DETERMINANTES 2×2 - Interpretação Geométrica e Interpretação no Plano Complexo. Aplicações Algébricas: Dependência Linear, Paralelismo e Sistemas Lineares

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira (IMEUSP)

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

2015-2017-2018

1. ÁREA DE UM PARALELOGRAMO

Dados a e b, números reais, seja $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ o vetor em $\mathbb{R}^2$ representado pelo segmento de início no ponto $(0,0)$ e final (a,b). Dois vetores $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ e $\vec{v} = \langle c, d\rangle$, não paralelos determinam um paralelogramo $\mathcal{P}$ (suposto no primeiro quadrante). Sejam $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \langle a+b, c+d\rangle$ e a representação

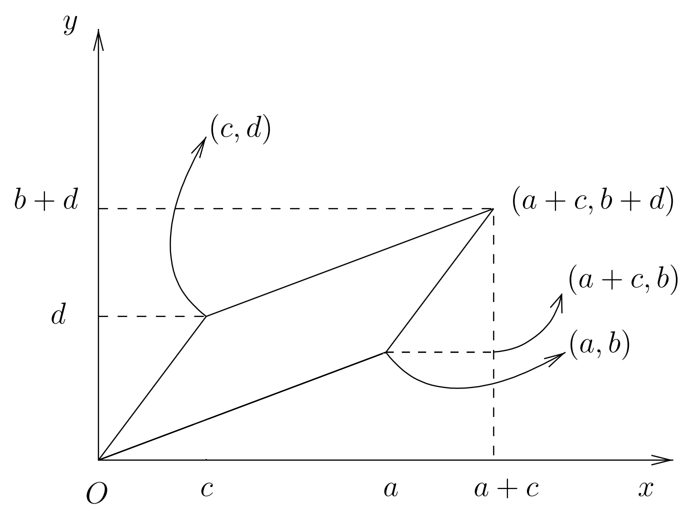

Figura 1: Determinante/Área

Pela figura, a área de $\mathcal{P}$ é dada pela área do retângulo de vértices

$$O = (0,0),\ (a+c,0),\ (a+c,b+d) \text{ e } (0,b+d)$$

subtraindo-se as áreas de dois trapézios congruentes e dois triângulos congruentes. Encontramos então

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{P}) &= (a+c)(b+d) - 2\left[\frac{(a+c+c)b}{2}\right] - 2\left(\frac{cd}{2}\right) \\
&= (ab+ad+bc+cd) - (ab+2bc) - cd \\
&= ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \clubsuit
\end{aligned}$$

2. DETERMINANTES $2X2$ e NÚMEROS COMPLEXOS.

Sejam a, b, c e d números reais e i a unidade imaginária. Consideremos os vetores e os números complexos

$$\begin{cases} \overrightarrow{z} = \langle a, b \rangle \quad \text{e} \quad \overrightarrow{w} = \langle c, d \rangle \\ \text{e} \\ z = a + bi \quad \text{e} \quad w = c + di. \end{cases}$$

A parte real de z é $\text{Re}(z) = a$. A parte imaginária de z é $\text{Im}(z) = b$.

O conjugado de z é $\overline{z} = a - bi$.

O módulo do número complexo z é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Segue $|z| = |\langle a, b \rangle|$.

O produto interno real é dado por

$$\overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{w} = ac + bd.$$

O produto interno complexo de z por w é dado por

$$z \cdot w = z\overline{w} = (a + bi)\overline{(c + di)} = (a + bi)(c - di).$$

[O produto interno complexo não é comutativo, mas o real é comutativo.]

Vale então a seguinte fórmula, que relaciona o produto interno complexo com produto interno real e determinantes de ordem dois,

$$\overline{z}w = (a - bi)(c + di) = (ac + bd) + i(ad - bc) = \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{w} - i \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Segue então $\text{Re}(\overline{z}w) = \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{w}$.

Segue também a muito útil fórmula

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \text{Im}(\overline{z}w)}.$$

Ainda mais, escrevendo $z = |z|e^{i\alpha}$ e $w = |w|e^{i\beta}$ obtemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} &= \text{Im}\left(|z|e^{-i\alpha}|w|e^{i\beta}\right) \\ &= \text{Im}\left(|z||w|e^{i(\beta-\alpha)}\right) \\ &= |z||w|\text{Im}\left[\cos(\beta - \alpha) + i\sin(\beta - \alpha)\right] \\ &= |\langle a, b| \, |\langle c, d \rangle| \sin(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

para a área de $\mathcal{P}$ em função de dois lados adjacentes e do ângulo formado ♣.

3. DISTÂNCIA DE PONTO A RETA.

A equação geral de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ é

$$D : ax + by + c = 0, \text{ com } a \text{ ou } b \text{ não nulo.}$$

Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, a distância de P_0 à reta D é

$$\text{dist}(P_0; D) = \frac{|\ ax_0\ +\ by_0\ +\ c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Prova.

Seja m_r o coeficiente angular de uma reta r qualquer. As retas, designadas por S, perpendiculares à reta D, tem coeficiente angular m_S tal que

$$m_S.m_D = -1.$$

Logo, utilizando o parametro d, uma equação geral de tais retas é

$$S\ :\ -bx + ay + d = 0, \text{ onde } d \in \mathbb{R}.$$

Entre tais retas perpendiculares à reta D queremos a reta por $P_0 = (x_0, y_0)$. Assim temos

$$-bx_0 + ay_0 + d = 0.$$

Donde determinamos o valor $d = bx_0 - ay_0$ e obtemos então a reta

$$S_{P_0}\ : -bx + ay + (bx_0 - ay_0) = 0.$$

Para determinarmos o ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ de intersecção entre as retas perpendiculares entre si D e S_{P_0} passamos a resolver o sistema

$$(*) \begin{cases} ax + by &= -c \\ -bx + ay &= ay_0 - bx_0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a, a segunda por $-b$ e então somando-as temos

$$x_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2 x_0 - aby_0 - ac).$$

A seguir, multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a e somando-as encontramos

$$y_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(-abx_0 + a^2 y_0 - bc).$$

Então, o quadrado da distância de $P_0 = (x_0, y_0)$ a $P_1 = (x_1, y_1)$ é

$$|P_0P_1|^2 = (x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2$$
$$= \left[x_0 \;-\; \frac{1}{a^2+b^2}(\; b^2x_0 - aby_0 - ac\;)\right]^2 + \left[y_0 \;-\; \frac{1}{a^2+b^2}(\; -abx_0 + a^2y_0 - bc\;)\right]^2$$
$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\;(\;a^2x_0+aby_0 \;+\; ac\;)^2 \;+\; (\;abx_0 \;+\; b^2y_0+bc\;)^2\;]$$
$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\;a^2(ax_0+by_0+c)^2 + b^2(ax_0+by_0+c)^2\;]$$
$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\;(a^2+b^2)\;(ax_0 \;+\; by_0 \;+\; c)^2\;]$$
$$= \frac{(ax_0 \;+\; by_0 \;+\; c)^2}{a^2+b^2}.$$

A prova está completa. Elaboremos uma segunda prova.

Segunda Prova.

Reescrevendo o sistema (*) na notação matricial temos

$$(**) \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ ay_0 - bx_0 \end{bmatrix}.$$

Observação. É fácil constatar que dada uma matriz inversível

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

sua inversa é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{AD-BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução do sistema (*) é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ ay_0 - bx_0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$x_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-ac - aby_0 + b^2x_0)$$

e

$$y_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-bc + a^2y_0 - abx_0)$$

e a demonstração segue como a anterior(a primeira) ♣

4. DEPENDÊNCIA LINEAR E PARALELISMO.

Definições (Dependência Linear e Independência Linear). Consideremos $\overrightarrow{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\overrightarrow{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, dois vetores no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

- Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são linearmente dependentes (ou LD) se existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, não ambos nulos, tais que

$$\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \qquad [\text{com } \alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0.]$$

  Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LD, dizemos que o conjunto $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LD.

- Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são LD, então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são linearmente independentes (ou LI).

  Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são LD, dizemos que o conjunto $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LI.

Definições (Paralelismo).

- O vetor nulo $\overrightarrow{0} = (0, 0)$ é paralelo a todo vetor de $\mathbb{R}^2$.
- Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, onde A, B, C, e D são pontos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ tais que $A \neq B$ e $C \neq D$, são ditos paralelos se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores arbitrários em $\mathbb{R}^2$. É trivial ver que

$$\overrightarrow{u} \text{ e } \overrightarrow{v} \text{ são LD} \iff \overrightarrow{u} \text{ e } \overrightarrow{v} \text{ são paralelos.}$$

$$\overrightarrow{u} \text{ e } \overrightarrow{v} \text{ são LI} \iff \overrightarrow{u} \text{ e } \overrightarrow{v} \text{ não são paralelos.}$$

5. DEPENDÊNCIA LINEAR E SISTEMAS LINEARES.

Teorema. *Sejam a, b, c e d números reais. Sejam x e y variáveis reais. Consideremos os vetores $\overrightarrow{u} = \langle a, b\rangle$ e $\overrightarrow{v} = \langle c, d\rangle$. Consideremos também o sistema linear homogêneo*

$$S: \begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Então, o sistema linear S tem solução única se e somente se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LI.

Prova.

- $\diamond$ Sejam um número real arbitrário $x = x_0$ e um número real arbitrário $y = y_0$. Indiquemos o par ordenado (x_0, y_0) por (x, y).

- $\diamond$ São equivalentes as afirmações abaixo.

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ é solução de } S \ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ (ax + by, cx + dy) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \ (ax, cx) + (by, dy) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \ x(a, c) + y(b, d) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \ x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

- $\diamond$ Seguem então as seguintes conclusões.

  Se o sistema S tem solução única, então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI.

  Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI, então o sistema S tem solução única.

- $\diamond$ Conclusão final. O sistema S tem solução única se e só se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI♣

6. DEPENDÊNCIA LINEAR E DETERMINANTES.

Teorema. *Sejam a, b, c e d números reais e os vetores $\overrightarrow{u} = \langle a, b\rangle$ e $\overrightarrow{v} = \langle c, d\rangle$. Então temos*

$$\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\} \text{ é } LI \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prova.

($\Rightarrow$) Visto que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI, temos

$$\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}.$$

Como $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, podemos supor $a \neq 0$ (o caso $b \neq 0$ é análogo). Segue

$$a\langle c, d\rangle - c\langle a, b\rangle \neq \overrightarrow{0} = \langle 0, 0\rangle.$$

Portanto,

$$\langle 0, ad - bc\rangle \neq \langle 0, 0\rangle \quad \text{e} \quad ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

($\Leftarrow$) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Logo, temos

$$\begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 \\ \alpha b + \beta d = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha ad + \beta cd = 0 \\ \alpha bc + \beta cd = 0 \end{cases}$$

Donde, subtraindo a segunda equação da primeira equação, obtemos

$$\alpha ad - \alpha bc = \alpha(ad - bc) = 0.$$

Devido à hipótese $ad - bc \neq 0$ concluímos que

$$\alpha = 0.$$

Assim, pela equação $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ segue

$$\beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Por fim, como $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ (pois o determinante 2×2 dado é não nulo), temos

$$\beta = 0 \clubsuit$$

7. DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES.

Teorema. *Sejam a, b, c e d números reais. Sejam x e y variáveis reais. Então, o sistema linear homogêneo*

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

tem solução única se e somente se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prova.

- ◇ Indiquemos o sistema acima por S.
- ◇ Já vimos que S tem solução única se e somente se os vetores $\overrightarrow{u} = \langle a, b\rangle$ e $\overrightarrow{v} = \langle c, d\rangle$ são LI.
- ◇ Já vimos que os vetores $\overrightarrow{u} = \langle a, b\rangle$ e $\overrightarrow{v} = \langle c, d\rangle$ são LI se e somente se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

- ◇ A prova está completa♣