DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é também indicado pelo vetor $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, o produto interno em $\mathbb{R}^n$ é definido por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

A norma euclidiana de x, ou o módulo de x, é

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Vale a desigualdade*

$$|x \cdot y| \leq |x|\,|y| \ \textit{ quaisquer que sejam } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Prova. Temos,

$$\begin{aligned}
|x \cdot y|^2 = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 &= \sum_i x_i^2 y_i^2 + \sum_{i<j} 2 x_i y_i x_j y_j \\
&\leq \sum_i x_i^2 y_i^2 + \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) \\
&= \sum_{i,j} x_i^2 y_j^2 \\
&= (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \clubsuit
\end{aligned}$$

A norma $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ definida sobre $\mathbb{R}^n$ possui as propriedades abaixo.

- $|x| \geq 0$, para todo x, e tem-se $|x| = 0$ se e somente se $x = 0$.
- $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular)

A desigualdade triangular segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Pois,

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \clubsuit$$

Observemos que para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, ambos em $\mathbb{R}^n$, temos então

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{|x||y|} \leq 1.$$

Observemos que no espaço bi-dimensional $\mathbb{R}^2$ temos

$$(\cos\alpha, \sin\beta) \cdot (\cos\beta, \sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

Devido a estas duas observações, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, ambos em $\mathbb{R}^n$, definimos

$$\frac{x \cdot y}{|x||y|} = \cos\theta, \quad \text{onde} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Dizemos que $\theta \in [0, \pi]$ é o menor ângulo entre os vetores x e y.

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo
Rua do Matão 1010 - CEP 05508-090
São Paulo, SP - Brasil
e-mail: oliveira@ime.usp.br