitrária, de classe C^∞ e de suporte compacto. Enfatizemos que não é pouco considerarmos tais funções pois até mesmo o impulso/distribuição definido pelo δ de Dirac, é limite de uma sequência de funções de classe C^∞ e de suporte compacto. Vide vide Capítulo 2 - Ferramentas - Seção 2.6 ou

<http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Integral-Reta.pdf>.

[Vale a pena observar que as funções de classe C^∞ e de suporte compacto formam um conjunto denso em cada um dos espaços de funções (definidas na reta) em que é estudada a Teoria da Transformada de Fourier.]

A idéia de Fourier. Consideremos uma função/sinal, digamos $f = f(s)$ infinitamente derivável e nula fora do intervalo $[-1/2, 1/2]$. Seja $T > 1$. Definamos

$$g(t) = f(tT), \text{ para todo } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Para a função g temos o desenvolvimento em séries de Fourier

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n t}, \text{ para todo } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

com coeficiente (abaixo, introduzimos $tT = s$)

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) e^{-2\pi i n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{-2\pi i \frac{n}{T} s} ds = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(s) e^{-2\pi i \frac{n}{T} s} ds \\ &= \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right). \end{aligned}$$

Substituamos c_n na série de Fourier para $g(t)$. Utilizemos $g(t) = f(s)$, com $s = tT$.

Encontramos o somatório infinito

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} s} \frac{1}{T}.$$

Tal identidade vale para cada T arbitrariamente grande. Fixado T , os valores

$$\dots, -\frac{3}{T}, -\frac{2}{T}, -\frac{1}{T}, 0, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$$

formam uma partição do intervalo $(-\infty, +\infty)$. Analogamente às tradicionais notações para somas de Riemann, e escrevendo

$$\xi_n = \frac{n}{T} \quad \text{e} \quad \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T} = \Delta\xi_n,$$

é razoável esperarmos a validade da fórmula

$$f(s) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{2\pi i \xi_n s} \Delta\xi_n \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi s} d\xi.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

De fato, provaremos (no capítulo apropriado) que esta fórmula é válida para toda f infinitamente derivável e de suporte compacto. Melhor ainda, provaremos que a fórmula é válida para toda função infinitamente derivável e rapidamente decrescente no infinito, este é o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, também chamado **espaço das funções infinitamente deriváveis e rapidamente decrescentes** ou também **espaço de Schwartz** (em homenagem a Laurent Schwartz).

A fórmula relacionando f e \hat{f} , vista acima, nos diz como recuperarmos f dada \hat{f} . Isto é, encontramos a fórmula para a **transformada de Fourier inversa**. De fato, indicando a transformada de Fourier por \mathcal{F} e sua inversa por \mathcal{F}^{-1} temos

$$f(s) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi s} ds$$

donde então segue

$$\mathcal{F}^{-1}(h)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{2\pi i \xi s} ds, \quad \text{para toda } h \text{ no domínio de } \mathcal{F}^{-1}.$$

Por outro lado, dada $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ integrável e 1-periódica temos

$$\hat{\psi}(n) = \int_0^1 \psi(s) e^{-2\pi i n s} ds.$$

As duas últimas fórmulas integrais acima nos sugerem definirmos

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt.$$

Veremos que tal definição satisfaz $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = Id$, o operador identidade.

Por fim, deve-se destacar que a transformada de Fourier é uma ferramenta útil para estudar funções (sinais, ondas) não apenas infinitamente deriváveis mas também funções contínuas e mesmo funções descontínuas (tais como funções-escadas ou ondas-quebradas) mas também impulsos. O impulso mais famoso (em Matemática, claro) é o δ de Dirac. Matematicamente, um impulso é visto como uma distribuição.

Analogamente a séries de Fourier,

$\hat{f}(\xi)$ mede a componente de f que oscila com frequência ξ .

1.6 Gauss e a Descoberta de Ceres.

O asteroide Ceres foi descoberto no primeiro dia do século 19, e logo a seguir foram descobertos os asteroides Pallas, Vesta e Juno.

Gauss interessou-se pelo problema de determinar suas órbitas, através dos dados observados. Em 1802, o Barão von Zach publicou 12 registros para a órbita de Pallas [vide figura abaixo]. Gauss interpolou estes dados desta data utilizando um polinômio trigonométrico com período de 360 da forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{11} c_k e^{\frac{2\pi i k x}{360}},$$

com os 12 coeficientes c_0, c_1, \dots, c_{11} escolhidos de forma tal que o gráfico de $y = y(x)$ passe pelos 12 pontos dados:

$$(n \times 30, y_n), \text{ onde } n = 0, 1, \dots, 11.$$

Isto é,

$$y_n = \sum_{k=0}^{11} c_k e^{\frac{2\pi i k n}{12}}, \text{ onde } n = 0, 1, \dots, 11.$$

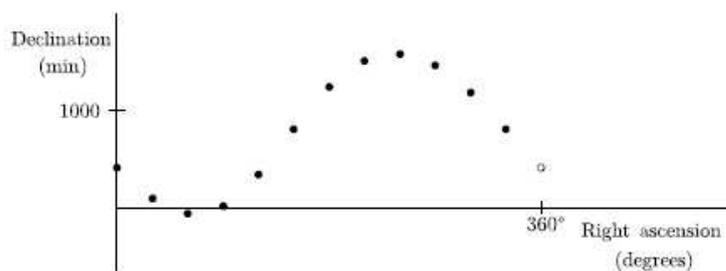


Figura 15: Dados sobre a órbita do asteroide Pallas.

Donde então segue

$$c_k = \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{11} y_n e^{-\frac{2\pi i k n}{12}}, \text{ onde } k = 0, 1, \dots, 11.$$

Obviamente, uma coisa é escrever esta fórmula e outra é obter o valor numérico para cada coeficiente c_k . Gauss efetuou tal cálculo “na mão”.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Beerends, R.J. & ter Morsche, H. G. & van den Berg, J. C. & van de Vrie, E. M., *Fourier and Laplace Transform*, Cambridge University Press, 2003.
3. Boggess, A. & Narcowich, F. J., *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, 2nd ed., Wiley, 2009.
4. Folland, G. B. *Fourier Analysis and its Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, 1992.
5. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
6. Köerner, T. W. *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
7. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).
8. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
9. Osgood, B., *The Fourier Transform and its Applications*, Lectures Notes - Electrical Engineering Department - Stanford University - CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014. [free PDF on the internet].
10. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.
11. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Fourier Analysis*, Princeton University Press, 2003.

Departamento de Matemática

Universidade de São Paulo

oliveira@ime.usp.br

<http://www.ime.usp.br/~oliveira>