

Números Complexos

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS TEOREMAS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES/CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Capítulo 6

SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES E SOMAS NÃO ORDENADAS

Capítulo 7

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES, E SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 8

SÉRIES DE FOURIER

Capítulo 9

FUNÇÕES ANALÍTICAS

9.1 - Introdução

Em uma variável real, nem toda função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente derivável tem a propriedade: “Para todo ponto x_0 em (a, b) existe um intervalo aberto $J = (x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b)$, $r > 0$, tal que f restrita a J é igual à série de Taylor de f em torno de x_0 e restrita a J ”. Isto é, nem toda função em uma variável real, a valores reais e infinitamente derivável, é uma função analítica real.

Entretanto, no capítulo 10 mostraremos que toda função derivável num aberto de \mathbb{C} e a valores complexos (ditas holomorfas ou \mathbb{C} -deriváveis) é analítica (complexa). Ou seja, como toda série de potências é derivável no interior do seu disco de convergência, veremos que em \mathbb{C} são equivalentes os conceitos de derivabilidade e analiticidade.

Desta forma, os resultados que mostrarmos neste capítulo para funções analíticas em um aberto no plano complexo, serão no capítulo 10 também estabelecidos para funções \mathbb{C} -deriváveis neste mesmo aberto.

9.2 - Resultados Básicos

9.1 Definição. A função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω um aberto em \mathbb{C} , é analítica em Ω se para todo $z_0 \in \Omega$ existe $R = R(z_0) > 0$ e constantes $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0; R) \subset \Omega .$$

Indicamos por $\mathcal{A}(\Omega)$ o conjunto das funções analíticas em Ω .

9.2 Proposição. Toda série de potências é analítica no interior do seu disco de convergência.

Prova. Consequência óbvia do Teorema 7.28 (Teorema da Translação) ■

9.3 Proposição. Sejam $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Pertencem a $\mathcal{A}(\Omega)$ as funções :

(a) $f + g$

(b) λf .

(c) fg

(d) $\frac{1}{f}$, se $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

Prova.

(a) e (b): Consequências das propriedades elementares para séries de potências.

(c) Segue da Teorema 7.29.

(d) Segue do Teorema 7.32. ■

Devido à Proposição 9.3 (a) e (b) temos que $\mathcal{A}(\Omega)$ é um espaço vetorial. Devido à Proposição 9.3 (a), (b) e (c), $\mathcal{A}(\Omega)$ é uma álgebra. Ainda mais, como a função $f(z) = 1, \forall z \in \Omega$, é analítica, segue que $\mathcal{A}(\Omega)$ é uma álgebra com unidade.

9.4 Proposição (Princípio dos Zeros Isolados [PZI] para funções analíticas).

Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, f não nula e Ω conexo. Então, o conjunto dos zeros de f é isolado em Ω . Ainda, se $z_0 \in \Omega$ e $f(z_0) = 0$, existem $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, e $g \in \mathcal{A}(\Omega)$, tais que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad \forall z \in \Omega, \quad e \quad g(z_0) \neq 0 .$$

Prova. Desenvolvamos f por sua série de Taylor em torno de z_0 . Do Corolário 7.37 [PZI para séries de potências] e Proposição 9.2 obtemos para $z \in D(z_0; R)$, $R > 0$ e R suficientemente pequeno, a fatoração $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, pondo $\varphi(z) = \sum_{p \geq k+1} a_p (z - z_0)^{p-k}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$ para todo $p > k$ e $\varphi(z_0) = a_{k+1} \neq 0$. Encerramos a prova definindo

$$g(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \text{se } z \in D(z_0; R), \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}, & \text{se } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \blacksquare \end{cases}$$

9.5 Corolário (Princípio de Identidade para funções analíticas). *Sejam f e g em $\mathcal{A}(\Omega)$, Ω conexo, tais que $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação em Ω . Então, $f = g$.*

Prova. Trivial, pelo Princípio dos Zeros Isolados em $\mathcal{A}(\Omega)$ ■

Notação. Dadas $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$, pomos $f \equiv g$ se $f(x) = g(x), \forall x \in X$.

9.6 Corolário ($\mathcal{A}(\Omega)$ é uma álgebra sem divisores de zero). *Sejam f e g em $\mathcal{A}(\Omega)$, com Ω conexo. Se $fg \equiv 0$ então, ou $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.*

Prova. Consideremos $\overline{D}(z_0; r)$, $r > 0$, um disco fechado arbitrário contido em Ω . Então, ou f ou g (ou ambas) se anula infinitas vezes em $\overline{D}(z_0; r)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que f se anule em todos os pontos da sequência de pontos distintos $(w_n) \subset \overline{D}(z_0; r)$. Como (w_n) tem um ponto de acumulação em $\overline{D}(z_0; r) \subset \Omega$, pelo PZI em $\mathcal{A}(\Omega)$ concluímos que f é identicamente nula ■

9.7 Proposição. *Se $g \in \mathcal{A}(\Omega_1)$, $f \in \mathcal{A}(\Omega_2)$ e $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$ então, $f \circ g \in \mathcal{A}(\Omega_1)$.*

Prova. Dado $z_0 \in \Omega_1$, desenvolvemos f como uma série de potências em torno de $g(z_0)$: $f(w) = \sum b_n (w - g(z_0))^n$, se $|w - g(z_0)| < R_1$, para algum $R_1 > 0$. Desenvolvendo então g em série de potências em torno de z_0 obtemos $g(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ se $|z - z_0| < R_2$, para algum $R_2 > 0$. Como $a_0 = g(z_0)$, existe r tal que $0 < r < R_2$ e $|g(z) - g(z_0)| < R_1$ se $|z - z_0| < r$. Então, pelo Teorema 7.31 $f(g(z))$ desenvolve-se como uma série de potências em torno de z_0 ■

9.3 - Princípios do Módulo Máximo e do Módulo Mínimo

9.8 Teorema. *Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, f não constante e Ω conexo. Então,*

- (a) **(Princípio do Módulo Máximo em $\mathcal{A}(\Omega)$)** $|f|$ não tem máximo local.
- (b) **(Princípio do Módulo Mínimo em $\mathcal{A}(\Omega)$)** $|f|$ não tem mínimo local, a não ser que f se anule.

Prova. Pelo Teorema da Translação (7.28) podemos supor sem perda de generalidade $z_0 = 0$ um ponto de máximo/mínimo local de $|f|$. A expressão

$$|f(z)|^2 - |f(0)|^2$$

tem sinal constante $[\geq 0$ ou $\leq 0]$ para $z \in D(0; \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$ fixo.

Pela Proposição 9.4 existe um natural $k \geq 1$ e $\varphi \in \mathcal{A}(D(0; \epsilon))$ tal que

$$f(z) = f(0) + z^k \varphi(z), \quad \varphi(0) \neq 0.$$

Escrevendo $z = re^{i\theta}$, $0 < r < \epsilon$, $\theta \in \mathbb{R}$, e combinando as expressões acima obtemos,

$$|f(re^{i\theta})|^2 - |f(0)|^2 = 2r^k \operatorname{Re} \left[\overline{f(0)} e^{ik\theta} \varphi(re^{i\theta}) \right] + r^{2k} |\varphi(re^{i\theta})|^2,$$

de sinal constante e que se mantém ao dividirmos o 2º membro por r^k , $0 < r < \epsilon$:

$$2 \operatorname{Re} \left[\overline{f(0)} e^{ik\theta} \varphi(re^{i\theta}) \right] + r^k |\varphi(re^{i\theta})|^2.$$

Fixado θ , por continuidade o limite da expressão acima para $r \rightarrow 0^+$ é a expressão

$$2 \operatorname{Re} \left[\overline{f(0)} \varphi(0) e^{ik\theta} \right],$$

que conserva o sinal de sua predecessora, qualquer que seja θ . Porém, é elementar que isto só é possível se $\overline{f(0)} \varphi(0) = 0$ [basta escolher valores θ tais que $e^{ik\theta}$ valha $+1$, -1 , $+i$ e $-i$]. Portanto, como $\varphi(0) \neq 0$, concluímos que $f(0) = 0$.

Se 0 é ponto de máximo local então $|f(z)| \leq 0$, se $z \in D(0; \epsilon)$, e f é nula em $D(0; \epsilon)$ e, assim, em Ω , contra a hipótese. Logo, $|f|$ não admite máximo local.

Se 0 é um ponto de mínimo local, provamos que $f(0) = 0$ como desejado ■

9.9 Definição. Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω um aberto de \mathbb{R}^2 e f diferenciável, um ponto $P_0 \in \Omega$ é um ponto de sela de f se P_0 é um ponto crítico de f , isto é, as derivadas parciais $f_x(P_0)$ e $f_y(P_0)$ são nulas e, ainda, P_0 não é ponto de máximo local de f nem ponto de mínimo local de f .

9.10 Corolário. Mantendo as hipóteses acima, um ponto $z_0 \in \Omega$ é ponto de sela da função a valores reais $|f| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se e somente se $f'(z_0) = 0$ e $f(z_0) \neq 0$.

Prova. Suponhamos $z_0 = 0$ e utilizemos a notação do Teorema acima.

\Rightarrow É óbvio que $f(0) \neq 0$. Consideremos ψ analítica na origem tal que

$$f(z) = f(0) + z\psi(z), \quad \psi(0) = f'(0).$$

Na origem $|f|$ é diferenciável e tem gradiente nulo e assim para θ arbitrário em \mathbb{R} e tomando o limite para $r \rightarrow 0$ obtemos,

$$0 \leftarrow \frac{|f(re^{i\theta})| - |f(0)|}{|re^{i\theta}|} = \frac{1}{|f(re^{i\theta})| + |f(0)|} \left\{ 2\operatorname{Re} \left[\overline{f(0)}\psi(re^{i\theta})e^{i\theta} \right] + r|\psi(re^{i\theta})|^2 \right\}.$$

Por outro lado, fixo θ , se $r \rightarrow 0$ temos $f(re^{i\theta}) \rightarrow 0$ e, ainda, $\psi(re^{i\theta}) \rightarrow f'(0)$ e então substituindo tais limites no limite que os precede encontramos

$$2\operatorname{Re}[\overline{f(0)}f'(0)e^{i\theta}] = 0.$$

Por fim, como θ é arbitrário obtemos $\overline{f(0)}f'(0) = 0$ e portanto $f'(0) = 0$.

\Leftarrow Devido às hipóteses, existe uma função φ analítica na origem satisfazendo $f(z) = f(0) + z^k\varphi(z)$, com $k \geq 2$ e $\varphi(0) \neq 0$. Então, para $z \neq 0$ segue,

$$\frac{|f(z)| - |f(0)|}{|z|} = \frac{|f(z)|^2 - |f(0)|^2}{|z|(|f(z)| + |f(0)|)} = \frac{2\operatorname{Re}[\overline{f(0)}\varphi(z)z^k] + |\varphi(z)|^2|z|^{2k}}{|z|(|f(z)| + |f(0)|)}.$$

Logo, se $z \rightarrow 0$ temos

$$\frac{|f(z)| - |f(0)|}{|z|} = \frac{1}{|f(z)| + |f(0)|} \left\{ 2\operatorname{Re} \left[\overline{f(0)}\varphi(z)z^{k-1} \frac{z}{|z|} \right] + |\varphi(z)|^2|z|^{2k-1} \right\} \rightarrow 0.$$

Portanto, na origem $|f|$ é diferenciável e possui derivadas parciais nulas.

Ainda mais, fixado um ângulo θ o sinal de $|f(re^{i\theta})|^2 - |f(0)|^2$ é igual ao da expressão $2\operatorname{Re}[\overline{f(0)}\varphi(re^{i\theta})e^{ik\theta}] + r^k|\varphi(re^{i\theta})|^2$ sendo que este é, para valores pequenos de $r > 0$, igual ao de $2\operatorname{Re}[\overline{f(0)}\varphi(0)e^{ik\theta}]$ e, como $\overline{f(0)}\varphi(0) \neq 0$, tal sinal de fato muda segundo θ . Logo, a origem é um ponto de sela. ■

9.11 Definição. Dado $X \subset \mathbb{C}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, f é analítica em X se existe um aberto contendo X no qual f é analítica.

9.12 [Proposição Anti-Cálculo (Erdős)] Seja $f : \overline{D}(0; R) \rightarrow \mathbb{C}$ não constante e analítica e α , com $|\alpha| = R$, um ponto de máximo ou de mínimo de $|f|$.

(a) Se $|\alpha|$ é ponto de máximo então $f'(\alpha) \neq 0$.

(b) Se α é ponto de mínimo então $f(\alpha) = 0$ ou $f'(\alpha) \neq 0$.

Prova. Suponhamos $f'(\alpha) = 0$. Pela série de Taylor de f em torno de α e por α ser ponto de máximo ou de mínimo de $|f|$ em $\overline{D}(0; R)$ e f não constante, existem $\varphi \in \mathcal{A}(D(z_0; r))$, com $r > 0$ e suficientemente pequeno, e $k \geq 2$ tais que

$$(9.12.1) \quad \begin{cases} f(z) = f(\alpha) + (z - \alpha)^k \varphi(z), & \varphi(\alpha) \neq 0, \quad \text{se } z \in D(\alpha; r), \\ |f(z)|^2 - |f(\alpha)|^2 & \text{tem um único sinal se } z \in D(\alpha; r) \cap D(0; R). \end{cases}$$

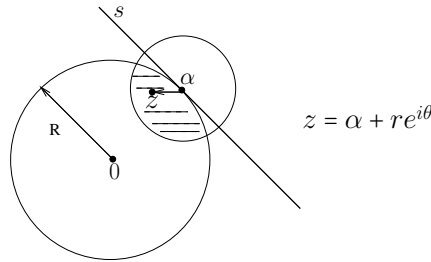


Figura 9.1: Proposição Anti-Cálculo

Substituindo na expressão em (9.12.1) a equação em (9.12.1) para $z = \alpha + \epsilon e^{i\theta}$, com $0 < \epsilon < r$ e θ em \mathbb{R} tais que $z \in D(0; R)$ obtemos a expressão de sinal único

$$(9.12.2) \quad 2\epsilon^k \operatorname{Re} \left[\overline{f(\alpha)} e^{ik\theta} \varphi(\alpha + \epsilon e^{i\theta}) \right] + \epsilon^{2k} |\varphi(\alpha + \epsilon e^{i\theta})|^2.$$

Notemos (v. figura) que θ varia em um intervalo $(\theta_0, \theta_0 + \pi)$. Dado um tal θ existe $r_\theta > 0$ tal que $z = \alpha + \epsilon e^{i\theta} \in D(0; R)$ se $\epsilon \in [0, r_\theta)$. Fixemos um tal θ . Tomando o limite para $\epsilon \rightarrow 0^+$ de (9.12.2) dividida por ϵ^k obtemos a expressão de sinal único

$$2\operatorname{Re} \left[\overline{f(\alpha)} \varphi(\alpha) e^{ik\theta} \right], \quad \theta \text{ em } (\theta_0, \theta_0 + \pi).$$

Sendo $k \geq 2$, isto só é possível se $\overline{f(\alpha)} \varphi(\alpha) = 0$, o que implica $f(\alpha) = 0$.

(a) Se α é ponto de máximo temos f nula, contra a hipótese. Logo, $f'(\alpha) \neq 0$.

(b) Se α é mínimo provamos $f(\alpha) = 0$, como desejávamos ■

Comentário. Mostremos que a Proposição Anti-Cálculo, provada independentemente do Princípio do Módulo Máximo, implica este. Consideremos f não constante e definida em $D(0; r)$, $r > 0$. Suponhamos que $|f|$ assume um máximo em z_0 , $|z_0| < r$. Então segue $f(\overline{D}(0; r)) \subset \overline{D}(0; |f(z_0)|)$, sendo que para curvas γ diferenciáveis por z_0 , temos que $f \circ \gamma$ é uma curva diferenciável por $f(z_0)$ e contida em $\overline{D}(0; |f(z_0)|)$ e, sendo assim, seu vetor tangente é ortogonal a $f(z_0)$ (identificando $f(z_0)$ como um vetor). Como f é uma aplicação conforme, isto implica $f'(z_0) = 0$. Porém, z_0 é também ponto de máximo de $|f|$ restrita a $\overline{D}(0; |z_0|)$ e então, pela Proposição Anti-Cálculo obtemos $f'(z_0) \neq 0$. Portanto, a função $|f|$ não assume máximo em $D(0; r)$.

9.4 - Teoremas de Liouville

Comentários.

- (1) Como todo polinômio $P = P(z)$, de grau maior ou igual a 1, é tal que $|P(z)| \rightarrow +\infty$ se $|z| \rightarrow +\infty$, é razoável esperar que uma série de potências que não é uma função constante, também não seja uma função limitada.
- (2) Segundo a definição dada por Weierstrass, uma função inteira é dada por uma série de potências convergente em todo o plano complexo. Atualmente, dizemos que uma função inteira é uma função holomorfa em \mathbb{C} .
- (3) Com o Teorema de Read e Hurwitz mostraremos que para uma função analítica em \mathbb{C} , sua série de Taylor na origem converge em todo o plano. Assim sendo, apresentamos a seguir uma prova intuitiva do Teorema de Liouville para séries de potências convergentes em \mathbb{C} .

9.13 Teorema (Liouville). *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, limitada. Então, $f \equiv a_0$.*

Prova. É limitada a função $|f(z) - a_0| = |z| |a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots|$. Donde, se $|z| \rightarrow +\infty$, $\varphi(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots$ tende a zero e $|\varphi|$ tem máximo global. Pelo Princípio do Módulo Máximo para analíticas, φ é constante. Logo, φ é nula e f é constante ■

A seguir provamos o Teorema de Liouville para uma função analítica em \mathbb{C} .

9.14 Teorema de Liouville em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. *Seja f analítica e limitada em \mathbb{C} . Então, f é constante.*

Prova. Pelo Princípio dos Zeros Isolados (Proposição 9.4) é fácil perceber que podemos escrever $f(z) - f(0) = z\varphi(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, com $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Desta forma temos,

$$f(z) = f(0) + z\varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dado $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$|z||\varphi(z)| \leq M + |f(0)|, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

donde, dividindo por $|z| \neq 0$, segue $\lim_{z \rightarrow \infty} |\varphi(z)| = 0$. Assim, $|\varphi|$ tem máximo global e pelo Teorema 9.8 φ é constante, com $\lim_{z \rightarrow \infty} |\varphi(z)| = 0$. Logo, $\varphi \equiv 0$ e $f \equiv f(0)$ ■

Comentário. A maior parte dos textos didáticos sobre funções em uma variável complexa prova o TFA a partir do Teorema de Liouville (para funções holomorfas). Como já provamos o TFA no Capítulo 4, sugerimos ao leitor deduzi-lo a partir do Teorema de Liouville para funções analíticas (vide exercícios).

9.15 [Teorema de Liouville Estendido em $\mathcal{A}(\mathbb{C})]$ *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ uma série de potências convergente em \mathbb{C} e admitindo $k \in \mathbb{N}$, $A \geq 0$ e $B \geq 0$ tais que*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Então, f é um polinômio de grau menor ou igual a k .

Prova. Pela desigualdade triangular temos,

$$|a_{k+1}z^{k+1} + \dots| - |a_0 + \dots + a_k z^k| \leq |(a_0 + \dots + a_k z^k) + (a_{k+1}z^{k+1} + \dots)| = |f(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

É fácil ver que existem $A_1 \geq 0$ e $B_1 \geq 0$ tais que $|a_0 + \dots + a_k z^k| \leq A_1 + B_1|z|^k$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e por tais desigualdades e a hipótese segue que existem $A_2 \geq 0$ e $B_2 \geq 0$ tais que

$$|z|^{k+1} |a_{k+1} + a_{k+2}z + \dots| \leq A_2 + B_2|z|^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Portanto segue,

$$0 \leq \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |a_{k+1} + a_{k+2}z + \dots| \leq \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{A_2 + B_2|z|^k}{|z|^{k+1}} = 0$$

e $\varphi(z) = a_{k+1} + a_{k+2}z + \dots$, $z \in \mathbb{C}$, é limitada e pelo Teorema de Liouville φ é constante, com $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \varphi(z) = 0$. Logo, $\varphi \equiv 0$ e f é um polinômio, $\text{grau}(f) \leq k$ ■

9.5 - Teorema da Aplicação Aberta

9.16 Definição. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω aberto, é **aberta** se para todo aberto O contido em Ω , o conjunto $f(O)$, a imagem de O por f , é um aberto em \mathbb{C} .

9.17 Teorema da Aplicação Aberta em $\mathcal{A}(\Omega)$. Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, com f não constante e Ω conexo. Então, f é uma aplicação aberta.

Prova (Carathéodory). Seja O um aberto não vazio em Ω e $w \in O$. Mostremos que existe um disco aberto $D(f(w); r)$, $r > 0$, contido em $f(O)$.

Pela PZI em $\mathcal{A}(\Omega)$, w é zero isolado da função não constante $g(z) = f(z) - f(w)$ e existe $\epsilon > 0$ tal que $f(z) - f(w) \neq 0$ se $z \in \partial D(w; \epsilon)$. Portanto,

$$f(w) \notin f(\partial D(w; \epsilon)) .$$

Consideremos,

$$\begin{cases} 2r = \min_{z \in \partial D(w; \epsilon)} |f(z) - f(w)| , \\ \text{um ponto arbitrário } \beta \text{ em } D(f(w); r) , \\ \text{a função } f(z) - \beta , z \in \Omega . \end{cases}$$

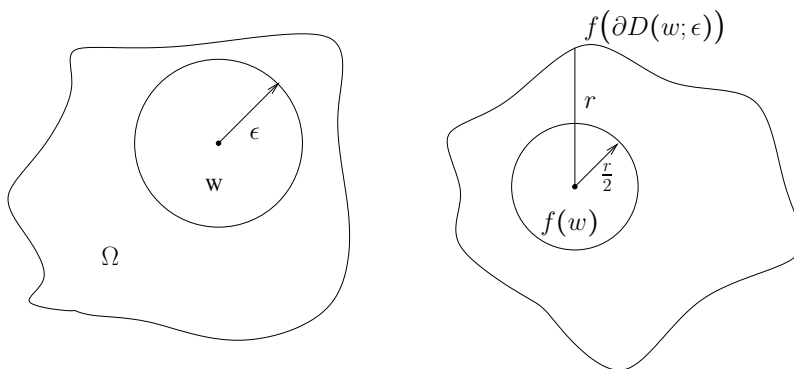


Figura 9.2: Ilustração ao Teorema da Aplicação Aberta

Para o centro w de $D(w; \epsilon)$ temos $|f(w) - \beta| < r$. Porém, para $z \in \partial D(w; \epsilon)$,

$$|f(z) - \beta| \geq |f(z) - f(w)| - |f(w) - \beta| > 2r - r = r .$$

Logo, o ponto de mínimo da função $|f(z) - \beta|$ em $\overline{D}(w; \epsilon)$ pertence ao aberto $D(w; \epsilon)$ e como $f(z) - \beta$ não é uma função constante, pelo Princípio do Módulo Mínimo em $\mathcal{A}(\Omega)$ existe $z_0 \in D(w; \epsilon)$ tal que $f(z_0) - \beta = 0$ e portanto $f(z_0) = \beta$ ■

9.6 - Desigualdade de Gutzmer-Parseval e Desigualdades de Cauchy.

9.18 Teorema (Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências).

Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ uma série de potências convergente em $D_R(0)$, $R > 0$. Dado r tal que $0 < r < R$, vale a desigualdade

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Prova. Seja z arbitrário, $|z| = r$. Pela desigualdade triangular temos,

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq M(r) + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n z^n \right| \leq M(r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Assim, aplicando a Desigualdade 4.6 (de Gutzmer-Parseval para Polinômios),

$$\sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \leq \left[M(r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n \right]^2, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Notando que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n = 0$ e então computando o limite para $N \rightarrow +\infty$ em ambos os lados da desigualdade acima, concluímos a demonstração ■

9.19 Corolário. Com as hipóteses acima, se $\sup_{D(0;R)} |f| \leq M$ e $0 < r < R$ temos

$$\max_{\overline{D}(0;r)} |f'| \leq \frac{M}{R-r}.$$

Prova. A série de Taylor de f em torno de z_0 arbitrário em $\overline{D}(0;r)$ é

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \text{se } |z - z_0| < R - r.$$

Donde, pela desigualdade de Gutzmer-Parseval, Teorema 9.18, segue

$$|f'(z_0)| |z - z_0| \leq M, \quad \text{se } |z - z_0| < R - r.$$

Para $|z - z_0|$ arbitrariamente próximo de $R - r$, no limite temos $|f'(z_0)|(R - r) \leq M$ ■

9.7 - Teoremas de Liouville Revisitados

Com a Desigualdade de Gutzmer-Parseval obtemos novas e triviais provas do Teorema de Liouville e também do Teorema de Liouville Estendido, ambos os resultados considerados para funções inteiras no sentido de Weierstrass.

9.20 Teorema de Liouville em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ uma série de potências convergente em \mathbb{C} e limitada no plano \mathbb{C} . Então, f é constante.*

Prova.

Seja M tal que $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$. Pela Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências temos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |z|^{2n} \leq M^2, \forall z \in \mathbb{C} .$$

Então, é claro que $a_n = 0, \forall n \geq 1$ e assim, $f(z) = a_0, \forall z \in \mathbb{C}$ ■

9.21 Teorema de Liouville Estendido em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ uma série de potências convergente em \mathbb{C} e admitindo $k \in \mathbb{N}, A \geq 0$ e $B \geq 0$ tais que*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k, \forall z \in \mathbb{C} .$$

Então, f é um polinômio de grau menor ou igual a k .

Prova. Vide Exercícios. ■

9.8 - Teorema da Série Dupla de Weierstrass

9.22 Teorema da Série Dupla de Weierstrass (1841). *Seja $\sum_{\nu \geq 0} f_\nu(z)$ uma série de funções com $f_\nu(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(\nu) z^n, \nu \in \mathbb{N}$, uma série de potências com coeficientes $a_n(\nu)$ em \mathbb{C} e convergente em $D(0; R), R > 0$. Suponhamos que a série $\sum f_\nu$ converge uniformemente em $\overline{D}(0; \rho)$, se $0 < \rho \leq R$, à função $F(z)$ definida em $D(0; R)$. Então, para todo $z \in D(0; R)$ e para todo $k \in \mathbb{N}$ temos, com convergência uniforme sobre todo disco fechado $\overline{D}(0; \rho), 0 < \rho < R$,*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) z^n \quad e \quad F^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu^{(k)}(z) .$$

Prova. Fixemos $r, \rho < r < R$. Por hipótese, dado $\epsilon > 0$ existe $\nu_0 \geq 0$ tal que

$$|f_{\nu+1}(z) + \dots + f_{\nu+p}(z)| \leq \epsilon, \quad \forall \nu \geq \nu_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall |z| \leq r.$$

Pelo Teorema 9.18 e com as condições acima para ν, p e z segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(\nu+1) + \dots + a_n(\nu+p)|^2 |z|^{2n} \leq \epsilon^2,$$

e desta forma, para $z \in \overline{D}(0; \rho)$, $\nu \geq \nu_0$ e p e n arbitrários em \mathbb{N} , temos,

$$|a_n(\nu+1) + \dots + a_n(\nu+p)| |z|^n = \sqrt{|a_n(\nu+1) + \dots + a_n(\nu+p)|^2 |r|^{2n}} \frac{|z|^n}{r^n} \leq \epsilon \left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Então, pelo Critério de Cauchy para séries numéricas, para todo $n \in \mathbb{N}$ a série $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)$ é convergente e para $\nu \geq \nu_0$ e $z \in \overline{D}(0; \rho)$ temos, computando o limite na desigualdade acima para $p \rightarrow +\infty$ e a seguir o somatório para n de 0 a $+\infty$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) - \sum_{\mu=0}^{\nu} a_n(\mu) \right| |z|^n \leq \frac{\epsilon}{1 - \frac{\rho}{r}}.$$

Logo, para $z \in \overline{D}(0; \rho)$ obtemos $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) - \sum_{\mu=0}^{\nu} a_n(\mu) \right] z^n \right| \leq \frac{\epsilon r}{r - \rho}$ e

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) z^n - \sum_{\mu=0}^{\nu} f_{\nu}(z) \right| \leq \frac{\epsilon r}{r - \rho}.$$

Tomando ρ arbitrariamente próximo de R segue,

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) z^n, \quad \text{se } z \in D(0; R),$$

com a convergência uniforme em $\overline{D}(0; \rho)$, se $0 < \rho < R$.

Finalmente, se $s_{\nu} = f_1 + \dots + f_{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, indica as somas parciais de $\sum f_{\nu}$, a sequência $(s_{\nu} - F)$ converge uniformemente a zero em $\overline{D}(0; \rho)$, se $0 < \rho < R$, e pelo Corolário 9.19 a sequência $(s'_{\nu} - F')$ também. Por indução em k segue

$$\sum_{\nu \geq 0} f_{\nu}^{(k)}(z) = F^{(k)}(z), \quad \text{para arbitrários } k \in \mathbb{N} \text{ e } z \in D(0; R),$$

com convergência uniforme nos discos fechados $\overline{D}(0; \rho)$, $0 < \rho < R$ ■

9.9 - O Teorema de Hurwitz, Read e Connell-Porcelli:

A Expansão em uma Série de Taylor de uma função analítica em $D(0; 1)$.

Se uma função é analítica em um disco, não é imediato que ela é dada pela sua série de potências em torno do centro do disco. Entretanto, tal importante resultado foi provado por A. Hurwitz [38], veja também A.H. Read [57].

9.23 Teorema. Dada $f \in \mathcal{A}(D(0; R))$, $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ e $0 < r < R$, e $n \in \mathbb{N}$ temos,

(Desigualdades de Cauchy)
$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| .$$

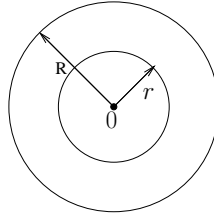


Figura 9.3: Desigualdades de Cauchy

Prova. Podemos supor $f^{(n)}(0) \neq 0$. Seja g analítica em $D(0; R)$ dada por

$$g(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f(z\omega^k), \quad \omega = e^{i\pi/n} .$$

Temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0) = f(0) \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k = 0, \\ g^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{jk} f^{(j)}(0) = f^{(j)}(0) \frac{1-\omega^{j2n}}{1-\omega^j} = 0, \quad \text{se } 1 \leq j < n \\ g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{nk} f^{(n)}(0) = 2n f^{(n)}(0) . \end{array} \right.$$

Pelo Princípio dos Zeros Isolados existe $\varphi \in \mathcal{A}(D(0; R))$ tal que

$$g(z) = z^n \varphi(z), \quad \varphi(0) = 2n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} ,$$

e pelo Princípio do Módulo Máximo concluímos

$$2n \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|g(z)|}{r^n} \leq \frac{2nM(r)}{r^n} \quad \blacksquare$$

O teorema abaixo consta em Read (1961) [57], é apresentado em Whyburn (1964) [73], e em Hurwitz (1964) [38].

9.24 Teorema (Read-Hurwitz). *Se $f \in \mathcal{A}(D(0; R))$ então,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \text{para todo } z \in D(0; R).$$

Prova. Fixando r , $0 < r < R$, e pondo $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, pelo Teorema 9.23 temos

$$|a_n| r^n \leq M(r), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se ρ é o raio de convergência de $\sum a_n z^n$, pela Fórmula de Hadamard segue

$$\rho^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r} = r^{-1},$$

o que implica $\rho \geq r$, para todo $0 < r < R$ e portanto $\rho \geq R$ ■

9.10 - Teorema da Função Inversa

9.25 Definição. *Seja $f : U \rightarrow V$ com U e V abertos.*

- *f é um isomorfismo analítico se f é analítica, bijetora e, ainda, com inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ também analítica.*
- *f é um isomorfismo analítico local em um ponto z_0 se existirem um aberto U_0 contendo z_0 e um aberto V_0 contendo $f(z_0)$ tal que $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ é um isomorfismo analítico.*

9.26 Proposição. *Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ tal $f'(z_0) \neq 0$. Existe $R > 0$ tal que*

- (a) *f é injetora em $D(z_0; R)$ contido em Ω .*
- (b) *$f(D(z_0; R)) = V$ é um aberto contendo $f(z_0)$.*
- (c) *$\varphi = f|_{D(z_0; R)} : D(z_0; R) \rightarrow V$ é inversível e sua inversa é contínua.*
- (d) *φ^{-1} é derivável (holomorfa).*

Prova.

Através da aplicação $z \mapsto f(z + z_0) - f(z_0)$ supomos $f(z_0) = 0$ e $z_0 = 0$.

- (a) Seja $R > 0$ tal que $|f'(\zeta)| > \frac{|f'(0)|}{2}$, para todo $\zeta \in D(0; 2R)$, e a série de Taylor de f na origem converge em $D(0; 2R)$. Dados z e w em $D(0; R)$ temos

$$f(z) - f(w) = a_1(z - w) + a_2(z^2 - w^2) + \dots + a_n(z^n - w^n) + \dots,$$

e, supondo $z \neq w$,

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = f'(0) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k.$$

Claramente temos

$$\left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n R^{n-1}$$

sendo que a série $f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge em $D(0; 2R)$ e $\sum_{n \geq 2} n a_n z^{n-1}$ se anula em $z = 0$. Assim, podemos supor R pequeno o suficiente tal que

$$\sum_{n \geq 2} n |a_n| R^{n-1} < \frac{|f'(0)|}{2}.$$

Desta forma, para arbitrários z e w em $D(0; R)$, com $z \neq w$, obtemos

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| > \frac{|f'(0)|}{2} > 0 \text{ e portanto } f(z) \neq f(w).$$

- (b) Segue do Teorema da Aplicação Aberta, notando que $D(0; R)$ é conexo.
- (c) Como φ é bijetora e aberta, se O é aberto $(\varphi^{-1})^{-1}(O) = \varphi(O)$ também. Logo, φ^{-1} é contínua.
- (d) Nos quocientes de Newton $\frac{\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w_0)}{w - w_0}$ trocamos $\varphi^{-1}(w) = z$, $\varphi^{-1}(w_0) = z_0$, $w = f(z)$ e $w_0 = f(z_0)$. Como φ^{-1} é contínua segue que $z \rightarrow z_0$ se $w \rightarrow w_0$ e

$$(\varphi^{-1})'(w_0) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)} \blacksquare$$

9.27 Teorema (Representação Local). *Seja f analítica em um ponto z_0 ,*

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=m}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad m \geq 1 \text{ fixo e } a_m \neq 0.$$

Então, existe φ analítica bijetora na origem com inversa derivável tal que

$$f(z) = a_0 + \varphi(z - z_0)^m.$$

Prova.

Escrevamos $f(z) - a_0 = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots$ na forma

$$f(z) - a_0 = a_m(z - z_0)^m[1 + g(z - z_0)], \quad g(0) = 0.$$

Seja $a \in \mathbb{C}$ uma raiz m -ésima de a_m ($a^m = a_m$). Ainda, utilizando a série binomial complexa (Vide Exercício) e o Teorema 7.31 (Composição) consideremos a série de potências convergente $G(z)$ satisfazendo, se $|z|$ é suficientemente pequeno,

$$(1 + g(z))^{\frac{1}{m}} = 1 + G(z), \quad G(0) = 0,$$

e portanto $1 + g(z) = (1 + G(z))^m$. Temos então,

$$f(z) - a_0 = a^m(z - z_0)^m(1 + G(z - z_0))^m = [a(z - z_0)(1 + G(z - z_0))]^m$$

donde segue

$$f(z) = a_0 + \varphi(z - z_0)^m, \quad \varphi(w) = aw(1 + G(w)).$$

Por fim, o primeiro coeficiente da série de Taylor para φ na origem é $a \neq 0$ e então pela Proposição 9.26 a aplicação φ tem as propriedades desejadas ■

9.28 Definição. *Dada uma série de potências $\sum a_n z^n$ não nula, o menor natural m tal que $a_m \neq 0$ é a ordem de f .*

9.11 - Lema de Schwarz

9.29 Lema de Schwarz. *Seja f analítica em $D(0;1)$ e satisfazendo*

$$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D(0;1), \quad \text{and} \quad f(0) = 0 .$$

Então temos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^2 \leq 1 \quad (e, |f'(0)| \leq 1) \quad e \quad |f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in D(0;1).$$

Ainda, temos $|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}| = 1$, para algum $n \geq 1$, se e só se existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f(z) = \omega z^n, \quad \forall z \in D(0;1) .$$

Ainda mais, temos $|f(z)| = |z|$, para algum $z \neq 0$, se e só se existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f(z) = \omega z, \quad \forall z \in D(0;1) .$$

Prova.

Como $f(0) = 0$, pelo Teorema 9.24 (de Read, Connell-Porcelli e Hurwitz) podemos escrever $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$, com $|z| < 1$ e $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, para todo $n \geq 1$. Então, como $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in D(0;1)$, pela Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências segue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 1, \quad \forall r \text{ in } [0,1),$$

e computando o limite de tal desigualdade para $r \rightarrow 1^-$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \leq 1 .$$

Assim, se $|a_n| = 1$ para um particular $n \geq 1$, obtemos $f(z) = a_n z^n$, $\forall z \in D(0;1)$.

Agora, consideremos ζ arbitrário na circunferência $\{z : |z| = r\}$, onde r é fixo e $0 < r < 1$. Claramente temos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^{n-1}| = r^{-1} |\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^n| \leq r^{-1}$. Então, aplicando o Princípio do Modulo Máximo para funções analíticas obtemos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}| \leq 1/r$, $\forall z \in \overline{D}(0;r)$. Consequentemente, como $0 < r < 1$ é arbitrário, encontramos a desigualdade

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} \right| \leq 1, \quad \forall z \in D(0;1) .$$

Desta forma, obtemos $|f(z)| = |z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}| \leq |z|$ para todo $z \in D(0; 1)$.

Se $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^n| = |\zeta|$, para algum $0 < |\zeta| < 1$, temos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^{n-1}| = 1$. No parágrafo acima provamos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}| \leq 1$, $\forall z \in D(0; 1)$. Portanto, aplicando o Princípio do Módulo Máximo concluímos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} = a_1 \in S^1, \text{ para todo } z \in D(0; 1) .$$

Assim temos $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n = a_1 z$, para todo $z \in D(0; 1)$ ■

9.12 - Convergência no Espaço das Funções Analíticas

Para estendermos as desigualdades de Cauchy, introduzimos algumas definições. Abaixo, X é um subconjunto não vazio arbitrário do plano complexo, K e L indicam compactos não vazios em \mathbb{C} enquanto V indica um aberto em \mathbb{C} .

9.30 Definição. Dado K um compacto em X e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, pomos

$$|f|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in K} |f(z)| .$$

O número $|f|_K$ é chamado de *norma (do sup) de f sobre K* .

Dada uma sequência (f_n) em $C(X; \mathbb{C})$, K um compacto em X e $f \in C(X; \mathbb{C})$, é claro que (f_n) converge uniformemente a f sobre K se e só se $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f|_K = 0$.

9.31 Definição. Uma sequência, ou série, de funções definidas em X e a valores complexos converge compactamente em X se converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de X .

9.32 Definição. Dado $X \subset \mathbb{C}$, L é uma vizinhança compacta de X se

- L é compacto.
- Existe um aberto V tal que $X \subset V \subset L$.

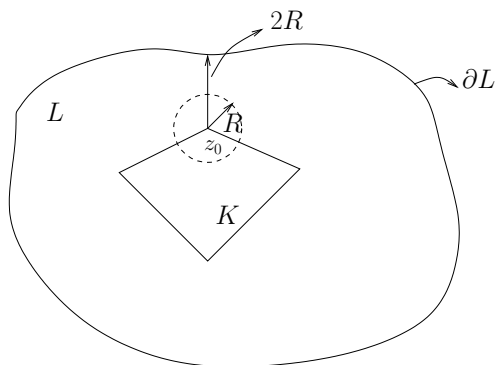


Figura 9.4: Ilustração à Proposição 9.33

9.33 Estimativas de Cauchy para as derivadas sobre compactos. *Seja Ω um aberto, K um compacto contido em Ω e L uma vizinhança compacta de K contida em Ω . Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n \geq 0$ (M_n dependendo de Ω , K e L) tal que*

$$|f^{(n)}|_K \leq M_n |f|_L, \quad \forall f \in \mathcal{A}(\Omega).$$

Prova. Como todo ponto em K é o centro de um disco aberto contido em L , temos $2R = d(K; \partial L) > 0$. Assim, para todo $z_0 \in K$ ocorre $\overline{D}(z_0; R) \subset L$.

Pelas Desigualdades de Cauchy (Teorema 9.23) segue

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{\max_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{R^n},$$

e conseqüentemente obtemos, para todo $z_0 \in K$,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} |f|_L \quad \blacksquare$$

Como consequência do Teorema para séries duplas enunciamos,

9.34 Corolário. *Seja (f_n) uma seqüência em $\mathcal{A}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω limitado e conexo, tal que a seqüência $(f_n|_{\partial\Omega})$ converge uniformemente sobre $\partial\Omega$. Então,*

(a) *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})$ converge compactamente em Ω .*

(b) *Se $f = \lim f_n$ então, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.*

(c) *$(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$, sobre Ω , para todo natural k .*

Prova.

- (a) Dado um disco fechado (compacto) $\overline{D}(z_0; r)$ em Ω , seja L uma vizinhança compacta deste disco contida em Ω . Pelas Estimativas de Cauchy (9.33) e pelo Princípio do Módulo Máximo temos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$|f_m^{(k)} - f_n^{(k)}|_{\overline{D}(z_0; R)} \leq M_k |f_m - f_n|_L \leq M_k |f_m - f_n|_{\partial\Omega}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada natural k a sequência $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre o disco $\overline{D}(z_0; r)$ e portanto $(f_n^{(k)})$ converge compactamente em Ω .

- (b) Seja $\overline{D}(z_0; R) \subset \Omega$, $R > 0$. Pelo Teorema 9.24 (Hurwitz), em $D(z_0; R)$ cada f_n é dada por sua série de Taylor em z_0 . A n -ésima soma parcial da série

$$f_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_{n+1} - f_n),$$

é $s_n = f_1 + (f_2 - f_1) + \dots + (f_{n+1} - f_n) = f_{n+1}$ e, devido às hipóteses, a sequência (s_n) e portanto a série $f_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_{n+1} - f_n)$ convergem uniformemente a f sobre $\overline{D}(z_0; R)$. Pelo Teorema 9.22 (Weierstrass) segue que $f \in \mathcal{A}(D(z_0; R))$ e $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ compactamente sobre $D(z_0; R)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Por fim, como $\overline{D}(z_0; R)$ é arbitrário, por um simples argumento sobre compacidade segue que $(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$, sobre Ω , para todo natural k ■

9.12 - Teorema de Montel

Em análise um princípio importante é que toda sequência limitada contém uma subsequência convergente e portanto toda sequência em um subconjunto compacto K do plano tem subsequência convergente a um ponto em K . O Teorema de Montel estende este princípio para certos conjuntos de funções.

9.35 Notação. *No que segue indicamos $C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ é contínua}\}$.*

9.36 Definição. *Uma família \mathcal{F} de funções em $C(\Omega)$ é normal¹ (ou, relativamente compacta) se toda sequência em \mathcal{F} contém uma subsequência convergindo compactamente a alguma função f [claramente, $f \in C(\Omega)$].*

¹Conceito introduzido por P. Montel em 1912.

Na definição acima não exigimos que o limite da subsequência pertença a \mathcal{F} .

9.37 Definição. *Uma família \mathcal{F} contida em $C(\Omega)$ é*

- *localmente limitada se para todo $z_0 \in \Omega$ existe um disco aberto $D(z_0; R)$ e um $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z \in D(z_0; R)$.*

- *equicontínua sobre $X \subset \Omega$ se para todo $\epsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que*

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \text{e } \forall z \text{ e } \forall w, \quad \text{ambos em } X \text{ tais que } |z - w| < \delta.$$

É trivial verificar que se $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ é localmente limitada e K é um compacto em Ω então existe $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z \in K$. Dizemos então que \mathcal{F} é **uniformemente limitada sobre os compactos de Ω** .

9.38 Lema. *Seja $\mathcal{C} = \{D(a_n; r_m) : a_n \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ e } r_m \in \mathbb{Q}, r_m > 0, \text{ com } n \text{ e } m \in \mathbb{N}\}$.*

Então, todo aberto em \mathbb{R}^2 é reunião (enumerável) de conjuntos na coleção \mathcal{C} . Isto é, \mathcal{C} é uma base (enumerável) de abertos de \mathbb{R}^2 .

Prova. Seja Ω um aberto arbitrário em \mathbb{R}^2 e um disco aberto $D(z; 2r) \subset \Omega$, com r racional e $r > 0$. É claro que existe $w \in D(z; r) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ e é fácil ver que $z \in D(w; r) \subset D(z; 2r) \subset \Omega$. Logo, temos $D(w; r) \in \mathcal{C}$. Desta forma, existem uma sequência $(a_{n_k}) \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e uma sequência $(r_{m_k}) \subset \mathbb{Q}^+$ tais que $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D(a_{n_k}; r_{m_k})$ ■

9.39 Teorema de Montel. *Seja \mathcal{F} uma família em $\mathcal{A}(\Omega)$ localmente limitada.*

Então,

- \mathcal{F} é equicontínua sobre cada subconjunto compacto de Ω .*
- \mathcal{F} é normal (ou, relativamente compacta).*

Prova.

- Seja K compacto em Ω e $4r = d(K; \partial\Omega) > 0$. Como \mathcal{F} é localmente limitada, \mathcal{F} é também limitada sobre o compacto $K(3r) = \{z : d(z; K) \leq 3r\} \subset \Omega$. Seja $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo z em $K(3r)$.

Dados z_0 e $z_0 + h$ em K , com $|h| < r$, a série de Taylor de uma função $f \in \mathcal{F}$ em torno do ponto z_0 , $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$, converge no disco $D(z_0; 4r)$ e

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| = \left| \sum_{n \geq 1} a_n h^n \right| \leq |h| \sum |a_n| |h|^{n-1} \leq |h| \sum n |a_n| |h|^{n-1} .$$

Como $f'(z_0 + h) = \sum n a_n h^{n-1}$, pela desigualdade de Cauchy e por 6.17 temos

$$n |a_n| (2r)^{n-1} \leq \max_{\overline{D}(z_0; 2r)} |f'| \leq \frac{M}{3r - 2r} = \frac{M}{r} , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Desta forma segue, observando que $\frac{|h|}{2r} \leq \frac{1}{2}$,

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| \leq |h| \sum n |a_n| (2r)^{n-1} \left(\frac{|h|}{2r} \right)^{n-1} \leq |h| \frac{M}{r} \sum \left(\frac{|h|}{2r} \right)^{n-1} \leq |h| \frac{2M}{r} .$$

- (b) Seja $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária em \mathcal{F} . Dado a arbitrário em Ω consideremos um raio $r = r(a) > 0$ e uma constante $M \geq 0$ tais que $\overline{D}(a; r) \subset \Omega$ e

$$|f_\nu(z)| \leq M , \quad \forall \nu \in \mathbb{N} , \quad \forall z \in \overline{D}(a; r) .$$

Indicando $c_n[f_\nu] = \frac{f_\nu^{(n)}(a)}{n!}$, pela desigualdade de Cauchy temos

$$|c_n[f_\nu]| \leq \frac{M}{r^n} , \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} .$$

A seguir, aplicamos duas vezes o método da **diagonalização de Cantor**.

Como a sequência $(c_0[f_\nu])_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada, existe uma subsequência $\{f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots\}$ de \mathcal{F} tal que a sequência numérica $(c_0[f_{1k}])_{k \in \mathbb{N}}$ converge a C_0 se $k \rightarrow +\infty$.

Por indução temos uma subsequência $\{f_{\nu+1,1}, f_{\nu+1,2}, f_{\nu+1,3}, \dots\}$ de $\{f_{\nu 1}, \dots, f_{\nu k}, \dots\}$ tal que a sequência numérica $(c_\nu[f_{\nu+1 k}])_{k \in \mathbb{N}}$ converge a C_ν se $k \rightarrow +\infty$.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{f}_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & c_0[f_{1k}] & \rightarrow & C_0 \in \mathbb{C} \\ f_{21} & \mathbf{f}_{22} & f_{23} & \dots & c_1[f_{2k}] & \rightarrow & C_1 \in \mathbb{C} \\ f_{31} & f_{32} & \mathbf{f}_{33} & \dots & c_2[f_{3k}] & \rightarrow & C_2 \in \mathbb{C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \end{array}$$

Seja $g_n = f_{nn}$ a n -ésima função selecionada na n -ésima etapa de construção. É claro que $\{g_n\}$ é uma subsequência de \mathcal{F} e para todo $N \in \mathbb{N}$ e $z \in \overline{D}(a; r/2)$ temos

$$|g_k(z) - g_l(z)| \leq \sum_{n \leq N} |c_n(g_k) - c_n(g_l)| |z - a|^n + \sum_{n > N} \frac{2M}{r^n} |z - a|^n .$$

Seja $\epsilon > 0$. A segunda parcela no segundo membro da desigualdade imediatamente acima é majorada por $\sum_{n>N} 2M\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{M}{2^{N-1}} < \epsilon/2$ se $N \geq N_0$, com N_0 grande o suficiente. Fixando $N = N_0$ o somatório finito no segundo membro da citada desigualdade é majorado por

$$\sum_{n \leq N_0} |c_n(g_k) - c_n(g_l)| \left(\frac{r}{2}\right)^n < \epsilon/2, \text{ se } k, l \geq k_0,$$

com k_0 grande o suficiente, pois $c_n[g_k] \rightarrow 0$ se $k \rightarrow +\infty$, para todo n . Assim, a sequência de funções $(g_n) = (f_{nn})$ converge uniformemente no disco compacto $\overline{D}(a; r/2)$.

Pelo Lema 9.38 existe uma sequência (a_ν) de pontos em Ω tal que

$$\Omega = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} D(a_\nu; \frac{r_\nu}{2}), \quad r_\nu = r(a_\nu).$$

Então, escolhemos uma subsequência $(g_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ de (g_n) que converge em $\overline{D}(a_1; r_1/2)$. Desta forma determinamos por indução uma subsequência $(g_{\nu,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(g_{\nu-1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ que converge em $\overline{D}(a_\nu; r_\nu/2)$ [vide diagrama abaixo].

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{g11} & g_{12} & g_{13} & \dots & (g_{1k}) & \text{converge em} & \overline{D}(a_1; r_1/2) \\ g_{21} & \mathbf{g22} & g_{23} & \dots & (g_{2k}) & \text{converge em} & \overline{D}(a_2; r_2/2) \\ g_{31} & g_{32} & \mathbf{g33} & \dots & (g_{3k}) & \text{converge em} & \overline{D}(a_3; r_3/2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \end{array}$$

É claro que a sequência de funções $h_n = g_{nn}$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente sobre cada um dos discos $\overline{D}(a_\nu; r_\nu/2)$.

Por fim, se K é compacto existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset D(a_1; r_1/2) \cup \dots \cup D(a_p; r_p/2)$$

e (h_n) converge uniformemente em

$$\overline{D}(a_1; r_1/2) \cup \dots \cup \overline{D}(a_p; r_p/2) \supset K \quad \blacksquare$$

9.40 Critério (de Montel). *Seja $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ uma sequência localmente limitada em Ω . Se toda subsequência de $\{f_\nu\}$ que converge compactamente em Ω , converge para $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ então $\{f_\nu\}$ converge compactamente a f em Ω .*

Prova.

Por contradição. Suponhamos existir K compacto em Ω tal que

$$|f_n - f|_K \not\rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow +\infty .$$

Então, existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (f_{n_j}) de (f_n) tal que

$$|f_{n_j} - f|_K \geq \epsilon, \text{ para todo } j \in \mathbb{N} .$$

Como (f_{n_j}) é também localmente limitada, pelo Teorema de Montel existe uma subsequência (φ_{n_j}) de (f_{n_j}) que converge compactamente em Ω a uma função φ . Devido às hipóteses temos $\varphi = f$, com $|\varphi_{n_j} - f|_K \geq \epsilon, \forall j \not\rightarrow$

9.41 Teorema (Vitali). *Seja Ω conexo, $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ localmente limitada e*

$$A = \{\omega \in \Omega : \text{existe } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\omega) \in \mathbb{C}\}.$$

Se A tem ponto de acumulação em Ω então $\{f_n\}$ converge compactamente em Ω .

Prova.

Pelo Critério de Montel basta mostrar que o limite das subsequências compactamente convergentes é único. Sejam $\{f_{n_j}\}$ e $\{f_{n_k}\}$ duas tais subsequências convergindo às funções φ e ψ , respectivamente. Pelo Corolário 9.40, as funções φ e ψ são analíticas. Temos ainda, $\varphi = \psi$ em A , sendo A um conjunto com ponto de acumulação em Ω , com Ω conexo. Consequentemente, pelo Princípio de Identidade para funções analíticas segue $\varphi = \psi$ ■

9.13 - Séries de Laurent

9.42 Teorema. *Suponhamos $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j z^j$, $r_1 < |z| < r_2$. Consideremos r tal que $r_1 < r < r_2$. Então,*

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 r^{2j} \leq M(r)^2, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Prova. Devido à convergência uniforme da série de Laurent sobre o compacto $\{z : |z| = r\}$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ e $m \geq N$ então,

$$\left| \sum_{j=-m}^n a_j z^j \right| \leq M(r) + \epsilon, \quad \text{se } |z| = r,$$

e assim, se $|z| = r$ obtemos

$$\left| \sum_{j=-m}^n a_j z^{m+j} \right| = |z|^m \left| \sum_{j=-m}^n a_j z^j \right| \leq r^m (M(r) + \epsilon), \quad \text{se } |z| = r.$$

Então, pela desigualdade de Cauchy para polinômios 6.15,

$$\sum_{j=-m}^n |a_j|^2 r^{2m+2j} \leq r^{2m} (M(r) + \epsilon)^2,$$

donde cancelando r^{2m} segue

$$\sum_{j=-m}^n |a_j|^2 r^{2j} \leq (M(r) + \epsilon)^2, \quad \forall n \geq N, \quad \forall m \geq N,$$

tomando o limite da desigualdade acima para $n \rightarrow +\infty$ e para $m \rightarrow +\infty$ segue

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 r^{2j} \leq (M(r) + \epsilon)^2.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, é claro que concluímos a tese ■

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 9

1. Reescreva, com suas próprias palavras, a demonstração do Teorema da Aplicação Aberta (TAA) para Polinômios dada no Capítulo 4.
2. Mostre que o TAA para polinômios implica o Princípio do Módulo Mínimo para polinômios
3. Mostre que o TAA para polinômios implica o TFA.
4. Mostre que o TAA para polinômios implica o Princípio do Módulo Máximo para polinômios
5. Mostre que a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para polinômios implica o Princípio do Módulo Máximo para polinômios.
6. Demonstre o TFA a partir de Teorema de Liouville para funções analíticas.
7. Adapte a demonstração do TAA para polinômios para produzir uma demonstração do TAA para funções analíticas.
8. Demonstre o Teorema de Liouville Estendido em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, utilizando a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências.
9. Prove o seguinte resultado sobre a Série Binomial Complexa:

Seja $p \in \mathbb{N}^*$. Então, é convergente a série

$$B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/p}{n} z^n, \text{ se } z \in D(0; 1) .$$

Ainda mais, é válida a identidade

$$B(z)^p = 1 + z, \text{ para todo } z \in D(0; 1) .$$

10. Mostre que $|\cos z|^2 + |\sen z|^2 = 1$ se e somente se $z \in \mathbb{R}$.