ARGAND E UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Ano 2015

É bem conhecida a representação geométrica do conjunto dos números complexos, visto como um espaço vetorial, como o plano cartesiano bidimensional.

Neste texto apresentamos uma interpretação geométrica do corpo dos números complexos, baseada em Argand. Vejamos.

Na reta real (um espaço vetorial real uni-dimensional), a função $f(x) = \lambda x$, onde $x \in \mathbb{R}$, determinada pela multiplicação por uma constante $\lambda > 0$, é chamada de uma dilatação (se $\lambda > 1$) ou uma contração (se $0 < \lambda < 1$). Ainda em $\mathbb{R}$, a função $g(x) = -x = (-1)x$, onde $x \in \mathbb{R}$, pode ser interpretada como uma reflexão em relação à origem. Ainda mais, fixado qualquer real $\mu \neq 0$, a função $h(x) = \mu x$, onde x é uma variável real, é denominada uma homotetia. Percebemos então que uma homotetia em $\mathbb{R}$ é a composição de uma dilatação, ou de uma contração, com uma reflexão (uma delas pode não participar da composição).

Identificando $\mathbb{R}$ com o eixo real no plano $\mathbb{R}^2$, interpretamos a associação

$$x \to -x, \text{ onde } x \in \mathbb{R},$$

como uma rotação de 180 graus (π rad) no sentido anti-horário.

A seguir, utilizamos informalmente o símbolo $\sqrt{-1}$.

No corpo complexo $\mathbb{C}$ (identificado ao plano, como espaço vetorial real bidimensional), temos

$$\sqrt{-1}.\left[\sqrt{-1}.1\right] = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$$

Isto é, multiplicando a unidade 1 por $\sqrt{-1}$ e em seguida multiplicando o resultado obtido novamente por $\sqrt{-1}$, obtemos o número -1. Assim,

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

representa uma rotação de 180 graus no sentido anti-horário. Torna-se então natural interpretar a função (operação)

$$T(z) = \left(\sqrt{-1}\right) z, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

como uma rotação de 90 graus (ou de $\pi/2$ rad).

Desta forma, indicamos o número $\sqrt{-1}$ como o ponto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ obtido ao girarmos o ponto $(1,0)$ (identificado com a unidade 1) por 90 graus (no sentido anti-horário). Temos então a identificação

$$i \equiv (0,1) \in \mathbb{R}^2.$$

Como citado, todo número real a (não nulo) determina uma homotetia em $\mathbb{R}$. Ainda, a determina uma homotetia também em $\mathbb{C}$ ao definirmos

$$z \mapsto az, \text{ onde } z \in \mathbb{C}.$$

Identifiquemos o número real a com tal homotetia. Devido à identificação entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ e ao isomorfismo entre o espaço vetorial das aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e o espaço vetorial das matrizes reais dois por dois, podemos então identificar o número a com a homotetia em $\mathbb{R}^2$ associada à matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

no espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 com coeficientes reais.

A seguir, consideremos a rotação de 90 graus no sentido anti-horário

$$\mathrm{Rot} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

já identificada ao número i. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Desta forma,

$$\mathrm{Rot}(e_1) = e_2 \quad \text{e} \quad \mathrm{Rot}(e_2) = -e_1.$$

A matriz associada à transformação linear Rot é então

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, ao número complexo $a + bi$, com a e b reais, associemos a matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Solicito ao leitor verificar que tal associação é injetora, preserva as operações de adição e multiplicação e que a imagem de $\mathbb{C}$ por tal aplicação é um corpo.

A seguir suponhamos $z = a + bi \neq 0$. Notemos que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}.$$

Escrevemos então,

$$\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

onde $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e θ é um ângulo no intervalo $[0, 2\pi]$. Seja R_θ a matriz no lado direito. Temos então z identificado à transformação linear

$$(\rho R_\theta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Portanto, z é identificado à composição de uma homotetia ($\rho > 0$) e uma rotação.

Enfatizemos a identificação/interpretação de i como a rotação:

$$i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que (como é de se esperar)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos também que valem as duas identificações para $z = a + bi$

$$z \equiv a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z \equiv \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

A identificação à esquerda revela que $\mathbb{C}$ é fechado para a soma e um espaço vetorial real. Com a identificação à direita, é fácil mostrar que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ é um grupo abeliano (isto é, o produto é associativo e também comutativo já que as operações "homotetia" e "rotação" comutam em $\mathbb{R}^2$). A propriedade distributiva é herdada da propriedade distributiva em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Vale a relação entre módulo em $\mathbb{C}$ e determinantes:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = \det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

A conjugação em $\mathbb{C}$ corresponde, nesta interpretação, à transposição. Isto é,

$$\overline{z} = a - bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^t.$$

Em suma, podemos interpetar $\mathbb{C}$ como a álgebra comutativa formada pelas homotetias e rotações do plano com as operações de soma e composição. Como tais operações são inversíveis, tal álgebra é de fato um corpo.

Vide também

1. de Oliveira, O. R. B., *Argand e o Teorema Fundamental da Álgebra - e a representação geométrica dos números complexos.* Vide

   `http://www.ime.usp.br/~oliveira/TFA-ARGAND.pdf`

2. —, *Wessel, os números complexos e a triangulação da Dinamarca.* Vide

   `http://www.ime.usp.br/~oliveira/WESSELpalestra2015.pdf`

3. —,*O Teorema Fundamental da Álgebra: uma prova direta e elementar.* Vide

   `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-TFA-RAIZ.pdf`

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil