Números Complexos

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS TEOREMAS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES/CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Capítulo 6

SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES E SOMAS NÃO ORDENADAS

Capítulo 7

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES, E SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 8

SÉRIES DE FOURIER

Capítulo 9

FUNÇÕES ANALÍTICAS

9.1 - Introdução

Em uma variável real, nem toda função $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitamente derivável tem a propriedade: "Para todo ponto x_0 em (a, b) existe um intervalo aberto $J = (x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b), r > 0$, tal que f restrita a J é igual à série de Taylor de f em torno de x_0 e restrita a J". Isto é, nem toda função em uma variável real, a valores reais e infinitamente derivável, é uma função analítica real.

Entretanto, no capítulo 10 mostraremos que toda função derivável num aberto de $\mathbb{C}$ e a valores complexos (ditas holomorfas ou $\mathbb{C}$- deriváveis) é analítica (complexa). Ou seja, como toda série de potências é derivável no interior do seu disco de convergência, veremos que em $\mathbb{C}$ são equivalentes os conceitos de derivabilidade e analiticidade.

Desta forma, os resultados que mostrarmos neste capítulo para funções analíticas em um aberto no plano complexo, serão no capítulo 10 também estabelecidos para funções $\mathbb{C}$-deriváveis neste mesmo aberto.

9.2 - Resultados Básicos

9.1 Definição. *A função $f:\Omega\to\mathbb{C}$, Ω um aberto em $\mathbb{C}$, é* analítica *em Ω se para todo $z_0\in\Omega$ existe $R=R(z_0)>0$ e constantes $c_n\in\mathbb{C}\,,n\in\mathbb{N}$, tais que*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\,,\quad \forall z\in D(z_0;R)\subset\Omega\ .$$

Indicamos por $\mathcal{A}(\Omega)$ o conjunto das funções analíticas em Ω.

9.2 Proposição. *Toda série de potências é analítica no interior do seu disco de convergência.*

Prova. Consequência óbvia do Teorema 7.28 (Teorema da Translação) ∎

9.3 Proposição. *Sejam $f,g\in\mathcal{A}(\Omega)$ e $\lambda\in\mathbb{C}$. Pertencem a $\mathcal{A}(\Omega)$ as funções:*

(a) $f+g$

(b) λf.

(c) fg

(d) $\frac{1}{f}$, *se $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\Omega$.*

Prova.

(a) e (b): Consequências das propriedades elementares para séries de potências.

(c) Segue da Teorema 7.29.

(d) Segue do Teorema 7.32. ∎

Devido à Proposição 9.3 (a) e (b) temos que $\mathcal{A}(\Omega)$ é um espaço vetorial. Devido à Proposição 9.3 (a), (b) e (c), $\mathcal{A}(\Omega)$ é uma álgebra. Ainda mais, como a função $f(z)=1,\forall z\in\Omega$, é analítica, segue que $\mathcal{A}(\Omega)$ é uma álgebra com unidade.

9.4 Proposição (Princípio dos Zeros Isolados [PZI] para funções analíticas). *Seja $f\in\mathcal{A}(\Omega)$, f não nula e Ω conexo. Então, o conjunto dos zeros de f é isolado em Ω. Ainda, se $z_0\in\Omega$ e $f(z_0)=0$, existem $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$, e $g\in\mathcal{A}\big(\Omega\big)$, tais que*

$$f(z)=(z-z_0)^k g(z)\,,\forall z\in\Omega\,,\qquad e\qquad g(z_0)\neq 0\ .$$

Prova. Desenvolvamos f por sua série de Taylor em torno de z_0. Do Corolário 7.37 [PZI para séries de potências] e Proposição 9.2 obtemos para $z \in D(z_0;R)$, $R > 0$ e R suficientemente pequeno, a fatoração $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, pondo $\varphi(z) = \sum_{p \geq k+1} a_p (z - z_0)^{p-k}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$ para todo $p > k$ e $\varphi(z_0) = a_{k+1} \neq 0$. Encerramos a prova definindo

$$g(z) = \begin{cases} \varphi(z)\,, \text{ se } z \in D(z_0;R)\,, \\ \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}\,, \text{ se } z \in \Omega \smallsetminus \{z_0\} \end{cases} \blacksquare$$

9.5 Corolário (Princípio de Identidade para funções analíticas). *Sejam f e g em $\mathcal{A}(\Omega)$, Ω conexo, tais que $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação em Ω. Então, $f = g$.*

Prova. Trivial, pelo Princípio dos Zeros Isolados em $\mathcal{A}(\Omega)$ $\blacksquare$

Notação. Dadas $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$, pomos $f \equiv g$ se $f(x) = g(x)\,, \forall x \in X$.

9.6 Corolário ($\mathcal{A}(\Omega)$ é uma álgebra sem divisores de zero). *Sejam f e g em $\mathcal{A}(\Omega)$, com Ω conexo. Se $fg \equiv 0$ então, ou $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.*

Prova. Consideremos $\overline{D}(z_0;r)$, $r > 0$, um disco fechado arbitrário contido em Ω. Então, ou f ou g (ou ambas) se anula infinitas vezes em $\overline{D}(z_0;r)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que f se anule em todos os pontos da sequência de pontos distintos $(w_n) \subset \overline{D}(z_0;r)$. Como (w_n) tem um ponto de acumulação em $\overline{D}(z_0;r) \subset \Omega$, pelo PZI em $\mathcal{A}(\Omega)$ concluímos que f é identicamente nula $\blacksquare$

9.7 Proposição. *Se $g \in \mathcal{A}(\Omega_1)$, $f \in \mathcal{A}(\Omega_2)$ e $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$ então, $f \circ g \in \mathcal{A}(\Omega_1)$.*

Prova. Dado $z_0 \in \Omega_1$, desenvolvemos f como uma série de potências em torno de $g(z_0)$: $f(w) = \sum b_n \big(w - g(z_0)\big)^n$, se $|w - g(z_0)| < R_1$, para algum $R_1 > 0$. Desenvolvendo então g em série de potências em torno de z_0 obtemos $g(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ se $|z - z_0| < R_2$, para algum $R_2 > 0$. Como $a_0 = g(z_0)$, existe r tal que $0 < r < R_2$ e $|g(z) - g(z_0)| < R_1$ se $|z - z_0| < r$. Então, pelo Teorema 7.31 $f\big(g(z)\big)$ desenvolve-se como uma série de potências em torno de z_0 $\blacksquare$

9.3 - Princípios do Módulo Máximo e do Módulo Mínimo

9.8 Teorema. *Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, f não constante e Ω conexo. Então,*

(a) **(Princípio do Módulo Máximo em $\mathcal{A}(\Omega)$)** *$|f|$ não tem máximo local.*

(b) **(Princípio do Módulo Mínimo em $\mathcal{A}(\Omega)$)** *$|f|$ não tem mínimo local, a não ser que f se anule.*

Prova. Pelo Teorema da Trnslação (7.28) podemos supor sem perda de generalidade $z_0 = 0$ um ponto de máximo/mínimo local de $|f|$. A expressão

$$|f(z)|^2 - |f(0)|^2$$

tem sinal constante [≥ 0 ou ≤ 0] para $z \in D(0;\epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$ fixo.

Pela Proposição 9.4 existe um natural $k \geq 1$ e $\varphi \in \mathcal{A}\big(D(0;\epsilon)\big)$ tal que

$$f(z) = f(0) + z^k \varphi(z)\,, \quad \varphi(0) \neq 0\ .$$

Escrevendo $z = re^{i\theta}$, $0 < r < \epsilon$, $\theta \in \mathbb{R}$, e combinando as expressões acima obtemos,

$$|f(re^{i\theta})|^2 - |f(0)|^2 = 2r^k \mathrm{Re}\Big[\,\overline{f(0)}e^{ik\theta}\varphi(re^{i\theta})\,\Big] \ + \ r^{2k}|\varphi(re^{i\theta})|^2\ ,$$

de sinal constante e que se mantém ao dividirmos o 2 membro por r^k, $0 < r < \epsilon$:

$$2\mathrm{Re}\Big[\,\overline{f(0)}e^{ik\theta}\varphi(re^{i\theta})\,\Big] \ + \ r^k|\varphi(re^{i\theta})|^2\ .$$

Fixado θ, por continuidade o limite da expressão acima para $r \to 0^+$ é a expressão

$$2\mathrm{Re}\Big[\,\overline{f(0)}\varphi(0)e^{ik\theta}\,\Big],$$

que conserva o sinal de sua predecessora, qualquer que seja θ. Porém, é elementar que isto só é possível se $\overline{f(0)}\varphi(0) = 0$ [basta escolher valores θ tais que $e^{ik\theta}$ valha $+1$, -1, $+i$ e $-i$]. Portanto, como $\varphi(0) \neq 0$, concluímos que $f(0) = 0$.

Se 0 é ponto de máximo local então $|f(z)| \leq 0$, se $z \in D(0;\epsilon)$, e f é nula em $D(0;\epsilon)$ e, assim, em Ω, contra a hipótese. Logo, $|f|$ não admite máximo local.

Se 0 é um ponto de mínimo local, provamos que $f(0) = 0$ como desejado ∎

9.9 Definição. *Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$ e f diferenciável, um ponto $P_0 \in \Omega$ é um* ponto de sela *de f se P_0 é um* ponto crítico *de f, isto é, as derivadas parciais $f_x(P_0)$ e $f_y(P_0)$ são nulas e, ainda, P_0 não é ponto de máximo local de f nem ponto de mínimo local de f.*

9.10 Corolário. *Mantendo as hipóteses acima, um ponto $z_0 \in \Omega$ é ponto de sela da função a valores reais $|f| : \Omega \to \mathbb{R}$ se e somente se $f'(z_0) = 0$ e $f(z_0) \neq 0$.*

Prova. Suponhamos $z_0 = 0$ e utilizemos a notação do Teorema acima.

$\Rightarrow$ É óbvio que $f(0) \neq 0$. Consideremos ψ analítica na origem tal que

$$f(z) = f(0) + z\psi(z)\,, \;\; \psi(0) = f'(0)\;.$$

Na origem $|f|$ é diferenciável e tem gradiente nulo e assim para θ arbitrário em $\mathbb{R}$ e tomando o limite para $r \to 0$ obtemos,

$$0 \leftarrow \frac{|f(re^{i\theta})| - |f(0)|}{|re^{i\theta}|} = \frac{1}{|f(re^{i\theta})| + |f(0)|}\left\{2\mathrm{Re}\left[\,\overline{f(0)}\psi(re^{i\theta})e^{i\theta}\,\right] \;+\; r|\psi(re^{i\theta})|^2\right\}\;.$$

Por outro lado, fixo θ, se $r \to 0$ temos $f(re^{i\theta}) \to 0$ e, ainda, $\psi(re^{i\theta}) \to f'(0)$ e então substituindo tais limites no limite que os precede encontramos

$$2\mathrm{Re}[\overline{f(0)}f'(0)e^{i\theta}] = 0\;.$$

Por fim, como θ é arbitrário obtemos $\overline{f(0)}f'(0) = 0$ e portanto $f'(0) = 0$.

$\Leftarrow$ Devido às hipóteses, existe uma função φ analítica na origem satisfazendo $f(z) = f(0) + z^k\varphi(z)$, com $k \geq 2$. Então, para $z \neq 0$ segue,

$$\frac{|f(z)| - |f(0)|}{|z|} = \frac{|f(z)|^2 - |f(0)|^2}{|z|\,(\,|f(z)| + |f(0)|\,)} = \frac{2\mathrm{Re}[\,\overline{f(0)}\varphi(z)z^k\,] + |\varphi(z)|^2\,|z|^{2k}}{|z|\,(\,|f(z)| + |f(0)|\,)}\;.$$

Logo, se $z \to 0$ temos

$$\frac{|f(z)| - |f(0)|}{|z|} = \frac{1}{|f(z)| + |f(0)|}\left\{2\mathrm{Re}\left[\,\overline{f(0)}\varphi(z)z^{k-1}\frac{z}{|z|}\,\right] \;+\; |\varphi(z)|^2|z|^{2k-1}\right\} \to 0\;.$$

Portanto, na origem $|f|$ é diferenciável e possui derivadas parciais nulas.

Ainda mais, fixado um ângulo θ o sinal de $|f(re^{i\theta})|^2 - |f(0)|^2$ é igual ao da expressão $2\mathrm{Re}\left[\,\overline{f(0)}\varphi(re^{i\theta})e^{ik\theta}\,\right] + r^k|\varphi(re^{i\theta})|^2$ sendo que este é, para valores pequenos de $r > 0$, igual ao de $2\mathrm{Re}[\,\overline{f(0)}\varphi(0)e^{ik\theta}\,]$ e, como $\overline{f(0)}\varphi(0) \neq 0$, tal sinal de fato muda segundo θ. Logo, a origem é um ponto de sela. ∎

9.11 Definição. *Dado $X \subset \mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$, f é* analítica em X *se existe um aberto contendo X no qual f é analítica.*

9.12 [Proposição Anti-Cálculo (Erdös)] *Seja $f : \overline{D}(0;R) \to \mathbb{C}$ não constante e analítica e α, com $|\alpha| = R$, um ponto de máximo ou de mínimo de $|f|$.*

(a) Se $|\alpha|$ é ponto de máximo então $f'(\alpha) \neq 0$.

(b) Se α é ponto de mínimo então $f(\alpha) = 0$ ou $f'(\alpha) \neq 0$.

Prova. Suponhamos $f'(\alpha) = 0$. Pela série de Taylor de f em torno de α e por α ser ponto de máximo ou de mínimo de $|f|$ em $\overline{D}(0;R)$ e f não constante, existem $\varphi \in \mathcal{A}\big(D(z_0;r)\big)$, com $r > 0$ e suficientemente pequeno, e $k \geq 2$ tais que

$$(9.12.1) \qquad \begin{cases} f(z) = f(\alpha) + (z-\alpha)^k \varphi(z)\,, \quad \varphi(\alpha) \neq 0\,, \quad \text{se } z \in D(\alpha;r)\,, \\ \\ |f(z)|^2 - |f(\alpha)|^2 \qquad \text{tem um único sinal se } z \in D(\alpha;r) \cap D(0;R)\ . \end{cases}$$

Substituindo na expressão em (9.12.1) a equação em (9.12.1) para $z = \alpha + \epsilon e^{i\theta}$,

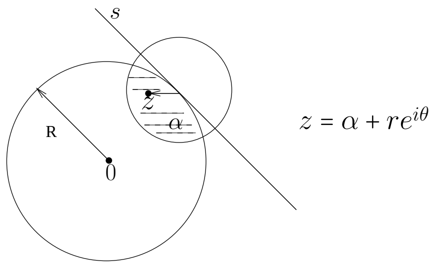

Figura 9.1: Proposição Anti-Cálculo

com $0 < \epsilon < r$ e θ em $\mathbb{R}$ tais que $z \in D(0;R)$ obtemos a expressão de sinal único

$$(9.12.2) \qquad 2\epsilon^k \mathrm{Re}\Big[\, \overline{f(\alpha)} e^{ik\theta} \varphi(\alpha + \epsilon e^{i\theta})\, \Big] + \epsilon^{2k}\, |\varphi(\alpha + \epsilon e^{i\theta})|^2\ .$$

Notemos (v. figura) que θ varia em um intervalo $(\theta_0\,, \theta_0 + \pi)$. Dado um tal θ existe $r_\theta > 0$ tal que $z = \alpha + \epsilon e^{i\theta} \in D(0;R)$ se $\epsilon \in [0, r_\theta)$. Fixemos um tal θ. Tomando o limite para $\epsilon \to 0^+$ de (9.12.2) dividida por ϵ^k obtemos a expressão de sinal único

$$2\mathrm{Re}\Big[\, \overline{f(\alpha)} \varphi(\alpha) e^{ik\theta}\, \Big]\,, \quad \theta \text{ em } (\theta_0, \theta_0 + \pi)\ .$$

Sendo $k \geq 2$, isto só é possível se $\overline{f(\alpha)}\varphi(\alpha) = 0$, o que implica $f(\alpha) = 0$.

(a) Se α é ponto de máximo temos f nula, contra a hipótese. Logo, $f'(\alpha) \neq 0$.

(b) Se α é mínimo provamos $f(\alpha) = 0$, como desejavamos ■

Comentário. Mostremos que a Proposição Anti-Cálculo, provada independentemente do Princípio do Módulo Máximo, implica este. Consideremos f não constante e definida em $D(0;r)$, $r > 0$. Suponhamos que $|f|$ assume um máximo em z_0, $|z_0| < r$. Então segue $f\big((\overline{D}(0;r)\big) \subset \overline{D}\big(0;|f(z_0|\big)$, sendo que para curvas γ diferenciáveis por z_0, temos que $f \circ \gamma$ é uma curva diferenciável por $f(z_0)$ e contida em $\overline{D}\big(0;|f(z_0|\big)$ e, sendo assim, seu vetor tangente é ortogonal a $f(z_0)$ (identificando $f(z_0)$ como um vetor). Como f é uma aplicação conforme, isto implica $f'(z_0) = 0$. Porém, z_0 é também ponto de máximo de $|f|$ restrita a $\overline{D}(0;|z_0|)$ e então, pela Proposição Anti-Cálculo obtemos $f'(z_0) \neq 0$. Portanto, a função $|f|$ não assume máximo em $D(0;r)$.

9.4 - Teoremas de Liouville

Comentários.

(1) Como todo polinômio $P = P(z)$, de grau maior ou igual a 1, é tal que $|P(z)| \to +\infty$ se $|z| \to +\infty$, é razoável esperar que uma série de potências que não é uma função constante, também não seja uma função limitada.

(2) Segundo a definição dada por Weierstrass, uma função inteira é dada por uma série de potências convergente em todo o plano complexo. Atualmente, dizemos que uma função inteira é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.

(3) Com o Teorema de Read e Hurwitz mostraremos que para uma função analítica em $\mathbb{C}$, sua série de Taylor na origem converge em todo o plano. Assim sendo, apresentamos a seguir uma prova intuitiva do Teorema de Liouville para séries de potências convergentes em $\mathbb{C}$.

9.13 Teorema (Liouville). *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, limitada. Então, $f \equiv a_0$.*

Prova. É limitada a função $|f(z)-a_0| = |z|\,|a_1+a_2z+a_3z^2+\ldots|$. Donde, se $|z| \to +\infty$, $\varphi(z) = a_1 + a_2z + a_3z^2 + \ldots$ tende a zero e $|\varphi|$ tem máximo global. Pelo Princípio do Módulo Máximo para analíticas, φ é constante. Logo, φ é nula e f é constante ■

A seguir provamos o Teorema de Liouville para uma função analítica em $\mathbb{C}$.

9.14 Teorema de Liouville em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. *Seja f analítica e limitada em $\mathbb{C}$. Então, f é constante.*

Prova. Pelo Princípio dos Zeros Isolados (Proposição 9.4) é fácil perceber que podemos escrever $f(z) - f(0) = z\varphi(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, com $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Desta forma temos,

$$f(z) = f(0) + z\varphi(z)\,, \ \ \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

Dado $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$|z|\,|\varphi(z)| \ \leq \ M \ + \ |f(0)|\,, \forall z \in \mathbb{C}\,,$$

donde, dividindo por $|z| \neq 0$, segue $\lim\limits_{z\to\infty} |\varphi(z)| = 0$. Assim, $|\varphi|$ tem máximo global e pelo Teorema 9.8 φ é constante, com $\lim\limits_{z\to\infty} |\varphi(z)| = 0$. Logo, $\varphi \equiv 0$ e $f \equiv f(0)$ ∎

Comentário. A maior parte dos textos didáticos sobre funções em uma variável complexa prova o TFA a partir do Teorema de Liouville (para funções holomorfas). Como já provamos o TFA no Capítulo 4, sugerimos ao leitor deduzi-lo a partir do Teorema de Liouville para funções analíticas (vide exercícios).

9.15 [Teorema de Liouville Estendido em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$] *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ uma série de potências convergente em $\mathbb{C}$ e admitindo $k \in \mathbb{N}$, $A \geq 0$ e $B \geq 0$ tais que*

$$|f(z)| \ \leq \ A + B|z|^k\,, \ \ \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

Então, f é um polinômio de grau menor ou igual a k.

Prova. Pela desigualdade triangular temos,

$$|a_{k+1}z^{k+1} + \ldots| - |a_0 + \ldots + a_k z^k| \ \leq \ |(a_0 + \ldots + a_k z^k) + (a_{k+1}z^{k+1} + \ldots)| \ = \ |f(z)|\,, \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

É fácil ver que existem $A_1 \geq 0$ e $B_1 \geq 0$ tais que $|a_0 + \ldots + a_k z^k| \leq A_1 + B_1|z|^k$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e por tais desigualdades e a hipótese segue que existem $A_2 \geq 0$ e $B_2 \geq 0$ tais que

$$|z|^{k+1}\,|a_{k+1} + a_{k+2}z + \ldots| \ \leq \ A_2 + B_2|z|^k\,, \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Portanto segue,

$$0 \leq \lim_{|z|\to+\infty} |a_{k+1} + a_{k+2}z + \ldots| \ \leq \ \lim_{|z|\to+\infty} \frac{A + B|z|^k}{|z|^{k+1}} = 0$$

e $\varphi(z) = a_{k+1} + a_{k+2}z + \ldots, z \in \mathbb{C}$, é limitada e pelo Teorema de Liouville φ é constante, com $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \varphi(z) = 0$. Logo, $\varphi \equiv 0$ e f é um polinômio, grau$(f) \leq k$ ∎

9.5 - Teorema da Aplicação Aberta

9.16 Definição. *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aberto, é* aberta *se para todo aberto O contido em Ω, o conjunto $f(O)$, a imagem de O por f, é um aberto em $\mathbb{C}$.*

9.17 Teorema da Aplicação Aberta em $\mathcal{A}(\Omega)$. *Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, com f não constante e Ω conexo. Então, f é uma aplicação aberta.*

Prova (Carathéodory). Seja O um aberto não vazio em Ω e $w \in O$. Mostremos que existe um disco aberto $D(f(w);r)$, $r > 0$, contido em $f(O)$.

Pela PZI em $\mathcal{A}(\Omega)$, w é zero isolado da função não constante $g(z) = f(z) - f(w)$ e existe $\epsilon > 0$ tal que $f(z) - f(w) \neq 0$ se $z \in \partial D(w;\epsilon)$. Portanto,

$$f(w) \notin f\big(\partial D(w;\epsilon)\big) \ .$$

Consideremos,

$$\begin{cases} 2r = \min\limits_{z \in \partial D(w;\epsilon)} |f(z) - f(w)| \ , \\ \text{um ponto arbitrário } \beta \text{ em } D(f(w);r)\,, \\ \text{a função } f(z) - \beta\,,\ z \in \Omega \ . \end{cases}$$

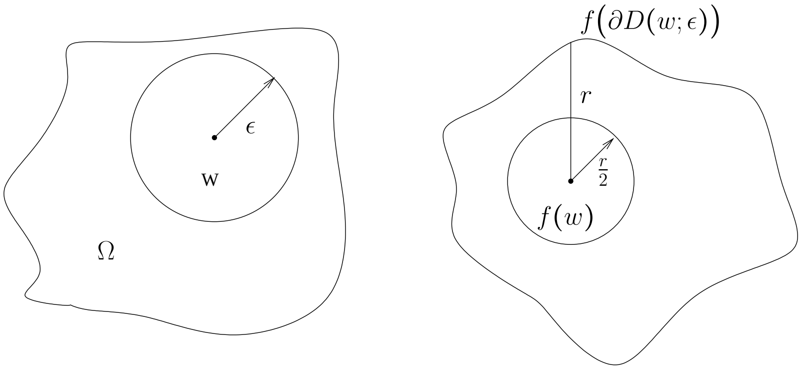

Figura 9.2: Ilustração ao Teorema da Aplicação Aberta

Para o centro w de $D(w;\epsilon)$ temos $|f(w) - \beta| < r$. Porém, para $z \in \partial D(w;\epsilon)$,

$$|f(z) - \beta| \geq |f(z) - f(w)| - |f(w) - \beta| > 2r - r = r \ .$$

Logo, o ponto de mínimo da função $|f(z) - \beta|$ em $\overline{D}(w;\epsilon)$ pertence ao aberto $D(w;\epsilon)$ e como $f(z) - \beta$ não é uma função constante, pelo Princípio do Módulo Mínimo em $\mathcal{A}(\Omega)$ existe $z_0 \in D(w;\epsilon)$ tal que $f(z_0) - \beta = 0$ e portanto $f(z_0) = \beta$ ∎

9.6 - Desigualdade de Gutzmer-Parseval e Desigualdades de Cauchy.

9.18 Teorema (Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências). *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ uma série de potências convergente em $D_R(0)$, $R > 0$. Dado r tal que $0 < r < R$, vale a desigualdade*

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2 , \qquad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| .$$

Prova. Seja z arbitrário, $|z| = r$. Pela desigualdade triangular temos,

$$\Big| \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \Big| \ \leq\ M(r) + \Big| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n z^n \Big| \ \leq\ M(r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n , \quad \forall\ N \in \mathbb{N} .$$

Assim, aplicando a Desigualdade 4.6 (de Gutzmer-Parseval para Polinômios),

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \ \leq\ \Big[M(r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n \Big]^2 , \quad \forall\ N \in \mathbb{N} .$$

Notando que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{N+1}^{+\infty} |a_n| r^n = 0$ e então computando o limite para $N \to +\infty$ em ambos os lados da desigualdade acima, concluímos a demonstração ∎

9.19 Corolário. *Com as hipóteses acima, se $\sup\limits_{D(0;R)} |f| \leq M$ e $0 < r < R$ temos*

$$\max_{\overline{D}(0;r)} |f'| \leq \frac{M}{R-r} .$$

Prova. A série de Taylor de f em torno de z_0 arbitrário em $\overline{D}(0;r)$ é

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n , \text{ se } |z - z_0| < R - r .$$

Donde, pela desigualdade de Gutzmer-Parseval, Teorema 9.18, segue

$$|f'(z_0)| \, |z - z_0| \leq M , \text{ se } |z - z_0| < R - r .$$

Para $|z - z_0|$ arbitrariamente próximo de $R - r$, no limite temos $|f'(z_0)|(R - r) \leq M$ ∎

9.7 - Teoremas de Liouville Revisitados

Com a Desigualdade de Gutzmer-Parseval obtemos novas e triviais provas do Teorema de Liouville e também do Teorema de Liouville Estendido, ambos os resultados considerados para funções inteiras no sentido de Weierstrass.

9.20 Teorema de Liouville em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ uma série de potências convergente em $\mathbb{C}$ e limitada no plano $\mathbb{C}$. Então, f é constante.*

Prova.

Seja M tal que $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Pela Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências temos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |z|^{2n} \leq M^2 \, , \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Então, é claro que $a_n = 0$, $\forall n \geq 1$ e assim, $f(z) = a_0 \, , \forall z \in \mathbb{C}$ ∎

9.21 Teorema de Liouville Estendido em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ uma série de potências convergente em $\mathbb{C}$ e admitindo $k \in \mathbb{N}$, $A \geq 0$ e $B \geq 0$ tais que*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \, , \ \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Então, f é um polinômio de grau menor ou igual a k.

Prova. Vide Exercícios. ∎

9.8 - Teorema da Série Dupla de Weierstrass

9.22 Teorema da Série Dupla de Weierstrass (1841). *Seja $\sum_{\nu \geq 0} f_\nu(z)$ uma série de funções com $f_\nu(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(\nu) z^n$, $\nu \in \mathbb{N}$, uma série de potências com coeficientes $a_n(\nu)$ em $\mathbb{C}$ e convergente em $D(0;R)$, $R > 0$. Suponhamos que a série $\sum f_\nu$ converge uniformemente em $\overline{D}(0;\rho)$, se $0 < \rho \leq R$, à função $F(z)$ definida em $D(0;R)$. Então, para todo $z \in D(0;R)$ e para todo $k \in \mathbb{N}$ temos, com convergência uniforme sobre todo disco fechado $\overline{D}(0;\rho)$, $0 < \rho < R$,*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) z^n \qquad e \qquad F^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu^{(k)}(z) \ .$$

Prova. Fixemos r, $\rho < r < R$. Por hipótese, dado $\epsilon > 0$ existe $\nu_0 \geq 0$ tal que

$$|f_{\nu+1}(z) + ... + f_{\nu+p}(z)| \leq \epsilon\,, \quad \forall \nu \geq \nu_0\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ \forall\ |z| \leq r\ .$$

Pelo Teorema 9.18 e com as condições acima para ν, p e z segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(\nu+1) + ... + a_n(\nu+p)|^2\,|z|^{2n} \leq \epsilon^2\,,$$

e desta forma, para $z \in \overline{D}(0;\rho)$, $\nu \geq \nu_0$ e p e n arbitrários em $\mathbb{N}$, temos,

$$|a_n(\nu+1) + ... + a_n(\nu+p)|\,|z|^n = \sqrt{|a_n(\nu+1) + ... + a_n(\nu+p)|^2\,|r|^{2n}}\ \frac{|z|^n}{r^n} \leq \epsilon\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n .$$

Então, pelo Critério de Cauchy para séries numéricas, para todo $n \in \mathbb{N}$ a série $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)$ é convergente e para $\nu \geq \nu_0$ e $z \in \overline{D}(0;\rho)$ temos, computando o limite na desigualdade acima para $p \to +\infty$ e a seguir o somatório para n de 0 a $+\infty$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big|\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) - \sum_{\mu=0}^{\nu} a_n(\mu)\Big|\,|z|^n \leq \frac{\epsilon}{1-\frac{\rho}{r}}.$$

Logo, para $z \in \overline{D}(0;\rho)$ obtemos $\Big|\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) - \sum_{\mu=0}^{\nu} a_n(\mu)\Big]z^n\Big| \leq \frac{\epsilon r}{r-\rho}$ e

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)\,z^n \ -\ \sum_{\mu=0}^{\nu} f_\nu(z)\right| \leq \frac{\epsilon r}{r-\rho}\ .$$

Tomando ρ arbitrariamente próximo de R segue,

$$F(z) = \sum^{+\infty} f_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)\,z^n\,, \quad \text{se } z \in D(0;R)\,,$$

com a convergência uniforme em $\overline{D}(0;\rho)$, se $0 < \rho < R$.

Finalmente, se $s_\nu = f_1 + ... + f_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, indica as somas parciais de $\sum f_\nu$, a sequência $(s_\nu - F)$ converge uniformemente a zero em $\overline{D}(0;\rho)$, se $0 < \rho < R$, e pelo Corolário 9.19 a sequência $(s'_\nu - F')$ também. Por indução em k segue

$$\sum_{\nu \geq 0} f_\nu^{(k)}(z) = F^{(k)}(z)\,, \quad \text{para arbitrários } k \in \mathbb{N} \text{ e } z \in D(0;R)\,,$$

com convergência uniforme nos discos fechados $\overline{D}(0;\rho)$, $0 < \rho < R$ ∎

9.9 - O Teorema de Hurwitz, Read e Connell-Porcelli: A Expansão em uma Série de Taylor de uma função analítica em $D(0;1)$.

Se uma função é analítica em um disco, não é imediato que ela é dada pela sua série de potências em torno do centro do disco. Entretanto, tal importante resultado foi provado por A. Hurwitz [38], veja também A.H. Read [57].

9.23 Teorema. *Dada* $f \in \mathcal{A}\big(D(0;R)\big)$, $R>0$, $r \in \mathbb{R}$ *e* $0<r<R$, *e* $n \in \mathbb{N}$ *temos,*

(Desigualdades de Cauchy) $$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n}\,, \qquad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|\ .$$

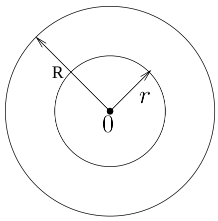

Figura 9.3: Desigualdades de Cauchy

Prova. Podemos supor $f^{(n)}(0) \neq 0$. Seja g analítica em $D(0;R)$ dada por

$$g(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f(z\omega^k)\,, \qquad \omega = e^{i\pi/n}\ .$$

Temos,

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k = 0\,, \\ \\ g^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{jk} f^{(j)}(0) = f^{(j)}(0) \frac{1-\omega^{j2n}}{1+\omega^j} = 0\,, \quad \text{se } 1 \leq j < n \\ \\ g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{nk} f^{(n)}(0) = 2n f^{(n)}(0)\ . \end{cases}$$

Pelo Princípio dos Zeros Isolados existe $\varphi \in \mathcal{A}\big(D(0;R)\big)$ tal que

$$g(z) = z^n \varphi(z)\,, \qquad \varphi(0) = 2n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ ,$$

e pelo Princípio do Módulo Máximo concluímos

$$2n \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|g(z)|}{r^n} \leq \frac{2nM(r)}{r^n} \qquad \blacksquare$$

O teorema abaixo consta em Read (1961) [57], é apresentado em Whyburn (1964) [73], e em Hurwitz (1964) [38].

9.24 Teorema (Read-Hurwitz). *Se* $f \in \mathcal{A}\big(D(0;R)\big)$ *então,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n , \quad \textit{para todo } z \in D(0;R) \ .$$

Prova. Fixando r, $0 < r < R$, e pondo $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, pelo Teorema 9.23 temos

$$|a_n| r^n \leq M(r) , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Se ρ é o raio de convergência de $\sum a_n z^n$, pela Fórmula de Hadamard segue

$$\rho^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r} = r^{-1} \ ,$$

o que implica $\rho \geq r$, para todo $0 < r < R$ e portanto $\rho \geq R$ ∎

9.10 - Teorema da Função Inversa

9.25 Definição. *Seja* $f : U \to V$ *com* U *e* V *abertos.*

- f *é um* isomorfismo analítico *se* f *é analítica e bijetora com inversa* f^{-1} : $V \to U$ *também analítica.*
- f *é um* isomorfismo analítico local *em um ponto* z_0 *se existirem um aberto* U_0 *contendo* z_0 *e um aberto* V_0 *contendo* $f(z_0)$ *tal que* $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ *é um isomorfismo analítico.*

9.26 Proposição. *Seja* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ *e* $z_0 \in \Omega$ *tal* $f'(z_0) \neq 0$. *Existe* $R > 0$ *tal que*

(a) f *é injetora em* $D(z_0;R)$ *contido em* Ω.

(b) $f\big(D(z_0;R)\big) = V$ *é um aberto contendo* $f(z_0)$.

(c) $\varphi = f|_{D(z_0;R)} : D(z_0;R) \to V$ *é inversível e sua inversa é contínua.*

(d) φ^{-1} *é derivável (holomorfa).*

Prova.

Através da aplicação $z \mapsto f(z+z_0) - f(z_0)$ supomos $f(z_0) = 0$ e $z_0 = 0$.

(a) Seja $R > 0$ tal que $|f'(\zeta)| > \frac{|f'(0)|}{2}$ para todo $\zeta \in D(0;2R) \subset \Omega$. Expandindo f em série de Taylor em torno da origem temos, para z e w em $D(0;R)$,

$$f(z) - f(w) = a_1(z-w) + a_2(z^2 - w^2) + \dots + a_n(z^n - w^n) + \dots ,$$

e então, supondo também $z \neq w$, encontramos

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = f'(0) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k .$$

Claramente temos

$$\Big| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k \Big| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n R^{n-1}$$

sendo que a série $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge em $D(0;2R)$ e $\sum_{n\geq 2} n a_n z^{n-1}$ se anula em $z = 0$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < R < \delta$ então

$$\sum_{n\geq 2} n |a_n| R^{n-1} < \frac{|f'(0)|}{2} .$$

Assim, se $0 < R < \delta$ e também $D(0;2R) \subset \Omega$, dados z e w em $D(0;R)$ segue

$$\Big| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \Big| > \frac{|f'(0)|}{2} > 0 \quad \Rightarrow f(z) \neq f(w).$$

(b) Segue do Teorema da Aplicação Aberta, notando que $D(0;R)$ é conexo.

(c) Como φ é bijetora e aberta, se O é aberto $\left(\varphi^{-1}\right)^{-1}(O) = \varphi(O)$ também. Logo, φ^{-1} é contínua.

(d) Nos quocientes de Newton $\frac{\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w_0)}{w - w_0}$ trocamos $\varphi^{-1}(w) = z$, $\varphi^{-1}(w_0) = z_0$, $w = f(z)$ e $w_0 = f(z_0)$. Como φ^{-1} é contínua segue que $z \to z_0$ se $w \to w_0$ e

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)} \quad \blacksquare$$

9.27 Teorema (Representação Local). *Seja f analítica em um ponto z_0,*

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=m}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n\,,\ \ m \geq 1 \text{ fixo e } a_m \neq 0\ .$$

Então, existe φ analítica bijetora na origem com inversa derivável tal que

$$f(z) = a_0 + \varphi(z - z_0)^m\ .$$

Prova.

Escrevamos $f(z) - a_0 = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + ...$ na forma

$$f(z) - a_0 = a_m(z - z_0)^m[1 + g(z - z_0)], \quad g(0) = 0\,.$$

Seja $a \in \mathbb{C}$ uma raíz m-ésima de a_m ($a^m = a_m$). Ainda, utilizando a série binomial complexa (Vide Exercício) e o Teorema 7.31 (Composição) consideremos a série de potências convergente $G(z)$ satisfazendo, se $|z|$ é suficientemente pequeno,

$$\big(1 + g(z)\big)^{\frac{1}{m}} = 1 + G(z), \quad G(0) = 0\,,$$

e portanto $1 + g(z) = \big(1 + G(z)\big)^m$. Temos então,

$$f(z) - a_0 = a^m(z - z_0)^m\big(1 + G(z - z_0)\big)^m = \big[a(z - z_0)\big(1 + G(z - z_0)\big)\big]^m$$

donde segue

$$f(z) = a_0 + \varphi(z - z_0)^m\,, \quad \varphi(w) = aw\big(1 + G(w)\big).$$

Por fim, o primeiro coeficiente da série de Taylor para φ na origem é $a \neq 0$ e então pela Proposição 9.26 a aplicação φ tem as propriedades desejadas ■

9.28 Definição. *Dada uma série de potências $\sum a_n z^n$ não nula, o menor natural m tal que $a_m \neq 0$ é a* ordem de *f.*

9.11 - Lema de Schwarz

9.29 Lema de Schwarz. *Seja f analítica em $D(0;1)$ e satisfazendo*

$$|f(z)| \leq 1\,, \quad \forall z \in D(0;1)\,, \ \textit{and} \ \ f(0) = 0\ .$$

Então temos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Big|^2 \leq 1 \quad (e,\, |f'(0)| \leq 1\,) \qquad e \qquad |f(z)| \leq |z|\,,\ \forall z\ \in D(0;1).$$

Ainda, temos $|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}| = 1$, para algum $n \geq 1$, se e só se existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f(z) = \omega z^n\,,\ \forall z \in D(0;1)\ .$$

Ainda mais, temos $|f(z)| = |z|$, para algum $z \neq 0$, se e só se existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f(z) = \omega z\,,\ \forall z \in D(0;1)\ .$$

Prova.

Como $f(0) = 0$, pelo Teorema 9.24 (de Read, Connell-Porcelli e Hurwitz) podemos escrever $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$, com $|z| < 1$ e $a_n = f^{(n)}(0)\big/n!$, para todo $n \geq 1$. Então, como $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in D(0;1)$, pela Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências segue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 1\,,\ \forall r \text{ in } [0,1)\,,$$

e computando o limite de tal desigualdade para $r \to 1^-$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \leq 1\ .$$

Assim, se $|a_n| = 1$ para um particular $n \geq 1$, obtemos $f(z) = a_n z^n$, $\forall z \in D(0;1)$.

Agora, consideremos ζ arbitrário na circunferência $\{z : |z| = r\}$, onde r é fixo e $0 < r < 1$. Claramente temos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^{n-1}| = r^{-1}|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^n| \leq r^{-1}$. Então, aplicando o Princípio do Modulo Máximo para funções analíticas obtemos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}| \leq 1/r$, $\forall z \in \overline{D}(0;r)$. Consequentemente, como $0 < r < 1$ é arbitrario, encontramos a desigualdade

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}\Big| \leq 1\,,\ \forall z \in D(0;1)\ .$$

Desta forma, obtemos $|f(z)| = |z\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}| \le |z|$ para todo $z \in D(0;1)$.

Se $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^n| = |\zeta|$, para algum $0 < |\zeta| < 1$, temos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^{n-1}| = 1$. No parágrafo acima provamos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}| \le 1$, $\forall z$ em $D(0;1)$. Portanto, aplicando o Princípio do Módulo Máximo concluímos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} = a_1 \in S^1\ , \text{ para todo } z \in D(0;1)\ .$$

Assim temos $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n = a_1 z$, para todo $z \in D(0;1)$ ∎

9.12 - Convergência no Espaço das Funções Analíticas

Para estendermos as desigualdades de Cauchy, introduzimos algumas definições. Abaixo, X é um subconjunto não vazio arbitrário do plano complexo, K e L indicam compactos não vazios em $\mathbb{C}$ enquanto V indica um aberto em $\mathbb{C}$.

9.30 Definição. *Dado K um compacto em X e $f : X \to \mathbb{C}$ contínua, pomos*

$$|f|_K = \sup_{z\in K} |f(z)| = \max_{z\in K} |f(z)|\ .$$

O número $|f|_K$ é chamado de norma (do sup) de f sobre K.

Dada uma sequência (f_n) em $C(X;\mathbb{C})$, K um compacto em X e $f \in C(X;\mathbb{C})$, é claro que (f_n) converge uniformemente a f sobre K se e só se $\lim_{n\to+\infty} |f_n - f|_K = 0$.

9.31 Definição. *Uma sequência, ou série, de funções definidas em X e a valores complexos* converge compactamente *em X se converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de X.*

9.32 Definição. *Dado $X \subset \mathbb{C}$, L é uma* vizinhança compacta *de X se*

- *L é compacto.*
- *Existe um aberto V tal que $X \subset V \subset L$.*

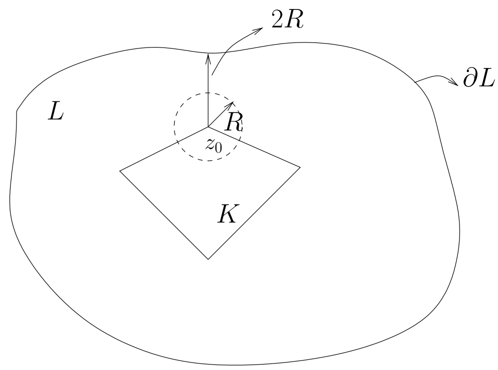

Figura 9.4: Ilustração à Proposição 9.33

9.33 Estimativas de Cauchy para as derivadas sobre compactos. *Seja* Ω *um aberto,* K *um compacto contido em* Ω *e* L *uma vizinhança compacta de* K *contida em* Ω*. Dado* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $M_n \geq 0$ *(*M_n *dependendo de* Ω*,* K *e* L*) tal que*

$$|f^{(n)}|_K \leq M_n |f|_L \,, \quad \forall f \in \mathcal{A}(\Omega)\,.$$

Prova. Como todo ponto em K é o centro de um disco aberto contido em L, temos $2R = d(K;\partial L) > 0$. Assim, para todo $z_0 \in K$ ocorre $\overline{D}(z_0;R) \subset L$.

Pelas Desigualdades de Cauchy (Teorema 9.23) segue

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leq \frac{\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)|}{R^n} \,,$$

e consequentemente obtemos, para todo $z_0 \in K$,

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \;\leq\; \frac{n!}{R^n}\,|f|_L \quad \blacksquare$$

Como consequência do Teorema para séries duplas enunciamos,

9.34 Corolário. *Seja* (f_n) *uma sequência em* $\mathcal{A}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*,* Ω *limitado e conexo, tal que a sequência* $(f_n|_{\partial\Omega})$ *converge uniformemente sobre* $\partial\Omega$*. Então,*

(a) Para todo $k \in \mathbb{N}$*,* $(f_n^{(k)})$ *converge compactamente em* Ω*.*

(b) Se $f = \lim f_n$ *então,* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$*.*

(c) $(f_n^{(k)})$ *converge compactamente a* $f^{(k)}$*, sobre* Ω*, para todo natural* k*.*

Prova.

(a) Dado um disco fechado (compacto) $\overline{D}(z_0;r)$ em Ω, seja L uma vizinhança compacta deste disco contida em Ω. Pelas Estimativas de Cauchy (9.33) e pelo Princípio do Módulo Máximo temos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$|f_m^{(k)} - f_n^{(k)}|_{\overline{D}(z_0;R)} \le M_k |f_m - f_n|_L \le M_k |f_m - f_n|_{\partial\Omega}\,, \quad \forall m\,, n \in \mathbb{N}\ .$$

Logo, para cada natural k a sequência $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre o disco $\overline{D}(z_0;r)$ e portanto $(f_n^{(k)})$ converge compactamente em Ω.

(b) Seja $\overline{D}(z_0;R) \subset \Omega$, $R > 0$. Pelo Teorema 9.24 (Hurwitz), em $D(z_0;R)$ cada f_n é dada por sua série de Taylor em z_0. A n-ésima soma parcial da série

$$f_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(f_{n+1} - f_n)\ ,$$

é $s_n = f_1 + (f_2 - f_1) + \ldots + (f_{n+1} - f_n) = f_{n+1}$ e, devido às hipóteses, a sequência (s_n) e portanto a série $f_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(f_{n+1} - f_n)$ convergem uniformemente a f sobre $\overline{D}(z_0;R)$. Pelo Teorema 9.22 (Weierstrass) segue que $f \in \mathcal{A}\big(D(z_0;R)\big)$ e $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ compactamente sobre $D(z_0;R)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Por fim, como $\overline{D}(z_0;R)$ é arbitrário, por um simples argumento sobre compacidade segue que $(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$, sobre Ω, para todo natural k ∎

9.12 - Teorema de Montel

Em análise um princípio importante é que toda sequência limitada contém uma subsequência convergente e portanto toda sequência em um subconjunto compacto K do plano tem subsequência convergente a um ponto em K. O Teorema de Montel estende este princípio para certos conjuntos de funções.

9.35 Notação. *No que segue indicamos $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} :\ f$ é contínua$\}$.*

9.36 Definição. *Uma família $\mathcal{F}$ de funções em $C(\Omega)$ é* normal[1] *(ou,* relativamente compacta*) se toda sequência em $\mathcal{F}$ contém uma subsequência convergindo compactamente a alguma função f [claramente, $f \in C(\Omega)$].*

[1]Conceito introduzido por P. Montel em 1912.

Na definição acima não exigimos que o limite da subsequência pertença a $\mathcal{F}$.

9.37 Definição. *Uma família $\mathcal{F}$ contida em $C(\Omega)$ é*

- localmente limitada *se para todo $z_0 \in \Omega$ existe um disco aberto $D(z_0; R)$ e um $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z \in D(z_0; R)$.*

- equicontínua sobre $X \subset \Omega$ *se para todo $\epsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que*

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon, \ \forall \ f \in \mathcal{F}, \ e \ \forall z \ e \ \forall w, \ \textit{ambos em } X \textit{ tais que } |z - w| < \delta \ .$$

É trivial verificar que se $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ é localmente limitada e K é um compacto em Ω então existe $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z \in K$. Dizemos então que $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada sobre os compactos de Ω.

9.38 Lema. *Seja $\mathcal{C} = \{D(a_n; r_m) : a_n \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ e \ r_m \in \mathbb{Q}, r_m > 0, com \ n \ e \ m \ \in \mathbb{N}\}$. Então, todo aberto em $\mathbb{R}^2$ é reunião (enumerável) de conjuntos na coleção $\mathcal{C}$. Isto é, $\mathcal{C}$ é uma base (enumerável) de abertos de $\mathbb{R}^2$.*

Prova. Seja Ω um aberto arbitrário em $\mathbb{R}^2$ e um disco aberto $D(z; 2r) \subset \Omega$, com r racional e $r > 0$. É claro que existe $w \in D(z; r) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ e é fácil ver que $z \in D(w; r) \subset D(z; 2r) \subset \Omega$. Logo, temos $D(w; r) \in \mathcal{C}$. Desta forma, existem uma sequência $(a_{n_k}) \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e uma sequência $(r_{m_k}) \subset \mathbb{Q}^+$ tais que $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D(a_{n_k}; r_{m_k})$ ∎

9.39 Teorema de Montel. *Seja $\mathcal{F}$ uma família em $\mathcal{A}(\Omega)$ localmente limitada. Então,*

(a) $\mathcal{F}$ é equicontínua sobre cada subconjunto compacto de Ω.

(b) $\mathcal{F}$ é normal (ou, relativamente compacta).

Prova.

(a) Seja K compacto em Ω e $4r = d(K; \partial\Omega) > 0$. Como $\mathcal{F}$ é localmente limitada, $\mathcal{F}$ é também limitada sobre o compacto $K(3r) = \{z : d(z; K) \leq 3r\} \subset \Omega$. Seja $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo z em $K(3r)$.

Dados z_0 e $z_0 + h$ em K, com $|h| < r$, a série de Taylor de uma função $f \in \mathcal{F}$ em torno do ponto z_0, $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$, converge no disco $D(z_0; 4r)$ e

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| \ = \ |\sum_{n\geq 1} a_n h^n| \ \leq \ |h| \sum |a_n|\,|h|^{n-1} \ \leq \ |h| \sum n|a_n||h|^{n-1} \ .$$

Como $f'(z_0+h) = \sum n a_n h^{n-1}$, pela desigualdade de Cauchy e por 6.17 temos

$$n|a_n|\,(2r)^{n-1} \leq \max_{\overline{D}(z_0;2r)} |f'| \leq \frac{M}{3r - 2r} = \frac{M}{r} \ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$

Desta forma segue, observando que $\frac{|h|}{2r} \leq \frac{1}{2}$,

$$|f(z_0{+}h){-}f(z_0)| \ \leq \ |h| \sum n|a_n|(2r)^{n-1} \left(\frac{|h|}{2r}\right)^{n-1} \leq |h| \frac{M}{r} \sum (\frac{|h|}{2r})^{n-1} \leq |h| \frac{2M}{r} \ .$$

(b) Seja $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária em $\mathcal{F}$. Dado a arbitrário em Ω consideremos um raio $r = r(a) > 0$ e uma constante $M \geq 0$ tais que $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$ e

$$|f_\nu(z)| \leq M \ , \ \forall \nu \in \mathbb{N} \ , \ \forall z \in \overline{D}(a;r) \ .$$

Indicando $c_n[f_\nu] = \frac{f_\nu^{(n)}(a)}{n!}$, pela desigualdade de Cauchy temos

$$|\,c_n[f_\nu]\,| \ \leq \ \frac{M}{r^n} \ , \ \forall \nu \in \mathbb{N} \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

A seguir, aplicamos duas vezes o método da **diagonalização de Cantor**.

Como a sequência $(c_0[f_\nu])_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada, existe uma subsequência $\{f_{11}, f_{12}, f_{13}, ...,\}$ de $\mathcal{F}$ tal que a sequência numérica $\big(c_0[f_{1k}]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a C_0 se $k \to +\infty$.

Por indução temos uma subsequência $\{f_{\nu+1,1}, f_{\nu+1,2}, f_{\nu+1,3}, ...\}$ de $\{f_{\nu 1}, ..., f_{\nu k}, ...\}$ tal que a sequência numérica $\big(c_\nu[f_{\nu+1\,k}]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a C_ν se $k \to +\infty$.

$$\begin{array}{ccccl}
\mathbf{f_{11}} & f_{12} & f_{13} & \ldots & c_0[f_{1k}] \to C_0 \in \mathbb{C} \\
f_{21} & \mathbf{f_{22}} & f_{23} & \ldots & c_1[f_{2k}] \to C_1 \in \mathbb{C} \\
f_{31} & f_{32} & \mathbf{f_{33}} & \ldots & c_2[f_{3k}] \to C_2 \in \mathbb{C} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

Seja $g_n = f_{nn}$ a n-ésima função selecionada na n-ésima etapa de construção. É claro que $\{g_n\}$ é uma subsequência de $\mathcal{F}$ e para todo $N \in \mathbb{N}$ e $z \in \overline{D}(a; r/2)$ temos

$$|g_k(z) - g_l(z)| \ \leq \ \sum_{n\leq N} |c_n(g_k) - c_n(g_l)|\,|z - a|^n \ + \ \sum_{n>N} \frac{2M}{r^n} |z - a|^n.$$

Seja $\epsilon > 0$. A segunda parcela no segundo membro da desigualdade imediatamente acima é majorada por $\sum_{n>N} 2M\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{M}{2^{N-1}} < \epsilon/2$ se $N \geq N_0$, com N_0 grande o suficiente. Fixando $N = N_0$ o somatório finito no segundo membro da citada desigualdade é majorado por

$$\sum_{n \leq N_0} |c_n(g_k) - c_n(g_l)| \, (\frac{r}{2})^n < \epsilon/2\,, \text{ se } k, l \geq k_0,$$

com k_0 grande o suficiente, pois $c_n[g_k] \to 0$ se $k \to +\infty$, para todo n. Assim, a sequência de funções $(g_n) = (f_{nn})$ converge uniformemente no disco compacto $\overline{D}(a; r/2)$.

Pelo Lema 9.38 existe uma sequência (a_ν) de pontos em Ω tal que

$$\Omega = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} D\left(a_\nu; \frac{r_\nu}{2}\right), \quad r_\nu = r(a_\nu).$$

Então, escolhemos uma subsequência $(g_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ de (g_n) que converge em $\overline{D}(a_1; r_1/2)$. Desta forma determinamos por indução uma subsequência $(g_{\nu,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(g_{\nu-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em $\overline{D}(a_\nu; r_\nu/2)$ [vide diagrama abaixo].

$$\begin{array}{ccccl}
\mathbf{g_{11}} & g_{12} & g_{13} & \cdots & (g_{1k}) \text{ converge em } \overline{D}(a_1; r_1/2) \\
g_{21} & \mathbf{g_{22}} & g_{23} & \cdots & (g_{2k}) \text{ converge em } \overline{D}(a_2; r_2/2) \\
g_{31} & g_{32} & \mathbf{g_{33}} & \cdots & (g_{3k}) \text{ converge em } \overline{D}(a_3; r_3/2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

É claro que a sequência de funções $h_n = g_{nn}$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente sobre cada um dos discos $\overline{D}(a_\nu; r_\nu/2)$.

Por fim, se K é compacto existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset D(a_1; r_1/2) \cup \ldots \cup D(a_p; r_p/2)$$

e (h_n) converge uniformemente em

$$\overline{D}(a_1; r_1/2) \cup \ldots \cup \overline{D}(a_p; r_p/2) \supset K \quad \blacksquare$$

9.40 Critério (de Montel). *Seja* $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ *uma sequência localmente limitada em* Ω*. Se toda subsequência de* $\{f_\nu\}$ *que converge compactamente em* Ω*, converge para* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ *então* $\{f_\nu\}$ *converge compactamente a* f *em* Ω*.*

Prova.

Por contradição. Suponhamos existir K compacto em Ω tal que

$$|f_n - f|_K \nrightarrow 0\,,\ \text{se } n \to +\infty\ .$$

Então, existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (f_{n_j}) de (f_n) tal que

$$|f_{n_j} - f|_K \geq \epsilon\,,\ \text{para todo } j \in \mathbb{N}\ .$$

Como (f_{n_j}) é também localmente limitada, pelo Teorema de Montel existe uma subsequência (φ_{n_j}) de (f_{n_j}) que converge compactamente em Ω a uma função φ. Devido às hipóteses temos $\varphi = f$, com $|\varphi_{n_j} - f|_K \geq \epsilon\,, \forall j$ ↯

9.41 Teorema (Vitali). *Seja* Ω *conexo,* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ *localmente limitada e*

$$A = \ \{\omega \in \Omega :\ \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) \in \mathbb{C}\}\ .$$

SeA tem ponto de acumulação em Ω *então* $\{f_n\}$ *converge compactamente em* Ω*.*

Prova.

Pelo Critério de Montel basta mostrar que o limite das subsequências compactamente convergentes é único. Sejam $\{f_{n_j}\}$ e $\{f_{n_k}\}$ duas tais subsequências convergindo às funções φ e ψ, respectivamente. Pelo Corolário 9.40, as funções φ e ψ são analíticas. Temos ainda, $\varphi = \psi$ em A, sendo A um conjunto com ponto de acumulação em Ω, com Ω conexo. Consequentemente, pelo Princípio de Identidade para funções analíticas segue $\varphi = \psi$ ■

9.13 - Séries de Laurent

9.42 Teorema. *Suponhamos* $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j z^j$, $r_1 < |z| < r_2$. *Consideremos* r *tal que* $r_1 < r < r_2$. *Então,*

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 \, r^{2j} \;\leq\; M(r)^2 \,, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \;.$$

Prova. Devido à convergência uniforme da série de Laurent sobre o compacto $\{z : |z| = r\}$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ e $m \geq N$ então,

$$\left| \sum_{j=-m}^{n} a_j z^j \right| \leq M(r) + \epsilon \,, \ \text{se } |z| = r \,,$$

e assim, se $|z| = r$ obtemos

$$\left| \sum_{j=-m}^{n} a_j z^{m+j} \right| = |z|^m \left| \sum_{j=-m}^{n} a_j z^j \right| \leq r^m \big(M(r) + \epsilon \big) \,, \ \text{se } |z| = r \,.$$

Então, pela desigualdade de Cauchy para polinômios 6.15,

$$\sum_{j=-m}^{n} |a_j|^2 r^{2m+2j} \leq r^{2m} \big(M(r) + \epsilon \big)^2 \,,$$

donde cancelando r^{2m} segue

$$\sum_{j=-m}^{n} |a_j|^2 r^{2j} \leq \big(M(r) + \epsilon \big)^2 \,, \forall n \geq N \,, \ \forall m \geq N \,,$$

tomando o limite da desigualdade acima para $n \to +\infty$ e para $m \to +\infty$ segue

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j|^2 r^{2j} \leq \big(M(r) + \epsilon \big)^2 \,.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, é claro que concluímos a tese ∎

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 9

1. Reescreva, com suas próprias palavras, a demonstração do Teorema da Aplicação Aberta (TAA) para Polinômios dada no Capítulo 4.

2. Mostre que o TAA para polinômios implica o Princípio do Módulo Mínimo para polinômios

3. Mostre que o TAA para polinômios implica o TFA.

4. Mostre que o TAA para polinômios implica o Princípio do Módulo Máximo para polinômios

5. Mostre que a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para polinômios implica o Princípio do Módulo Máximo paa polinômios.

6. Demonstre o TFA a partir de Teorema de Liouville para funções analíticas.

7. Adapte a demonstração do TAA para polinômios para produzir uma demonstração do TAA para funções analíticas.

8. Demonstre o Teorema de Liouville Estendido em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, utilizando a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências.

9. Prove o seguinte resultado sobre a Série Binomial Complexa:

   Seja $p \in \mathbb{N}^*$. Então, é convergente a série

   $$B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/p}{n} (1+z)^n \,, \text{ se } z \in D(0;1) \ .$$

   Ainda mais, é válida a identidade

   $$B(z)^p = 1 + z \,, \quad \text{para todo } z \in D(0;1) \ .$$