Ano 2015

EQUAÇÕES DE ORDEM 2 E COEFICIENTES VARIÁVEIS - TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE.

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Introdução

Nestas notas analisamos as edo's lineares de segunda ordem e da forma

$$y'' + Py' + Qy = R,$$

onde $P(t)$, $Q(t)$ e $R(t)$ são funções arbitrárias definidas em um intervalo aberto fixado. Tal equação é dita homogênea ou não homogênea conforme R é ou não nula. Se R não é a função nula, analogamente às edo's de segunda ordem e coeficientes constantes, a solução geral da edo não homogênea

$$(NH) \qquad y'' + Py' + Qy = R$$

é dada pela soma da solução geral da edo homogênea associada

$$(H) \qquad y'' + Py' + Qy = 0$$

com uma solução particular da edo não homogênea (NH).

Como já vimos com as edo's lineares com coeficientes constantes, para aguardarmos a unicidade da solução demos impor condições iniciais [fisicamente, denotando a variável por t e interpretando $y(t)$ como a posição de uma partícula no instante t e supondo que o instante inicial corresponte a $t = 0$, para determinarmos a posição da partícula a cada instante t é necessário especificar a posição inicial $y(0)$ e a velocidade inicial $y'(0)$].

Passamos então a analisar o problema com valor inicial (e na variável t)

$$(PVI) \qquad \begin{cases} y'' + Py' + Qy = R, \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta, \end{cases}$$

onde α e β são números reais arbitrários.

Há vários teoremas de existência e/ou unicidade para tal (PVI) e tais resultados dependem das hipóteses assumidas sobre as funções P, Q e R e também sobre o que se espera da solução $y = y(t)$.

Entretanto, tanto o enunciado como a demonstração do Teorema Fundamental de Existência e Unicidade (TEU) para o (PVI) acima são análogos aos seus correspondentes no Teorema de Picard para equações de primeira ordem. Na verdade o (TEU), e sua demonstração, para edo's de segunda ordem é apenas uma versão vetorial do Teorema de Picard e sendo assim, como o leitor certamente intuirá, vale um teorema análogo (com demonstração também análoga) para edo's lineares de ordem n.

Nos ocuparemos aqui de enunciarmos o (TEU) para uma edo de segunda ordem. Para tal, reduziremos a edo de segunda ordem (não homogênea) a um sistema linear (não homogêneo) com duas edo's de primeira ordem. Introduzindo as funções não conhecidas

$$\begin{cases} u_1(t) = y(t) \\ u_2(t) = y'(t) \end{cases}$$

reduzimos o (PVI) ao sistema linear

$$(SL) \quad \begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -Pu_2 - Qu_1 + R \\ u_1(t_0) = \alpha \\ u_2(t_0) = \beta. \end{cases}$$

O qual pode ser reescrito matricialmente como

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que se y é uma solução do (PVI) então o par de funções $(u_1, u_2) = (y, y')$ é uma solução do sistema (SL). Equivalentemente, se o par de funções (u_1, u_2) é uma solução do sistema (SL) então a função $y(t) = u_1(t)$ é uma solução do (PVI).

Por outro lado, utilizando a notação vetor-coluna em $\mathbb{R}^2$ e definindo a função em três variáveis reais e a valores em $\mathbb{R}^2$:

$$F(t,u_1,u_2)=\begin{pmatrix} u_2 \\ -P(t)u_2-Q(t)u_1+R(t)\end{pmatrix}$$

vemos que o par de funções $\big(u_1(t),u_2(t)\big)$ resolve o sistema (SL) se e somente se

$$F(t,u_1(t),u_2(t))=\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t)\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \big(u_1(t_0),u_2(t_0)\big)=(\alpha,\beta).$$

Utilizando a notação vetor-linha em $\mathbb{R}^2$ concluímos que o sistema (SL) admite uma solução se e só se existe uma função vetorial $U(t)=\big(u_1(t),u_2(t)\big)$ tal que

$$\begin{cases} U'(t)=F\big(t,U(t)\big) \\ U(t_0)=U_0, \end{cases}$$

onde $U_0=(\alpha,\beta)$. Com tal formulação estender naturalmente o teorema de Picard.

Para enunciar esta versão do teorema de Picard, introduzamos duas notações. Supondo t uma variável real, indicamos por $y=y(t)=\big(y_1(t),y_2(t)\big)$ uma curva em $\mathbb{R}^2$ e $y(t_0)=y_0$ a posição no instante t_0. Se $F=F(t,y_1,y_2)$ é uma função vetorial em três variáveis reais e a valores em $\mathbb{R}^2$, escrevemos também

$$F=(F_1,F_2), \quad \text{onde } F_1 \text{ e } F_2 \text{ são as componentes de } F.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\frac{\partial F}{\partial y_2}\right).$$

Teorema de Picard para Equações de Segunda Ordem. *Seja $F:Q\to\mathbb{R}^2$, onde Q é um cubo centrado em $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$, com $F=F(t,y)$ e $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ contínuas, para $1\leq i,j\leq 2$. Então, localmente, existe uma só solução para o PVI*

$$\begin{cases} y'(t) &= F(t,y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Prova.

Basta adaptar a prova da versão básica do teorema de Picard (vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-PICARD.pdf`)♣

Funções Analíticas

Dizemos que uma função $f(x)$ é analítica em um intervalo aberto se f é de classe C^∞ em tal intervalo e se para todo ponto x_0 neste intervalo a função f é dada por sua série de Taylor em uma vizinhança do ponto x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \text{ se } |x - x_0| < r, \text{ para algum } r > 0.$$

Como exemplos de funções analíticas, em seus respectivos domínios, temos:

- séries de potências (um polinômio de grau finito ou infinito),

- funções trigonométricas,

- funções exponenciais,

- funções logarítmicas e

- as radiciações $\sqrt[n]{x}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $x \in (0, \infty)$.

Ainda, o espaço das funções analíticas é fechado por adição, multiplicação por escalar, produto, composição, inverso multiplicativo (se a função não se anula), divisão (se e o denominador não se anula) e inversão de funções (quando existir a função inversa). Ainda mais, o espaço das funções analíticas é fechado por derivação e por integração, sendo que toda série de potências pode ser derivada e integrada termo a termo, sem alterar o intervalo de convergência. Segue então que as seguintes funções também são analíticas:

- funções racionais

- $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$,

- $\cosh x$, $\sinh x$ e $\tanh x$.

Equações Diferenciais de Ordem 2 e Coeficientes Analíticos.

O que apresentamos a seguir é válido para todo intervalo aberto, limitado ou não, incluindo a reta toda. Como a função $\tan x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ é analítica e sua inversa $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ é também analítica [e todo intervalo aberto é analiticamente bijetivo com $(-\pi/2, \pi/2)$] simplificamos a apresentação da teoria a seguir supondo que todas as funções são analíticas em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Sejam $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ funções analíticas em $\mathbb{R}$. Consideremos

$$(PVI) \quad \begin{cases} y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y = R(x), \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta. \end{cases}$$

Na última seção destas notas provamos a existência local de uma solução analítica de tal PVI. Assim, devido à unicidade da solução local garantida pelo teorema de Picard para edo's de segunda ordem, a única solução local para tal (PVI) é uma função analítica. Para a prova de que existe uma solução analítica cuja série de potências centrada em x_0 converge em toda a reta, vide R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira Jr., Equações Diferenciais com Aplicações, pp. 216-217].

Abaixo, provamos a unicidade da solução analítica, sem o teorema de Picard.

Teorema. *Vale a* unicidade da solução analítica *do PVI acima.*

Prova.

É fácil ver que podemos supor $x_0 = 0$. Dadas duas soluções y_1 e y_2 do PVI acima, a diferença delas y é uma solução (analítica) da edo homogênea com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Pela edo homogênea é trivial ver que

$$y''(0) = 0.$$

Em seguida, derivando a equação $y'' + Py' + Qy = 0$ obtemos $y'''(0) = 0$. Assim por diante, encontramos $y^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, os coeficientes da série de Taylor de y são nulos e portanto y é a função nula e $y_1 = y_2$■

Destaquemos que se o PVI acima é a coeficientes constantes então já sabemos que vale a existência, a unicidade e a analiticidade das soluções.

O Wronskiano

Dadas duas funções deriváveis y_1 e y_2, seu determinante **wronskiano** é:

$$W(x) = W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Teorema. *Sejam y_1 e y_2 duas soluções da edo homogênea*

$$(H) \qquad y'' + P(x)y' + Q(x)y$$

e $W(x)$ o wronskiano de tais funções. São válidas as propriedades abaixo.

(a) O wronskiano satisfaz a edo de primeira ordem

$$W' + PW = 0.$$

(b) É válida a **Fórmula de Abel-Liouville**

$$W = ce^{\int P(x)dx},$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e $\int P(x)dx$ é uma primitiva de $P(x)$.

Prova.

(a) Temos

$$W'(x) = (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1'' \text{ e}$$

$$\begin{cases} y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0 \\ y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema acima por $-y_2$ e a segunda por y_1 e então somando-as termo a termo encontramos

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + P(y_1y_2' - y_2y_1') + Q(y_1y_2 - y_2y_1) = 0.$$

Logo,

$$W' + PW = 0.$$

(b) É fácil ver (cheque)■

Corolário. *Sejam y_1 e y_2 duas soluções da edo homogênea. Então, ou o wronskiano não se anula em nenhum ponto ou o wronskiano se anula em todo ponto.*

Prova.

Segue imediatamente da Fórmula de Abel-Liouville∎

Dadas duas funções y_1 e y_2 deriváveis quaisquer é óbvio que se $\{y_1, y_2\}$ é L.D. então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 = \lambda y_2$ ou $y_2 = \lambda y_1$ e, em qualquer destes casos obtemos $W[y_1, y_2] \equiv 0$. A recíproca não é verdade em geral pois se y_1 é uma função não nula que é nula no semi-eixo positivo e y_2 é uma função não nula que é nula no semi-eixo negativo então temos $W[y_1, y_2] \equiv 0$ mas $\{y_1, y_2\}$ não é L.D.

Entretanto, a recíproca é verdadeira se y_1 e y_2 são soluções da edo (H).

Teorema. *Duas soluções y_1 e y_2 de (H) são L.D. se e somente se $W \equiv 0$.*

Prova.

Comentamos acima que a "ida" é sempre válida. Vejamos a "volta". Fixando $x_0 \in \mathbb{R}$, como $W[y_1, y_2](x_0) = 0$, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ não ambos nulos tais que

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a função $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y = 0, \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Pelo teorema de Picard temos $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$, com $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, e $\{y_1, y_2\}$ L.D.∎

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO LOCAL ANALÍTICA - UMA VERSÃO SIMPLIFICADA DO TEOREMA DE CAUCHY

Consideremos a edo homogênea com coeficientes analíticos em toda a reta

$$(H) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

onde

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{e} \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como primeiro passo, determinaremos uma solução formal da edo acima [isto é, uma série de potências formal que formalmente resolve a edo considerada]. No segundo passo verificaremos que tal série formal de potências efetivamente converge em todo ponto de $\mathbb{R}$ a uma função $y = y(x)$ que é solução de (H).

Procuremos determinar uma solução formal

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$

pelo **método dos coeficientes de Euler**, encontrando uma fórmula recursiva para o cômputo dos coeficientes y_n. Notemos as seguintes fórmulas

$$y' = \sum n y_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum n(n-1) y_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) y_{n+2} x^n,$$

$$Py' = \left(\sum p_j x^j\right)\left(\sum (k+1) y_{k+1} x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} p_j (k+1) y_{k+1} \right) x^n$$

$$Qy = \left(\sum q_j x^j\right)\left(\sum y_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} q_j y_k \right) x^n.$$

Logo,

$$y'' + Py' + Qy = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) y_{n+2} + \sum_{j+k=n} p_j (k+1) y_{k+1} + \sum_{j+k=n} q_j y_k \right] x^n.$$

Igualando tais coeficientes a zero vemos que cada coeficiente y_{n+2} é determinado pelos valores $p_0, \ldots, p_n$, $q_0, \ldots, q_n$ e $y_0, \ldots, y_{n+1}$, pela **fórmula de recorrência**

$$y_{n+2} \;=\; -\frac{\sum_{j+k=n} p_j (k+1) y_{k+1} + \sum_{j+k=n} q_j y_k}{(n+2)(n+1)}.$$

Desejamos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2}x^n$ tem raio de convergência não nulo. Tal série tem mesmo raio de convergência que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)y_{n+2}x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2}x^{n+2}\right)''.$$

Logo, podemos *desprezar* o denominador $(n+2)(n+1)$ presente na fórmula de recorrência. Assim, *basta* mostrarmos que os raios de convergência das séries

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} q_j y_k\right)x^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} p_j(k+1)y_{k+1}\right)x^n$$

são não nulos. A seguir, notemos a desigualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{j+k=n} p_j(k+1)y_{k+1}\right||x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n}|p_j||y_{k+1}|\right)(n+1)|x|^n$$

e que a série à direita tem *o mesmo raio* de convergência que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n}|p_j||y_{k+1}|\right)|x|^n.$$

Concluímos então que é *suficiente* mostrarmos que o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} q_j y_k\right)x^n$$

é não nulo. Introduzamos simplificações para analisar tal raio de convergência.

Observemos que, dado um arbitrário $R > 0$, uma série qualquer

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

converge para todo $|x| < R$ se e somente se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|r^n$$

converge para todo $r \in [0, R)$. Tendo isto em vista, para analisarmos o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} q_j y_k\right)x^n$$

podemos tomar os valores absolutos dos coeficientes $q_{j's}$ e $y_{k's}$ e supormos $x \geq 0$.

Seja então (b_k) uma sequência não nula de números positivos tal que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k R^k = B = B(R), \text{ é finita (e maior que zero) para } R > 0.$$

Sejam a_0 e a_1 dois números positivos arbitrários. Definamos a sequência

$$(S) \quad a_{n+2} = \sum_{j+k=n} a_j b_k, \quad \text{onde } n \geq 0.$$

Teorema. *A série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ *é convergente para* $r > 0$ *e pequeno o suficiente.*

Prova.

Para iniciar notemos que para quaisquer números $x_0, \ldots, x_m$ e $y_0, \ldots, y_m$ temos

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_{j+k=n} x_j y_k \leq \left(\sum_{j=0}^{m} x_j \right) \left(\sum_{k=0}^{m} y_k \right).$$

Assim, dado $m \in \mathbb{N}$ pela definição da sequência (S) temos

$$\sum_{n=0}^{m} a_{n+2} r^n = \sum_{n=0}^{m} \sum_{j+k=n} \left(a_j r^j b_k r^k \right) \leq \left(\sum_{j=0}^{m} a_j r^j \right) \left(\sum_{k=0}^{m} b_k r^k \right).$$

Supondo $r \in [0, R)$, multiplicando as identidades acima por r^2, estendendo o penúltimo somatório até $j = m + 2$ e majorando último somatório por B, obtemos

$$\sum_{n=0}^{m} a_{n+2} r^{n+2} \leq \left(\sum_{j=0}^{m+2} a_j r^j \right) r^2 B.$$

Donde segue

$$\sum_{j=0}^{m+2} a_j r^j - a_0 - a_1 r \leq r^2 B \sum_{j=0}^{m+2} a_j r^j.$$

Assim,

$$(1 - r^2 B) \sum_{j=0}^{m+2} a_j r^j \leq a_0 + a_1 r.$$

Se $r^2 B < 1$ [isto é, $r < 1/\sqrt{B}$] obtemos

$$\sum_{j=0}^{m+2} a_j r^j \leq \frac{a_0 + a_1 r}{1 - r^2 B}.$$

Impondo $m \to \infty$ obtemos o resultado desejado■

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`