DERIVAÇÃO SOB O SINAL DE INTEGRAÇÃO - PARÂMETRO COMPLEXO

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

INTRODUÇÃO

Dado $z = x + iy$ em $\mathbb{C}$, com x e y reais, escrevamos $\mathrm{Re}(z) = x$ e $\mathrm{Im}(z) = y$. Dada uma função contínua $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, definimos

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}[g(t)]dt + i\int_a^b \mathrm{Im}[g(t)]dt.$$

Seja $B(0;1)$ a bola aberta centrada na origem e de raio 1, no plano complexo.

Seja $D(0;1)$ o disco fechado centrado na origem e de raio 1, no plano complexo.

Dada uma função contínua f, definida em $B(0;1)\times[a,b] \subset \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ e a valores complexos, muitas vezes é útil considerarmos a família de integrais

$$\left(\int_a^b f(z,t)dt\right)_{z\in B(0;1)}$$

Dizemos que tal família está indexada pelo parâmetro z. Consideremos a função [ou a família de integrais indexada pelo parâmetro z] definida em $B(0;1)$ por

$$F(z) = \int_c^d f(z,t)dt.$$

Estudemos a continuidade e a diferenciabilidade/derivabilidade da função F.

Vejamos alguns resultados preliminares.

Lema 1. *Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua. Então,*

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \;\le\; \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Prova.

Existe um número real θ tal que

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = e^{i\theta}\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right|$$

e portanto

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = \int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt \quad \text{é um número real.}$$

Logo,

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\varphi(t)\right]dt \le \int_a^b \left|\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\varphi(t)\right]\right|dt \le \int_a^b |\varphi(t)|\,dt\;\clubsuit$$

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1. O comprimento ("lenght") de γ é

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Doravante, Ω indica um aberto em $\mathbb{C}$.

Definição. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ de classe C^1. A* integral de f ao longo de γ *é dada por*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Teorema 2 (Estimativa M-L). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ de classe C^1. Suponhamos que existe $M \geq 0$ satisfazendo*

$$|f(\gamma(t))| \leq M, \text{ para todo } t \text{ em } [a,b].$$

Então temos

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML(\gamma).$$

Prova.

O Lema 1 garante

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f dz\right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \\ &\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\ &= ML(\gamma)\clubsuit\end{aligned}$$

A seguir, apresentamos a regra da cadeia para uma composição de funções, com o domínio da composição em $\mathbb{R}$ e o contra-domínio da composição em $\mathbb{C}$.

Teorema 3 (Regra da Cadeia). *Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ deriváveis. Então, a composta $f \circ \gamma$ é derivável em todo ponto de seu domínio e*

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t).$$

Prova.

Fixemos $t \in [a,b]$. Para $s \neq t$, seja $N(s)$ o quociente de Newton

$$\frac{f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))}{s-t} = \begin{cases} \frac{f(\gamma(s))-f(\gamma(t))}{\gamma(s)-\gamma(t)} \frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t} & , \text{ se } \gamma(s) - \gamma(t) \neq 0\,, \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Seja (s_n) uma sequência em $[a,b] \setminus \{t\}$ e convergente a t.

- ◇ Suponhamos $\gamma(s_n) = \gamma(t)$ para todo n. Então temos $N(s_n) = 0$ para todo n. Também temos, é trivial ver, $\gamma'(t) = 0$. Logo, $N(s_n) \to f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.
- ◇ Suponhamos $\gamma(s_n) \neq \gamma(t)$ para todo n. Então, como γ é contínua, segue que $N(s_n) \to f'(\gamma(t))\gamma'(t)$♣

Proposição 4. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ com derivada contínua.*

(A) Dada uma curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ de classe C^1, temos

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t)\, dt.$$

(B) Dado um segmento linear de extremidades z e w e contido em Ω, temos

$$f(z) - f(w) = (z-w) \int_0^1 f'\big(w + t(z-w)\big) dt \quad [\textbf{TVM (forma integral)}].$$

Prova.

Pela regra da cadeia (Teorema 3), a derivada de $f \circ \gamma$ existe e é contínua.

(A) Pondo $f = u + iv$, segue $f \circ \gamma = (u \circ \gamma) + i(v \circ \gamma) : [a,b] \to \mathbb{C}$ e então

$$\int_a^b (f \circ \gamma)' dt = \int_a^b (u \circ \gamma)' dt + i \int_a^b (v \circ \gamma)' dt = (u \circ \gamma)|_a^b + i(v \circ \gamma)|_a^b = (f \circ \gamma)|_a^b.$$

(B) Seja $\sigma(t) = w + t(z-w)$, com $0 \leq t \leq 1$. Por (A) e a regra da cadeia segue

$$f(z) - f(w) = \int_0^1 (f \circ \sigma)'(t) dt = (z-w) \int_0^1 f'\big(w + t(z-w)\big) dt \,♣$$

Definições. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com $Re(f)$ e $Im(f)$ Riemann-integráveis em cada intervalo compacto $[a, b]$ da reta real.*

- *Consideremos o limite*
$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)dt.$$
Se existir, tal limite é a integral imprópria de *f a qual indicamos por*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$
e então dizemos que a integral imprópria converge. Se tal limite não existir, dizemos que a integral imprópria diverge.

- *Dizemos que a integral imprópria*
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$
é absolutamente convergente *se a integral (imprópria)*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt\,,$$
é convergente (i.e., finita) ou, equivalentemente, se existir $M > 0$ tal que
$$\int_a^b |f(t)|dt \leq M \quad \textit{para quaisquer } a \textit{ e } b.$$
A integral imprópria de f é absolutamente divergente *se*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = +\infty.$$

Temos uma nomenclatura análoga para a situação a seguir. Sejam a e b números reais. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, com f integrável em cada intervalo compacto $[r, \rho] \subset (a, b)$. A integral imprópria de f é, caso exista o limite,
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{r\to a^+ \\ \rho\to b^-}} \int_r^\rho f(x)dx.$$

Temos definições análogas para a integral imprópria, quando o domínio de f é
$$(-\infty, b], \quad (-\infty, b), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad [a, b) \text{ ou } (a, b].$$

Proposição 5 (Critério de Cauchy). *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ integrável em cada intervalo $[a, b]$ contido em $[0, \infty)$. Então, existe a integral de Riemann imprópria de f em $[0, \infty)$ se e somente para todo $\epsilon > 0$, existe um $r > 0$ tal que temos*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \epsilon, \quad \textit{para todo } [a, b] \subset [r, \infty).$$

Prova. Solicito ao leitor tal prova (é simples).

Parte 1 - Convergência Absoluta
[abordagem direta (quocientes de Newton)]

1.1 - Regra de Leibniz (para integrais próprias)

Seja $B(0;r)$ a bola aberta centrada na origem e de raio r, no plano complexo.

Seja $D(0;r)$ o disco fechado centrado na origem e de raio r, no plano complexo.

Teorema 6. *Seja $f : B(0;1) \times [0,1] \to \mathbb{C}$ contínua. Então, a função*

$$\varphi(z) = \int_0^1 f(z,t)dt$$

é contínua em $B(0;1)$.

Ainda, se $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ é contínua [em $B(0;1) \times [0,1]$] então φ é derivável e

(Regra de Leibniz) $$\varphi'(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Prova. Sejam r tal que $0 < r < 1$, o compacto $K = D(0;r) \times [0,1]$ e $\epsilon > 0$.

- ⋄ Como f é uniformemente contínua em $D(0;r) \times [0,1]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(z) + \varphi(z+h)| \leq \int_0^1 |f(z,t) - f(z+h,t)|dt \leq \epsilon, \text{ se } |z| \leq r, |z+h| \leq r \text{ e } |h| < \delta.$$

Logo, φ é uniformemente contínua em $D(0;r)$ para todo $0 < r < 1$.

- ⋄ Seja $z \in B(0;r)$. Para h em $\mathbb{C}^*$, com $|h|$ pequeno o suficiente temos

$$\frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt = \int_0^1 \left[\frac{f(z+h,t) - f(z,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \right] dt$$

[aqui usamos o TVM forma integral Prop. 4 (B)]

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh,t)ds - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)ds \right] dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial z}(z+sh,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \right] dsdt.$$

Pela continuidade uniforme de $\partial f / \partial z$ em $D(0;r) \times [0,1]$, existe $\eta > 0$ tal que o módulo do último integrando acima é menor que ϵ para quaisquer $0 \leq t, s \leq 1$ e $|h| < \eta$. Segue então, pelo Lema 1,

$$\left| \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt \right| \leq \epsilon, \text{ se } 0 < |h| < \eta.$$

Portanto φ é derivável-complexa e vale a fórmula anunciada♣

1.2 - Integrais Impróprias Dependentes de um Parâmetro

Indiquemos $B = B(0;1) \subset \mathbb{C}$.

Teorema 7. *Seja $f : B \times [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ contínua. Suponha que exista uma função $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfazendo*

$$|f(z,t)| \leq M(t), \text{ para todos } z \text{ e } t, \text{ e } \int_0^\infty M(t)dt < \infty.$$

- *Está então bem definida [na bola B], e é contínua, a função*

$$\varphi(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt.$$

- *Suponha que $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ existe e é contínua em $B \times [0,+\infty)$. Suponha também*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \leq M(t), \text{ para todos } z \text{ e } t.$$

  Então, φ é derivável e

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Prova. Em três partes: boa definição de φ, continuidade e derivabilidade.

◇ Boa definição de φ. Fixemos $z \in B$. Por hipótese, temos

$$\begin{cases} 0 \leq \mathrm{Re}(f)(z,t) + |f(z,t)| \leq 2|f(z,t)| \leq 2M(t) \\ \text{e} \\ 0 \leq \mathrm{Im}(f)(z,t) + |f(z,t)| \leq 2|f(z,t)| \leq 2M(t). \end{cases}$$

Donde segue

$$\int_0^\infty f(z,t)dt < \infty.$$

◇ Continuidade. Dado $\epsilon > 0$, é simples ver que [cheque] existe $m > 0$ tal que

$$\int_m^\infty M(t)dt < \epsilon. \tag{7.1}$$

Sejam z e w, ambos em $D(0;r) \subset B = B(0;1)$. Temos então

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| = \left| \int_0^\infty [f(z,t) - f(w,t)]dt \right|$$
$$\leq \int_0^m |f(z,t) - f(w,t)|dt + \int_m^\infty |f(z,t) - f(w,t)|dt.$$

A última integral acima é (pela desigualdade triangular) majorada por

$$2\int_m^\infty M(t)dt < 2\epsilon.$$

Quanto a penúltima integral, pela continuidade uniforme de $f(z,t)$ no compacto $D(0;r) \times [0,m]$ segue que existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(z,t) - f(w,t)| \leq \frac{\epsilon}{m} \text{ se } t \in [0,m] \text{ e } |z-w| < \delta, \text{ com } z \text{ e } w \text{ em } D(0;r).$$

Donde então segue que

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| < 3\epsilon, \quad \text{se } z \text{ e } w \text{ pertencem a } D(0;r) \text{ e } |z-w| < \delta.$$

Logo, φ é uniformemente contínua em $D(0;r)$. Donde $\varphi : B \to \mathbb{C}$ é contínua.

◇ Derivabilidade. Pelo já visto, está bem definida e é contínua [em B] a função

$$z \longmapsto \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Fixemos z_0 e r, com $z_0 \in B(0;r) \subset D(0;r) \subset B(0;1) = B$.

Definamos, para $0 < |h| < r - |z_0|$ [garantindo $z_0 + h \in D(0;r)$], o quociente

$$D(h) = \frac{\varphi(z_0+h) - \varphi(z_0)}{h} - \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt$$
$$= \int_0^\infty \left[\frac{f(z_0+h,t) - f(z_0,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t) \right] dt$$
$$= \int_0^\infty \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial z}(z_0+sh,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t) \right] ds\, dt.$$

Seja $M = M(t)$ como no enunciado [portanto, $|(\partial f/\partial z)(z,t)| \leq M(t)$].

Dado $\epsilon > 0$, seja $m > 0$ como acima [equação (7.1)].

Então, para $0 < |h| < r - |z_0|$, temos

$$|D(h)| \leq \int_0^m \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + sh, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) \right| ds\, dt + 2\epsilon.$$

Como $D(0; r) \times [0, m]$ é compacto, por continuidade uniforme segue que existe um δ, com $0 < \delta < r - |z_0|$, tal que para todo $0 < |h| < \delta$ temos que a integral iterada imediatamente acima é majorada por ϵ e então obtemos

$$|D(h)| < 3\epsilon.$$

Concluímos assim que

$$D(h) \to 0 \text{ se } h \to 0 \clubsuit$$

Comentários.

(1) Localidade. O resultado acima é local e usualmente aplicado na vizinhança de um valor fixo do parâmetro. Assim e por meio de uma trivial mudança de parâmetros, basta prová-lo para o parâmetro variando em $B(0; 1)$.

(2) A função $M(t)$. Na prática, achamos uma função positiva $M_1(t)$ e uma função positiva $M_2(t)$ com integrais finitas em $[0, \infty)$ e tais que uma majora $|f(z,t)|$ e a outra majora $|(\partial f/\partial z)(z,t)|$. Definindo $M = M_1 + M_2$, vemos que podemos supor que uma mesma $M(t)$ majora $|f(z,t)|$ e $|(\partial f/\partial z)(z,t)|$.

(3) A majoração. Na prática, determinamos a desigualdade $|f(z,t)| \leq M(t)$ e a desigualdade $|(\partial f/\partial z)(z,t)| \leq M(t)$ apenas para t grande o suficiente. Digamos, $t \geq R$ para algum $R > 0$. Isto é suficiente. De fato, escrevendo

$$F(z) = \int_0^m f(z,t)dt + \int_m^\infty f(z,t)dt,$$

vemos que basta aplicar o Teorema 6 para a integral própria à esquerda e o Teorema 7 para a integral imprópria à direita.

(4) Parâmetro em $(-\infty, +\infty)$. Vale um resultado análogo ao do Teorema 7, trocando $[0, \infty)$ por $(-\infty, +\infty)$. De fato, com tal troca e ajustando as hipóteses (de maneira óbvia) e então escrevendo

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z,t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(z,t)dt + \int_{0}^{\infty} f(z,t)dt,$$

pelo Teorema 7 segue imediatamente

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt + \int_{0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

(5) Parâmetro em $[0, a)$. O caso para integral imprópria em $[0, a)$ é análogo ao caso para a integral imprópria em $[0, +\infty)$. De fato, ∞ como extremo de integração no enunciado do Teorema 7 é apenas um símbolo que indica a ocorrência de uma integral imprópria. Sendo assim, basta que no enunciado e na prova do Teorema 7 troquemos $[0, +\infty)$ por $[0, a)$ e o símbolo ∞ no papel de extremo de integração pelo símbolo a. [Cheque.]

(6) Parâmetro em (a, b). O caso para integral imprópria em (a, b) pode ser trivialmente reduzido ao caso imediatamente anterior (5). Para tal, consideremos um ponto $c \in (a, b)$. Com tal ponto auxiliar e então escrevendo

$$F(z) = \int_{a}^{b} f(z,t)dt = \int_{a}^{c} f(z,t)dt + \int_{c}^{b} f(z,t)dt,$$

pelo comentário (5) temos

$$F'(z) = \int_{a}^{c} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt + \int_{c}^{b} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt = \int_{a}^{b} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

(7) Uma prova mais breve do Teorema 7 pode ser dada utilizando o Teorema da convergência de Weierstrass [este é um resultado bastante forte, vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT225Cap10.pdf` Apêndice 1 e `https://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT225Cap6.pdf` Corolário 6.21). Observemos que o teorema da convergência de Weierstrass não revela de pronto a fórmula para a derivada mas tão somente que a função

$$F(z) = \int_{0}^{\infty} f(z,t)dt$$

é derivável. [Por favor, cheque.]

Parte 2 - Convergência Absoluta
[abordagem indireta (por aproximação)]

2.1 - Lema Básico

Provamos o lema abaixo de forma elementar, sem utilizar o teorema da convergência de Weierstrass (isto é, evitando "chamar um santo" ou, dito de outra forma, resultados muito fortes) e também sem utilizar a Fórmula Integral de Cauchy, Teorema de Morera e que as funções holomorfas são infinitamente deriváveis.

Lema 8. *Seja $B(0;1) \subset \mathbb{C}$. Consideremos $f_n : B(0;1) \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções deriváveis e com derivadas de primeira ordem f_n' contínuas. Sejam $f : B(0;1) \to \mathbb{C}$ e $g : B(0;1) \to \mathbb{C}$ arbitrárias. Suponha*

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente sobre compactos, se } n \to +\infty, \\ \\ f_n' \longrightarrow g \text{ uniformemente sobre compactos, se } n \to +\infty. \end{cases}$$

Então,

$$f \text{ é derivável e } f' = g.$$

Solução.

- $\diamond$ É claro que f e g são contínuas.
- $\diamond$ Seja $\sigma : [0,1] \to B(0;1)$ uma curva fechada de classe C^1 por partes. Então,
$$\int_\sigma g(w)dw = \lim \int_\sigma f_n'(w)dw = \lim \int_0^1 (f_n \circ \sigma)'(t)dt = 0.$$
- $\diamond$ Seja $z \in B(0;1)$. Seja γ uma curva C^1 por partes, com imagem em $B(0;1)$, de início 0 e final z. A integral de g sobre curvas fechadas é zero, e então
$$z \mapsto \int_\gamma g dw$$
está bem definida e independe de γ [por favor, cheque]. Definimos
$$F(z) = \int_0^z g dw, \quad \text{onde} \quad \int_0^z g dw = \int_\gamma g dw.$$

- ⋄ Fixemos $z \in B(0;1)$. Para h em $\mathbb{C}$ e pequeno o suficiente temos

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{\int_0^z gdw + \int_z^{z+h} gdw - \int_0^z gdw}{h}$$
$$= \frac{\int_z^{z+h} g(w)dw}{h}$$
$$= \frac{\int_0^1 g(z+th)hdt}{h}.$$

Logo,
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 g(z+th)dt \xrightarrow{h\to 0} g(z).$$

Portanto, F é derivável e
$$F' = g.$$

- ⋄ Devido às hipóteses, também temos (com γ de início 0 e final z)

$$F(z) = \int_0^z gdw$$
$$= \lim \int_0^z f_n' dw$$
$$= \lim \int_\gamma f_n' dw$$
$$= \lim \int_0^1 (f_n \circ \gamma)'(t)dt.$$

Donde segue
$$F(z) = \lim[f_n(z) - f_n(0)]$$
$$= f(z) - f(0).$$

- ⋄ Portanto, a função
$$f(z) = F(z) + f(0)$$
é derivável e
$$f'(z) = F'(z) = g(z) \clubsuit$$

2.2 - Regra de Leibniz (integrais próprias)

Teorema 9. *Consideremos uma função $f : B(0;1) \times [0,1] \to \mathbb{C}$ contínua.*

(A) É contínua em $B(0;1)$ a função

$$F(z) = \int_0^1 f(z,t)dt.$$

(B) Se existe $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ e é contínua [em $B(0;1) \times [0,1]$], então F é derivável e

$$F'(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Prova.

Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $\epsilon > 0$ e $0 < r < 1$. Consideremos a soma de Riemann

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f\left(z, \frac{j}{n}\right)\frac{1}{n}, \quad \text{onde } z \in B(0;1).$$

Logo, S_n é contínua. Pela continuidade uniforme de f em $D(0;r) \times [0,1]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z,s) - f(z,t)| < \epsilon \text{ se } |s-t| < \delta \text{ e } z \in D(0;r).$$

Suponhamos $1/n < \delta$. Para todo z em $D(0;r)$ temos

$$|S_n(z) - F(z)| = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f\left(z, \frac{j}{n}\right) dt - \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(z,t)dt \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \epsilon \, dt = \epsilon.$$

Portanto $S_n \to F$ uniformemente em cada $D(0;r)$ e F é contínua em $B(0;1)$.

Analogamente [basta trocar f por $\partial f/\partial z$], para todo disco $D(0;r)$ temos

$$S_n'(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z}\left(z, \frac{j}{n}\right)\frac{1}{n} \xrightarrow{\text{uniformemente em } D(0;r)} G(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Obviamente, S_n' é contínua em $B(0;1)$. Logo, pelo Lema 8 segue

$$F'(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt \clubsuit$$

2.3 - Integrais Impróprias Dependentes de um Parâmetro

Seja $B(0;1) \subset \mathbb{C}$.

Teorema 10. *Seja* $f : B(0;1) \times [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ *contínua e tal que* $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ *existe e é contínua. Suponha que existe* $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *satisfazendo*

$$|f(z,t)| \leq M(t), \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \leq M(t) \quad e \quad \int_0^\infty M(t)dt < \infty.$$

Então, está bem definida e é contínua, na bola $B(0;1)$, *a função*

$$F(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt.$$

Ainda, F *é derivável e*

$$F'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Prova.

Pelas hipóteses estão bem definidas [em $B(0;1)$] as funções

$$F(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt \quad \text{e} \quad G(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Logo, estão bem definidas [em $B(0;1)$] as sequências de funções

$$F_n(z) = \int_0^n f(z,t)dt \;\text{ e }\; G_n(z) = \int_0^n \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Pelo Teorema 6 as funções F_n e G_n são contínuas e satisfazem

$$F_n' = G_n.$$

Por outro lado, para todo $z \in B(0;1)$ temos

$$|F_n(z)-F(z)| \leq \int_n^\infty M(t)dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \;\text{ e }\; |G_n(z)-G(z)| \leq \int_n^\infty M(t)dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Logo,

$$F_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} F \quad \text{e} \quad F_n' = G_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} G.$$

Pelo Lema 8 segue que F é derivável e

$$F' = G \clubsuit$$

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.

2. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.

3. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).

4. Lang, S. *Complex Analysis*, 4th ed., Springer, 1999

5. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

6. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.

7. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`