0.1 Teorema (Derivação). *As séries* $f(z) = \sum a_n z^n$ *e* $g(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ *tem mesmo disco de convergência* $D(0;\rho)$. *Se* $\rho > 0$ *temos,*

$$f'(z) = g(z)\,,\ \forall z \in D(0;\rho)\ .$$

Prova. Dividamos a prova em duas partes complementares.

(a) Pela desigualdade $\sum_{n\geq 1} |a_n z^n| \leq |z| \sum_{n\geq 1} |n a_n z^{n-1}|$ obtemos: o disco de convergência de g está contido no disco de convergência de f. Se o disco de convergência de f é degenerado então o de g também (isto encerra um caso).

(b) Suponhamos f convergente em $D(0;\tau)$, $\tau > 0$. Fixemos $R > 0$ e z satisfazendo $|z| < R < \tau$. Seja h tal que $0 < |h| < r = R - |z|$. Para $n \geq 2$ obtemos

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = n z^{n-1} + h \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p} h^{p-2}$$

e portanto,

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} |z|^{n-p}\, r^p \leq \frac{|h|}{r^2} R^n\ .$$

Logo, $\sum n a_n z^{n-1}$ converge absolutamente e g converge em $D(0;\tau)$. Por fim,

$$\left| \sum a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum n a_n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum |a_n| R^n \xrightarrow{h\to 0} 0\ \blacksquare$$