A PROPRIEDADE DE DARBOUX

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br
Ano 2018-2022

Definição. Um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um **intervalo** se dados a e b distintos e em I, digamos $a < b$, e um número c tal que $a < c < b$, então c pertence a I,

Propriedade de Darboux (Teorema do Valor Intermediário para Derivadas). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável. Então, a imagem da função derivada $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ é um intervalo. Isto é, o conjunto*

$$f'\big([a,b]\big) = \{f'(x) : x \in [a,b]\} \text{ é um intervalo.}$$

Prova. Dividamos a prova em três passos.

- Se a é ponto de mínimo e b é de máximo, então $f'(a) \geq 0$ e $f'(b) \geq 0$.
- Se a é ponto de máximo e b é de mínimo, então $f'(a) \leq 0$ e $f'(b) \leq 0$.
- Seja λ pertencente ao intervalo aberto de extremidades $f'(a')$ e $f'(b')$, com a' e b' distintos em $[a,b]$. Renomeando-os, se necessário, podemos supor sem perder generalidade $a' = a$ e $b' = b$. Então, a função derivável

  $$\varphi(x) = f(x) - \lambda x, \text{ para } x \text{ variando em } [a,b],$$

  satisfaz $\varphi'(a)\varphi'(b) < 0$. Logo, pelos passos acima, ou o ponto de mínimo de φ, ou o ponto de máximo de φ, é distinto de a e de b. Portanto, existe $c \in (a,b)$ tal que

  $$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \lambda \clubsuit$$

Para outra prova (independente de compacidade), recomendo A New Proof of Darboux's Theorem, Lars Olsen, The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 8 (Oct. 2004), pp. 713–715.