DERIVAÇÃO SOB O SINAL DE INTEGRAÇÃO - INTEGRAIS OSCILATÓRIAS E TRANSFORMADAS

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

INTRODUÇÃO

Dada uma função real e contínua em um retângulo $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$, é muitas vezes útil ou necessário considerarmos a família de integrais

$$\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)_{x\in[a,b]}$$

Dizemos que a família está indexada pelo parâmetro x. Então, consideramos a função [ou a família de integrais indexada no parâmetro x] definida em $[a,b]$ por

$$F(x)=\int_c^d f(x,y)dy.$$

Nesta notas, estudamos a continuidade e diferenciabilidade da função F.

Definições. *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-integrável em cada $[a,b]\subset\mathbb{R}$.*

- *Caso exista, o limite*

  $$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

  é dito a integral imprópria de f, *a qual é em geral indicada por*

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

  e dizemos que a integral imprópria converge. Se tal limite não existir, dizemos que a integral imprópria diverge.

- *Dizemos que a integral imprópria*

  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

  é absolutamente convergente *se a integral (imprópria)*

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx\,,$$

  é convergente (i.e., finita) ou, equivalentemente, se existe $M>0$ satisfazendo

  $$\int_a^b |f(t)|dt\leq M,\quad \text{para quaisquer } a \text{ e } b.$$

  A integral imprópria de f é dita absolutamente divergente *se*

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx=+\infty.$$

Temos uma nomenclatura análoga para as situações abaixo.

- Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, com f integrável em cada $[0, r] \subset [0, \infty)$. A integral imprópria de f é, caso exista o limite,

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^r f(x)dx.$$

- Seja $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, com f integrável em cada $[r, 0] \subset (-\infty, 0]$. A integral imprópria de f é, caso exista o limite,

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 f(x)dx.$$

- Sejam a e b números reais. Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, com f integrável em cada $[a, r) \subset [a, b)$. A integral imprópria de f é, caso exista o limite,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)dx.$$

- Sejam a e b números reais. Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, com f integrável em cada $[r, b] \subset (a, b]$. A integral imprópria de f é, caso exista o limite,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to a^+} \int_r^b f(x)dx.$$

- Sejam a e b números reais. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, com f integrável em cada $[r, \rho] \subset (a, b)$. A integral imprópria de f é, caso exista o limite,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{r\to a^+\\ \rho\to b^-}} \int_r^\rho f(x)dx.$$

Critério de Cauchy. *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrável em cada intervalo $[a, b]$ contido em $[0, \infty)$. Então, existe a integral de Riemann imprópria de f em $[0, \infty)$ se e somente para todo $\epsilon > 0$, existe um $r > 0$ tal que temos*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \epsilon, \quad \textit{para todo } [a, b] \subset [r, \infty).$$

Prova. Solicito ao leitor tal prova (é simples).

Parte 1 - Convergência Absoluta
[abordagem direta (quocientes de Newton)]

1.1 - Regra de Leibniz (para integrais próprias)

Teorema 1. *Seja* $f : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *contínua.*

(A) É contínua (em $[a,b]$*) a função*

$$F(x) = \int_0^1 f(x,y)dy.$$

(B) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *existe e é contínua (em* $[a,b] \times [0,1]$*) então* F *é de classe* C^1 *e*

(Regra de Leibniz) $$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Prova.

Notemos que f é uniformemente contínua no compacto $[a,b] \times [0,1]$.

(A) Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, dados $x \in [a,b]$ e $x+h \in [a,b]$ e $|h| < \delta$, temos

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_0^1 |f(x+h,y) - f(x,y)| dy \leq \epsilon.$$

Logo, F é contínua. Analogamente, $x \mapsto \int_0^1 (\partial f / \partial x)(x,y)dy$ é contínua.

(B) Seja $h \neq 0$. Pelo TVM existe $\overline{x}$ entre x e $x+h$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy = \\
&\qquad = \int_0^1 \left[\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] dy \\
&\qquad = \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] dy.
\end{aligned}$$

Pela continuidade uniforme de $\partial f / \partial x$ em $[a,b] \times [0,1]$, existe $\eta > 0$ tal que o módulo do último integrando acima é menor que ϵ se $|x - \overline{x}| < \eta$. Donde

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy \right| \leq \epsilon, \text{ se } 0 < |h| < \eta.$$

Portanto F é de classe C^1 e vale a Regra de Leibniz♣

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1.2 - Integrais Impróprias Dependentes de um Parâmetro

Teorema 2. *Seja $f : (-1,1) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que exista uma função $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfazendo*

$$|f(x,y)| \leq M(y), \text{ para todo } x \text{ e } y, \quad \text{e} \quad \int_0^\infty M(y)dy < \infty.$$

Vale o que segue.

- *Está bem definida [em $(-1,1)$], e é contínua, a função*

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy.$$

- *Suponha que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe e é contínua em $(-1,1) \times [0,+\infty)$. Suponha*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq M(y), \text{ para todo } x \text{ e } y.$$

  Então, F é derivável e

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Prova. Em três partes: boa definição de F, continuidade e derivabilidade.

◇ Boa definição de F. Fixemos $x \in (-1,1)$. Por hipótese temos

$$0 \leq f(x,y) + |f(x,y)| \leq 2|f(x,y)| \leq 2M(y) \quad \text{com} \quad \int_0^\infty M(y)dy < \infty.$$

Donde segue [cheque]

$$\int_0^\infty f(x,y)dy < \infty.$$

◇ Continuidade. Dado $\epsilon > 0$, é simples ver que [cheque] existe $m > 0$ com

$$\int_m^\infty M(y)dy < \epsilon. \tag{2.1}$$

Sejam a e b em $[-r,r] \subset (-1,1)$. Temos então

$$\begin{aligned} |F(b) - F(a)| &= \left|\int_0^\infty [f(b,y) - f(a,y)]dy\right| \\ &\leq \int_0^m |f(b,y) - f(a,y)|dy + \int_m^\infty |f(b,y) - f(a,y)|dy. \end{aligned}$$

A última integral acima é (pela desigualdade triangular) majorada por

$$2\int_m^\infty M(t)dt < 2\epsilon.$$

Quanto à penúltima integral, a continuidade uniforme de $f(x,y)$ no retângulo compacto $[-r,r]\times[0,m]$ garante um $\delta > 0$ tal que

$$|f(b,y) - f(a,y)| \leq \frac{\epsilon}{m} \text{ se } y \in [0,m] \text{ e } |b-a| < \delta, \text{ com } b \text{ e } a \text{ em } [-r,r].$$

Concluímos então que

$$|F(b) - F(a)| < 3\epsilon \text{ se } b \in [-r,r],\ a \in [-r,r] \text{ e } |b-a| < \delta.$$

Logo, F é uniformemente contínua em $[-r,r]$ e então contínua em $(-1,1)$.

◇ Derivabilidade. A prova acima implica a continuidade [em $(-1,1)$] da função

$$x \longmapsto \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

A seguir fixamos r e x_0, com $x_0 \in (-r,r) \subset [-r,r] \subset (-1,1)$.

Definimos, para $|h| > 0$ e $|h|$ pequeno tal que $x_0 + h \in [-r,r]$, o quociente

$$\begin{aligned} N(h) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &- \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)dy \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right]dy \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right]dy, \end{aligned}$$

com $\overline{x}$ entre x_0 e $x_0 + h$ (os três em $[-r,r]$).

Seja $M = M(y)$ como no enunciado [logo, $|(\partial f/\partial x)(x,y)| \leq M(y)$].

Dado $\epsilon > 0$, seja $m > 0$ como acima [equação (2.1)].

Então temos

$$|N(h)| \leq \int_0^m \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right| dy + 2\epsilon.$$

Como $[-r,r]\times[0,m]$ é compacto, por continuidade uniforme segue que existe um δ, com $0 < \delta < r - |x_0|$, tal que para todo $0 < |h| < \delta$ temos que a integral imediatamente acima é tal que obtemos

$$|N(h)| < 3\epsilon.$$

Concluímos então que

$$N(h) \to 0 \text{ se } h \to 0 \clubsuit$$

Comentários.

(1) Localidade. Os resultados acima são locais e usualmente aplicados na vizinhança de um valor fixo do parâmetro. A escolha dos intervalos em seus enunciados foi tão somente de ordem prática.

(2) A função $M(t)$. Em geral, achamos uma função $M_1(y) \geq 0$ e uma $M_2(y) \geq 0$ com integrais finitas em $[0, \infty)$ e tais que uma majora $|f(x, y)|$ e a outra majora $|(\partial f/\partial x)(x, y)|$. Definindo $M = M_1 + M_2$, podemos supor que uma mesma $M(y)$ majora $|f(x, y)|$ e $|(\partial f/\partial x)(x, y)|$.

(3) Majoração. Em geral, temos $|f(x, y)| \leq M(y)$ e $|(\partial f/\partial x)(x, y)| \leq M(y)$ apenas para y grande o suficiente. Isto é suficiente pois escrevendo

$$F(x) = \int_0^m f(x, y)dy + \int_m^\infty f(x, y)dy,$$

podemos aplicar a regra de Leibniz e o Teorema 2 a integrais distintas.

(4) Parâmetro em $(-\infty, +\infty)$. Vale um resultado análogo ao do Teorema 2, trocando $[0, \infty)$ por $(-\infty, +\infty)$. Adaptando hipóteses e escrevendo

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x, y)dy = \int_{-\infty}^0 f(x, y)dy + \int_0^\infty f(x, y)dy,$$

pelo Teorema 2 segue imediatamente

$$F'(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy + \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy.$$

(5) Parâmetro em $[0, \omega)$. O caso integral imprópria em $[0, \omega)$ é análogo ao caso integral imprópria em $[0, +\infty)$. De fato, basta que no enunciado e na prova do Teorema 2 troquemos $[0, +\infty)$ por $[0, \omega)$ e o símbolo ∞ no papel de extremo de integração pelo símbolo ω. [Cheque, é trivial.]

(6) Parâmetro em (a, b). O caso para integral imprópria em (a, b) pode ser trivialmente reduzido ao caso anterior. Para tal, consideremos um ponto $c \in (a, b)$. Com tal ponto auxiliar e então escrevendo

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)dy = \int_a^c f(x, y)dy + \int_c^b f(x, y)dy,$$

pelo comentário (5) temos

$$F'(x) = \int_a^c \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy + \int_c^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy.$$

Parte 2 - Convergência Absoluta
[abordagem indireta (por aproximação)]

2.1 - Lema Básico

Lema 3. *Seja* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções de classe* C^1, *com*

$$\begin{cases} f_n \text{ convergindo pontualmente a } f \\ e \\ f_n' \text{ convergindo uniformemente a } g. \end{cases}$$

Então, f *é de classe* C^1 *e*

$$f' = g.$$

Prova.

Cada f_n' é contínua e $f_n' \to g$ uniformemente. Logo, g é contínua.

Seja $x \in [0,1]$. Pelo convergência uniforme segue

$$\int_0^x f_n'(t)dt \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^x g(t)dt.$$

Assim,

$$f_n(x) - f_n(0) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^x g(t)dt.$$

Por outro lado, devido à hipótese (convergência pontual) temos

$$f_n(x) - f_n(0) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x) - f(0).$$

Donde segue,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt \qquad \text{para todo } x \in (-1,1).$$

Pelo teorema fundamental do cálculo segue então que f é derivável e

$$f'(x) = g(x) \clubsuit$$

2.2 - Regra de Leibniz (integrais próprias)

Teorema 4. *Sejam* $f:[a,b]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *contínuas em* $[a,b]\times[0,1]$. *Então,*

$$F(x)=\int_0^1 f(x,y)dy$$

é de classe C^1 *e*

(Regra de Leibniz) $$F'(x)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Prova.

Sejam $n\in\mathbb{N}^*$ e $\epsilon>0$. Consideremos a soma de Riemann

$$S_n(x)=\sum_{j=1}^{n} f\left(x,\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n},\quad \text{onde } x\in[a,b].$$

Logo, S_n é contínua. Pela continuidade uniforme de f existe $\delta>0$ tal que

$$|f(x,s)-f(x,t)|<\epsilon \ \text{ se } \ |s-t|<\delta.$$

Suponhamos $1/n<\delta$. Para todo x em $[a,b]$ temos

$$|S_n(x)-F(x)|=\left|\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f\left(x,\frac{j}{n}\right)dy-\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(x,y)dy\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \epsilon dy=\epsilon.$$

Portanto $S_n\to F$ uniformemente.

Analogamente [basta trocar f por $\partial f/\partial x$],

$$S_n'(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n}\xrightarrow{\text{uniformemente}} G(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Claramente cada S_n' é contínua.

Pelo Lema 3 segue que F é de classe C^1 e

$$F'(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy \clubsuit$$

2.3 - Integrais Impróprias Dependentes de um Parâmetro

Teorema 5. *Seja* $f : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, *com* $f(x,y)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *contínuas. Suponha que existe* $M = M(y) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$|f(x,y)| \leq M(y), \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq M(y) \quad \text{e} \quad \int_0^\infty M(y)dy < \infty.$$

Então, está bem definida e é contínua (em $[0,1]$*) a função*

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy.$$

Ainda, F *é derivável [classe* C^1*] e*

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Prova.

Pelas hipóteses, estão bem definidas as funções

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy \quad \text{e} \quad G(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Logo, estão bem definidas (em $[0,1]$) as sequências de funções

$$F_n(x) = \int_0^n f(x,y)dy \quad \text{e} \quad G_n(x) = \int_0^n \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Pelo Teorema 4, as funções F_n e G_n são contínuas e satisfazem

$$F_n' = G_n.$$

Por outro lado, para todo $x \in [0,1]$ temos

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \int_n^\infty M(y)dy \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;\text{ e }\; |G_n(x) - G(x)| \leq \int_n^\infty M(y)dy \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Logo,

$$F_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} F \quad \text{e} \quad F_n' = G_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} G.$$

Pelo Lema 3 segue que F é de classe C^1 e

$$F' = G \clubsuit$$

Parte 3 - Convergência Uniforme.

3.1 - Lema Básico

Definição. *Seja $f : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que a integral imprópria*

$$\int_0^\infty f(x,y)dy = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r f(x,y)dy$$

converge, para todo $x \in [0,1]$. Dizemos que tal integral imprópria (de fato, uma família de integrais impróprias) converge uniformemente *em $[0,1]$ (ou que a convergência é uniforme em $[0,1]$) se para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que temos*

$$\left| \int_0^r f(x,y)dy - \int_0^\infty f(x,y)dy \right| \leq \epsilon, \quad \text{para quaisquer } r > N \text{ e } x \in [0,1],$$

ou, equivalentemente,

$$\left| \int_r^\infty f(x,y)dy \right| \leq \epsilon, \quad \text{para quaisquer } r > N \text{ e } x \in [0,1].$$

Lema 6. *Seja $f : [0,1) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que a integral imprópria*

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$$

converge uniformemente, onde x percorre $[0,1)$. Então, a função F é contínua.

Prova.

Seja n arbitrário em $\mathbb{N}$. Devido às hipóteses, segue que

$$F_n(x) = \int_0^n f(x,y)dy \xrightarrow{n\to\infty} F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$$

uniformemente no intervalo $[0,1)$. Como cada função F_n é contínua em $[0,1)$, concluímos então que F é contínua em $[0,1)$ ♣

A seguir, com a definição acima (para integrais impróprias uniformemente convergentes) e o Lema 3, obtemos um resultado mais forte que o Teorema 5.

3.2 - Integrais Impróprias Dependentes de um Parâmetro

Teorema 7. *Seja $f : [0,1) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, com $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ contínuas. Suponha que existe a integral imprópria*

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

e que ela converge uniformemente em $[0,1)$. Suponha que a integral imprópria

$$G(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$$

é finita (converge), para todo x em $[0,1)$. Então, G é derivável e

$$G'(x) = g(x).$$

Prova.

Pelas hipóteses, e para x no intervalo $[0,1)$, temos que

$$\begin{cases} g_n(x) = \int_0^n \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy \xrightarrow{uniformemente} g(x) \\ \text{e} \\ G_n(x) = \int_0^n f(x,y)dy \xrightarrow{pontualmente} G(x). \end{cases}$$

Pelo Teorema 1 segue que g_n é contínua, que G_n é derivável e que

$$G_n' = g_n.$$

Logo, G_n é de classe C^1 e satisfaz

$$\begin{cases} G_n \xrightarrow{pontualmente} G \\ \text{e} \\ G_n' \xrightarrow{uniformemente} g. \end{cases}$$

Pelo Lema 3 segue que G é derivável e que $G' = g$ ♣

Parte 4 - Aplicações

4.1 - A integral oscilatória $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

Seja $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função contínua e decrescente, com $f(x) \xrightarrow{x \to +\infty} 0$. Então, os três tipos de integrais abaixo são chamadas **integrais oscilatórias**:

$$\int_0^\infty f(x) \cos x \, dx, \qquad \int_0^\infty f(x) \sin x \, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty e^{ix} f(x) \, dx.$$

Tais integrais podem não convergir absolutamente. Por exemplo, temos

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty \qquad \text{[cheque]}.$$

Assim, a análise das integrais oscilatórias requer mais cuidado.

O exemplo que veremos abaixo, com a função

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

é muito interessante pois apresenta um caso em que a integral de Riemann imprópria é convergente mas a integral de Lebesgue não é convergente. Pois, uma função é Lebesgue integrável se e somente seu valor absoluto é Lebesgue integrável e então como a integral de Lebesgue $\int_{[0,\infty)} (|\sin x|/|x|) dm$, onde dm é a medida de Lebesgue, coincide com o valor da integral de Riemann imprópria $\int_{-\infty}^\infty (|\sin x|/|x|) dx = \infty$, concluímos que $(\sin x)/x$ não é Lebesgue integrável.

Existem muitos métodos para computar $\int_0^\infty (\sin x)/x \, dx$. Seguem alguns.

(1) Medida de Lebesgue (Teorema da convergência dominada). Vide Apostol.

(2) Teoria de Resíduos [`http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT225Cap11.pdf`].

(3) Transformada de Laplace.

(4) Integral de Dirichlet - Teorema de Riemann-Lebesgue.

Neste texto utilizamos derivação sob o sinal de integração (o que é básico).

Exemplo Clássico. Mostremos que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Solução.

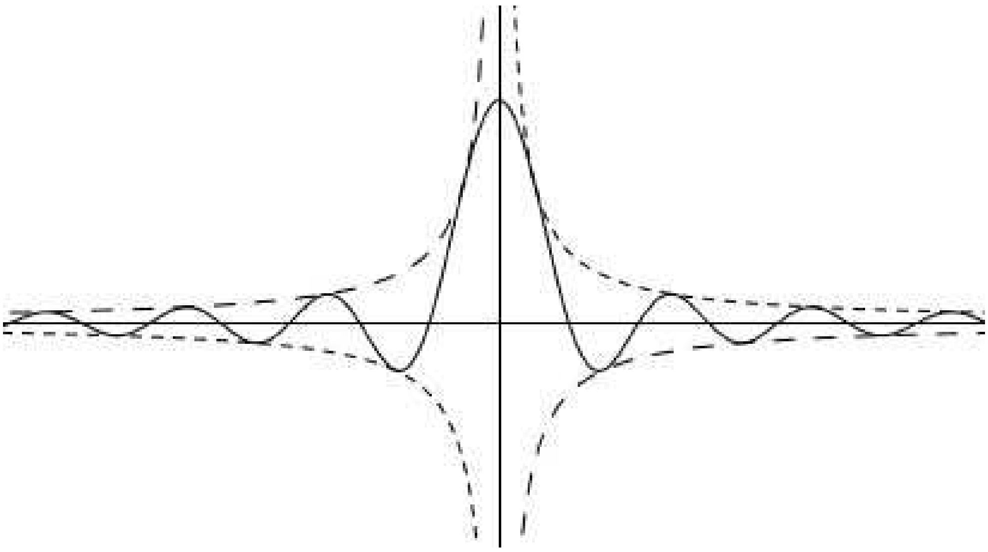

Figura 1: Gráfico de $\frac{\sin x}{x}$.

◇ Pelo primeiro limite fundamental, $(\sin x)/x \to 1$ se $x \to 0$. Logo, a função

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ se } x > 0, \quad \text{e} \quad f(0) = 1$$

é contínua em $[0, +\infty)$.

Observemos que $|\cos x| \leq 1$ e que $x \mapsto 1/x^2$ é integrável em $[1, +\infty)$.

Pondo $u = 1/x$ e $v' = \sin x$, por integração por partes temos

$$\int_1^r \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^r - \int_1^r \frac{\cos x}{x^2} dx \xrightarrow{r \to +\infty} \left[\cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx\right].$$

Isto mostra que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx < \infty.$$

É bem sabido que

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1.$$

◇ Pelo já feito, está bem definida a função

$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx, \quad \text{para } \alpha \in [0,\infty).$$

Definamos

$$f(\alpha,x) = e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}, \quad \text{para } (\alpha,x) \in [0,\infty)\times[0,\infty).$$

Seja $a > 0$. Para quaisquer $\alpha \geq a$ e $x \geq 0$ temos $e^{-\alpha x} \leq e^{-ax}$ e então

$$\begin{cases} |f(\alpha,x)| \leq e^{-ax} \\ \text{e} \\ \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,x)\right| = |-e^{-\alpha x}\sin x| \leq e^{-ax} \end{cases} \qquad \text{com} \quad \int_0^\infty e^{-ax}dx < \infty.$$

O Teorema 5 mostra então que F é derivável em $(0,\infty)$ e

$$F'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\, dx, \quad \text{para todo } \alpha \in (0,\infty).$$

◇ A integral representando $F'(\alpha)$. Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx &= e^{-\alpha x}(-\cos x)\Big|_0^\infty - \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x\,dx \\ &= 1 - \alpha\left[e^{-\alpha x}\sin x\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right] \\ &= 1 - \alpha^2\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx. \end{aligned}$$

Donde então segue

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

◇ A derivada de F. É imediato que

$$F'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}, \quad \text{se } \alpha > 0.$$

◇ Computemos $F(\alpha)$, para $\alpha > 0$. Existe uma constante real C tal que

$$F(\alpha) = -\arctan(\alpha) + C, \text{ para todo } \alpha \in (0,+\infty).$$

É trivial ver que

$$F(\alpha) \xrightarrow{\alpha\to+\infty} 0 \quad \text{e} \quad \arctan(\alpha) \xrightarrow{\alpha\to+\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Segue então que $C = \pi/2$ e

$$\boxed{F(\alpha) = -\arctan(\alpha) + \tfrac{\pi}{2}, \quad \text{para todo } \alpha \in (0,\infty).}$$

◇ *A continuidade de F em $\alpha = 0$.* Pelo Lema 6, basta mostrar que as integrais

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx \quad \text{convergem uniformemente em } \alpha \in [0,\infty).$$

Seja $\epsilon > 0$. Pelo critério de Cauchy, existe $N > 0$ tal que se $\rho \geq r \geq N$ então

$$\left|\int_r^\rho \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \epsilon.$$

Fixemos r, com $r \geq N$. Definamos

$$S(\rho) = \int_r^\rho \frac{\sin x}{x}dx, \quad \text{onde } \rho \in [r,\infty).$$

Segue então que

$$\begin{aligned}\int_r^\rho e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx &= \int_r^\rho e^{-\alpha x}S'(x)\,dx \\ &= e^{-\alpha x}S(x)\Big|_r^\rho + \int_r^\rho \left[\alpha e^{-\alpha x}\right]S(x)\,dx.\end{aligned}$$

Temos $S(r) = 0$ e $|S(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \geq r$. Ainda mais, $\alpha e^{-\alpha x} \geq 0$. Assim, encontramos

$$\left|\int_r^\rho e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \epsilon e^{-\alpha\rho} + \epsilon\left[-e^{-\alpha x}\Big|_r^\rho\right] = \frac{\epsilon}{e^{\alpha r}}.$$

Notemos que $e^{\alpha r} \geq 1$. Impondo $\rho \to +\infty$, encontramos

$$\left|\int_r^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \epsilon, \quad \text{para quaisquer } \alpha \in [0,\infty) \text{ e } r \geq N.$$

Isto é, a família de integrais impróprias considerada converge uniformemente em $[0,\infty)$. Pelo Lema 6 segue que $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua.

◇ Conclusão. Pelos passos acima, temos

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \quad \text{e} \quad F(0) = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \clubsuit$$

Vide também Questão 10 em

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT5798-P1-2016.pdf`

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
3. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).
4. Lang, S. *Complex Analysis*, 4th ed., Springer, 1999
5. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
6. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.
7. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
http://www.ime.usp.br/~oliveira