DETERMINANTE 2×2 - Aplicação Algébrica e Interpretação Geométrica

MAT 103 - Complementos de Matemática - FEAUSP- Semestre 2 de 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Distância de ponto a reta. A equação geral de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ é

$$D : ax + by + c = 0, \text{ com } a \text{ ou } b \text{ não nulo.}$$

Dado um ponto $P_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, a distância de P_o à reta D é

$$\text{dist}(P_o; D) = \frac{|\ ax_o\ +\ by_o\ +\ c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Prova.

Seja m_r o coeficiente angular de uma reta r qualquer. As retas, designadas por S, perpendiculares à reta D, tem coeficiente angular m_S tal que

$$m_S.m_D = -1.$$

Logo, utilizando o parametro d, uma equação geral de tais retas é

$$S\ :\ -bx + ay + d = 0, \text{ onde } d \in \mathbb{R}.$$

Entre tais retas perpendiculares à reta D queremos a que passe por $P_o = (x_o, y_o)$. Assim temos

$$-bx_o + ay_o + d = 0.$$

Donde determinamos o valor $d = bx_o - ay_o$ e obtemos então a reta

$$S_{P_o}\ : -bx + ay + (bx_o - ay_o) = 0.$$

Para determinarmos o ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ de intersecção entre as retas perpendiculares entre si D e S_{P_o} pasamos a resolver o sistema

$$(*)\begin{cases} ax + by &= -c \\ -bx + ay &= ay_o - bx_o. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a, a segunda por $-b$, e então somando-as temos

$$x_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2x_o - aby_o - ac).$$

A seguir, multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a e somando-as encontramos

$$y_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(-abx_o + a^2y_o - bc).$$

Então, o quadrado da distância de $P_o = (x_o, y_o)$ a $P_1 = (x_1, y_1)$ é

$$|P_oP_1|^2 = (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2$$
$$= \left[x_o \; - \; \frac{1}{a^2+b^2}(\; b^2x_o - aby_o - ac \;)\right]^2 + \left[y_o \; - \; \frac{1}{a^2+b^2}(\; -abx_o + a^2y_o - bc \;)\right]^2$$
$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\;(\; a^2x_o + aby_o \; + \; ac\;)^2 \; + \; (\; abx_o \; + \; b^2y_o + bc\;)^2\;]$$
$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\; a^2(ax_o \; + \; by_o \; + \; c)^2 \; + \; b^2(ax_o \; + \; by_o \; + \; c)^2\;]$$
$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\;(a^2+b^2)\;(ax_o \; + \; by_o \; + \; c)^2\;]$$
$$= \frac{(ax_o \; + \; by_o \; + \; c)^2}{a^2+b^2}.$$

A prova está completa.

Elaboremos uma segunda prova.

Segunda Prova.

Reescrevendo o sistema (*) na notação matricial temos

$$(**) \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix}.$$

Observação. É fácil constatar que dada uma matriz inversível

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

sua inversa é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{AD-BC}\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução do sistema (*) é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$x_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-ac - aby_o + b^2x_o)$$

e

$$y_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-bc + a^2y_o - abx_o)$$

e a demonstração segue como a anterior(a primeira) ♣

ÁREA DE UM PARALELOGRAMO

Seja $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ o vetor em $\mathbb{R}^2$ representado pelo segmento com extremidade $(0,0)$ e final (a,b). Dois vetores $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ e $\vec{v} = \langle c, d \rangle$, não paralelos e em $\mathbb{R}^2$, determinam um paralelogramo $\mathcal{P}$ que supomos, inicialmente, no primeiro quadrante. Seja $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \langle a+b, c+d \rangle$. Consideremos a representação de $\mathcal{P}$ [numa segunda representação as posições de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são trocadas]

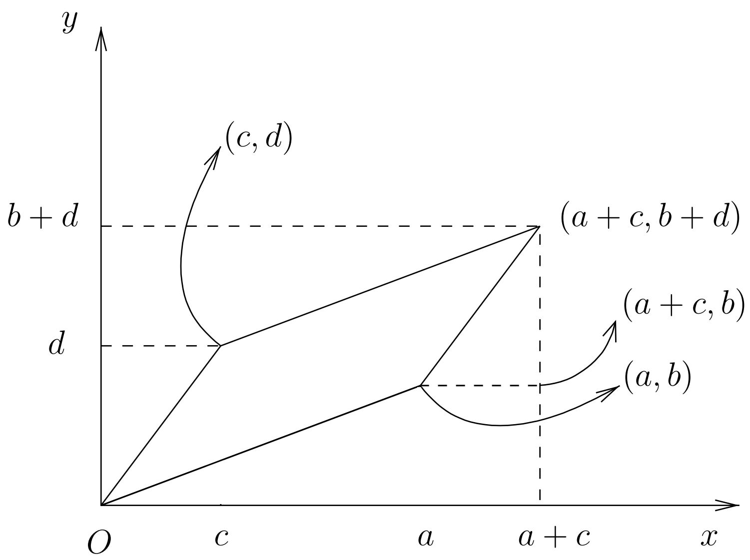

Figura 1: Determinante/Área

Pela figura, a área de $\mathcal{P}$ é dada pela área do retângulo de vértices

$$O = (0,0),\ (a+c, 0),\ (a+c, b+d) \text{ e } ((0, b+d)$$

subtraindo-se a área de dois trapézios congruentes e dois triângulos congruentes.

Temos então,

$$\begin{aligned} A(\mathcal{P}) &= (a+c)(b+d) - 2\left[\frac{(a+c+c)b}{2}\right] - 2\left(\frac{cd}{2}\right) \\ &= (ab + ad + bc + cd) - (ab + 2bc) - cd \\ &= ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \clubsuit \end{aligned}$$