Números Complexos

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS TEOREMAS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES/CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Capítulo 6

SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES E SOMAS NÃO ORDENADAS

6.1 - Introdução

O conceito de convergência de uma série já havia sido utilizado algumas vezes por Euler (no século XVIII também foi utilizado, entre outros, o de que o termo geral tende a zero) e muitos matemáticos haviam operado livremente com séries divergentes e Euler tentara formalizar o estudo destas séries . Com Cauchy e sua insistência em que as séries divergentes não possuem soma, e o sucesso de *Cours d'Analyse* (1821), a definição atual se estabeleceu.

Em 1833, Cauchy notou que uma série de termos reais não todos positivos poderia ter uma sub-série divergente e Dirichlet (1837) apresentou os rearranjos da série harmônica alternada: $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ e $\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$ e provou a comutatividade para séries absolutamente convergentes.

Em 1854, Riemann escreveu (em seu *Habilitationsschrift*) que "já em 1829, Dirichlet sabia que as séries infinitas caem em duas classes essencialmente diferentes, conforme permanecem convergentes ou não após seus termos terem sido feitos positivos. Em séries do primeiro tipo os termos podem ser arbitrariamente permutados; em constraste, o valor de uma série do segundo tipo depende da ordem de seus termos" e prova seu teorema do rearranjo: *Uma série convergente (de termos reais) que não é absolutamente convergente pode convergir a um arbitrário dado valor real C após uma apropriada reordenação de seus termos.*

Com o conceito de somabilidade, para efetuarmos a soma não ordenada de uma família $(a_j)_{j\in J} \subset \mathbb{K}$, J um conjunto enumerável arbitrário de índices, diferentemente do conceito de séries desprezamos a ordem dos termos e veremos que somabilidade e convergência absoluta são conceitos equivalentes. Porém, a somabilidade permite um melhor entendimento da convergência absoluta e generalizar a propriedade associativa para séries, apresentada no Apêndice 6-A.

6.2 - Séries Absolutamente Convergentes e Comutatividade

Recordemos que $\sum^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente se $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty$.

6.1 Definição. *A série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é* comutativamente convergente *se todo* rearranjo *(*reordenação*) seu,* $\sum^{+\infty} a_{\sigma(n)}$, *com* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijetora, converge (a um mesmo número). Dizemos então que todo rearranjo tem mesma soma (finita).*

6.2 Exemplo. *(Dirichlet, 1837) A série harmônica alternada* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *não é comutativamente convergente.*

Verificação. Já vimos, no Exemplo 5.14, que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2 = s$. Então,

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \ldots ,$$

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots,$$

e é facil ver vale a identidade

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \ldots ,$$

pois uma soma parcial de ordem $2n$ (par) da terceira e última série acima é igual à soma parcial de ordem n da segunda série acima e, uma soma parcial de ordem $2n+1$ (ímpar) da terceira série acima é igual a sua respectiva soma parcial de ordem $2n$. Somando a primeira série com a terceira série, ambas acima, obtemos

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots ,$$

que é um rearranjo da série inicial mas com valor diferente. ∎

Um exemplo como acima, em $\mathbb{R}$, só poderia ocorrer com uma série alternada pois, felizmente e como é esperado e mostramos abaixo, todos os rearranjos de uma série de termos positivos tem um mesmo limite em $[0,+\infty]$. Se este limite é $+\infty$ dizemos que a série diverge comutativamente a $+\infty$.

Recordemos que uma série $\sum^{+\infty} z_n$ converge condicionalmente se $\sum^{+\infty} z_n < \infty$ e, ainda, $\sum^{+\infty} |z_n| = +\infty$. Se z é o número tal que $z = \sum^{+\infty} z_n$ então z é a soma da série.

6.3 Observação. *Para uma série* $\sum^{+\infty} p_n$ *de termos positivos (isto é,* $p_n \geq 0$*), convergente ou não, e com sequência de somas parciais* (s_n)*, é fácil ver que*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum^{+\infty} p_n \in [0,+\infty]\ .$$

6.4 Teorema (Convergência e Comutatividade). *Seja* $\sum^{+\infty} p_n$ *uma série de termos positivos (convergente ou não) e* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *uma bijeção arbitrária. Então,*

$$\sum^{+\infty} p_n \ = \ \sum^{+\infty} p_{\sigma(n)}.$$

Prova. Computando o limite para $n \to +\infty$ da trivial desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ \leq \ \sum_{n=1}^{+\infty} p_{\sigma(n)}\,, \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

segue que $\sum^{+\infty} p_n \leq \sum^{+\infty} p_{\sigma(n)}$. Vice-versa, também temos $\sum^{+\infty} p_{\sigma(n)} \leq \sum^{+\infty} p_n$ ∎

6.5 Definição. *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série em* $\mathbb{R}$*. A* parte positiva *de* a_n*, indicada* p_n *, e a* parte negativa *de* a_n*, indicada* q_n*, são dadas por*

$$p_n \ = \ \begin{cases} a_n\,, & se\ a_n \ \geq\ 0 \\ 0\,, & se\ a_n \ \leq\ 0 \end{cases} \qquad\qquad q_n \ = \ \begin{cases} 0\,, & se\ a_n \ \geq\ 0 \\ -a_n\,, & se\ a_n \ \leq\ 0\ . \end{cases}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ *temos,*

$$(6.5.1) \qquad \begin{cases} 0 \leq p_n \leq |a_n| \\ 0 \leq q_n \leq |a_n| \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a_n = p_n - q_n \\ |a_n| = p_n + q_n \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2} \\ q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2} \end{cases} .$$

Mantendo a notação na Definição 6.5 investigamos abaixo as convergências absoluta, comutativa e condicional de uma série de termo geral $a_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, analisando as séries determinadas pelas sequências (p_n) e (q_n).

6.6 Teorema. *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série arbitrária de números reais. Então,*

(a) $\sum^{+\infty} |a_n| = \sum^{+\infty} p_n + \sum^{+\infty} q_n$.

(b) [1]*Se a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *converge absolutamente então ela é comutativamente convergente, as séries geradas pelas sequências* (p_n) *e* (q_n) *convergem e,*

$$\sum^{+\infty} a_n = \sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n.$$

(c) Se a série $\sum^{+\infty} a_n$ *converge condicionalmente então* $\sum^{+\infty} p_n = \sum^{+\infty} q_n = +\infty$.

(d) [2] *Se* $\sum^{+\infty} a_n$ *converge condicionalmente, existe rearranjo divergente de* $\sum^{+\infty} a_n$.

Prova. Utilizemos as relações em 6.5.1.

(a) Pela Observação 6.3 segue,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} |a_n| = \lim_{m \to +\infty} \left[\sum_{n=1}^{m} p_n + \sum_{n=1}^{m} q_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} |p_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |q_n| .$$

(b) Como $0 \leq p_n \leq |a_n|$ e $0 \leq q_n \leq |a_n|$, as séries $\sum^{+\infty} p_n$ e $\sum^{+\infty} q_n$ são convergentes e pelo Teorema 6.4 comutativamente convergentes. Logo, é claro que a diferença $\sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n = \sum^{+\infty} a_n$ é também uma série comutativamente convergente. De fato, supondo que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é bijetora temos,

$$\sum^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum^{+\infty} p_{\sigma(n)} - \sum^{+\infty} q_{\sigma(n)} = \sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n = \sum^{+\infty} a_n .$$

(c) Como $\sum^{+\infty} a_n$ converge, de $a_n = p_n - q_n$ concluímos que $\sum^{+\infty} p_n$ converge $\Leftrightarrow \sum^{+\infty} q_n$ converge. Porém, de $\sum^{+\infty} |a_n| = +\infty$ vemos por (a) que ao menos uma entre as séries $\sum^{+\infty} p_n$ e $\sum^{+\infty} q_n$ diverge. Logo, estas duas últimas séries divergem.

(d) Por (c) temos $\sum^{+\infty} p_n = \sum^{+\infty} q_n = +\infty$ e reordenamos a série da seguinte forma: na etapa 1, coletamos os primeiros termos, $a_n \geq 0$, com soma > 1; na etapa 2, os primeiros termos negativos cuja soma com os anteriores é < 0, na etapa 3, subtraidos de $\mathbb{N}$ os já escolhidos, coletamos os próximos termos positivos cuja soma com os anteriores é > 1. Por indução, o rearranjo obtido é tal que a sequência (t_n) de suas somas parciais, admite subsequência (t_{n_k}) com $t_{n_k} > 1, \forall k$, e uma outra de termos negativos e portanto, (t_n) diverge ∎

[1] Teorema de Dirichlet, 1837.

[2] A argumentação na prova deste resultado provém da famosa prova do Teorema de Riemann.

6.7 Corolário. *Para uma série* $\sum^{+\infty} a_n$ *em* $\mathbb{R}$*, arbitrária, são equivalentes:*

(a) A série e todos os seus rearranjos são convergentes.

(b) A série é absolutamente convergente.

(c) As séries $\sum^{+\infty} p_n$ *e* $\sum^{+\infty} q_n$ *são convergentes.*

(d) A série é comutativamente convergente.

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) Pelo Teorema 6.6 (d), a série $\sum^{+\infty} a_n$, convergente por hipótese, não é condicionalmente convergente e consequentemente segue $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty$.

(b) $\Leftrightarrow$(c) Segue do Teorema 6.6 (a).

(b) $\Rightarrow$(d) Segue do Teorema 6.6 (b).

(d) $\Rightarrow$(a) Óbvio ∎

6.8 Observação. *Dada uma série* $\sum^{+\infty} z_n$ *em* $\mathbb{C}$ *é claro que (verifique),*

- *A série complexa* $\sum^{+\infty} z_n$ *é comutativamente convergente se e somente se as séries reais* $\sum^{+\infty} Re(z_n)$ *e* $\sum^{+\infty} Im(z_n)$ *são comutativamente convergentes.*
- *Valem as desigualdades, para todo natural* n*,*

  (6.8.1) $\quad 0 \le |Re(z_n)| \le |z_n| \quad , \quad 0 \le |Im(z_n)| \le |z_n| \quad e \quad |z_n| \le |Re(z_n)| + |Im(z_n)|$.

Com tais observações obtemos o resultado abaixo para séries complexas.

6.9 Corolário. *Seja* $\sum^{+\infty} z_n$ *uma série complexa. São equivalentes :*

(a) A série $\sum^{+\infty} z_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) As séries $\sum^{+\infty} Re(z_n)$ *e* $\sum^{+\infty} Im(z_n)$ *são absolutamente convergentes.*

(c) A série $\sum^{+\infty} z_n$ *é comutativamente convergente.*

Prova. Segue das observações acima e do Corolário 6.7 ∎

6.3 - Somas Não Ordenadas e Comutatividade

Abaixo mostramos uma forma de estimarmos o valor de uma série de termos positivos que independe da ordem de seus termos, o que será útil para definirmos somas de famílias enumeráveis e, em particular, somas de sequências.

6.10 Teorema. *Seja* $\sum^{+\infty} p_n$ *uma série de termos positivos arbitrária. Temos,*

$$\sum^{+\infty} p_n \ = \ \rho\,, \quad com\ \rho = sup\left\{ \sum_{n\in F} p_n : F\subset\mathbb{N}\ e\ F\ finito \right\} \ \in \ [0,+\infty]\ .$$

Prova.

Consideremos (s_m) a sequência (crescente) das somas parciais da série dada e $F\subset\mathbb{N}$, F finito e arbitrário. Pelas desigualdades,

$$\sum_{m\in F} p_m \le s_{\max(F)} \le \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ \text{ e } \qquad s_m = \sum_{k\in\{1,\ldots,m\}} p_k \le \rho\,,$$

é óbvio que $\rho = \sup\{\sum_{m\in F} p_m : F\subset\mathbb{N}$ e F finito$\} \le \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ = \ \lim_{m\to+\infty} s_m \le \rho$ ∎

O teorema acima sugere o estudo de somas não ordenadas e para tal introduzimos o conceito de família somável. Somas não ordenadas ocorrem naturalmente em Teoria da Probabilidade e em Análise Funcional. O tratamento geral de uma soma de elementos x_i, com $i\in I$, I um conjunto de índices, supõe I um conjunto de índices totalmente arbitrário (vide Beardon [11]). Ao longo deste texto o conjunto no qual uma soma é indexada é sempre um conjunto enumerável.

6.11 Definição. *Seja I um conjunto de índices enumerável e $\mathbb{K}$ fixo.*

- Uma família *em $\mathbb{K}$, indexada em I, é uma função $x : I\to\mathbb{K}$, que notamos $(x_i)_I$, onde $x_i = x(i)$ é o i-termo da família, para todo $i\in I$.*
- *Dadas duas famílias $(x_i)_I$ e $(y_i)_I$ e λ um escalar em $\mathbb{K}$, definimos a* adição $(x_i)_I + (y_i)_I = (x_i+y_i)_I$ *e a* multiplicação por um escalar $\lambda(x_i)_I = (\lambda x_i)_I$.

Toda sequência é, claramente, uma família. Nesta seção I e J indicam conjuntos enumeráveis de índices . Se $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ então $x:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ é uma sequência dupla. Se $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \mathbb{N}^3$ então $x:\mathbb{N}^3\to\mathbb{K}$ é uma sequência tripla.

Baseando-nos no Teorema 6.10 apresentamos as seguintes notação e definições.

6.12 Definições. *Dada uma família $(p_i)_{i\in I}$ de termos positivos indicamos*

$$\sum p_i \;=\; sup\left\{ \sum_{i\in F} p_i : F \subset I \text{ e } F \text{ finito} \right\} .$$

- *Se $\sum p_i \;<\; \infty$, dizemos que $(p_i)_I$ é uma* família somável *(ou, brevemente,* somável*) com* soma $\sum p_i$, *também indicada* $\sum\limits_I p_i$ *ou* $\sum\limits_{i\in I} p_i$.
- *Se $I = \mathbb{N}$ e $(p_n)_{\mathbb{N}}$ é somável, chamamos (p_n) de* sequência somável.

6.13 Observações. *Seja $(p_i)_I$ uma família de termos positivos arbitrária.*

- *Seja $\sigma : J \to I$ uma bijeção. É fácil ver que vale a igualdade $\sum\limits_I p_i = \sum\limits_J p_{\sigma(j)}$. Logo, a família $(p_i)_I$ é somável se e só se a família $(p_{\sigma(j)})_J$ é somável.*
- *Se $I = \mathbb{N}$, pelo Teorema 6.10 temos $\sum p_n = \sum\limits^{+\infty} p_n$.*

6.14 Corolário. *Seja (p_n) uma sequência de termos positivos. Então, (p_n) é uma sequência somável se e só se a série $\sum\limits^{+\infty} p_n$ é convergente. Nestes casos temos,*

$$\sum p_n \;=\; \sum^{+\infty} p_n \;.$$

Prova. *Segue da Observação 6.13* ■

6.15 Corolário. *Seja $(p_i)_I$ uma família de termos positivos e $\sigma : \mathbb{N} \to I$ uma bijeção. Então, $(p_i)_I$ é uma família somável se e somente se a série $\sum\limits^{+\infty} p_{\sigma(n)}$ é convergente. Nestes casos temos,*

$$\sum p_i \;=\; \sum^{+\infty} p_{\sigma(n)} \;.$$

Prova. *Segue da Observação 6.13 e do Corolário 6.14* ■

Comentários.

- A notação para séries, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$, indica que estamos somando os termos ordenadamente: desde o primeiro, x_1, e então o segundo x_2 e assim sucessivamente "ad infinitum". A notação $\sum\limits_{\mathbb{N}} x_n$ para a soma da sequência (x_n) indica que estamos usando $\mathbb{N}$ apenas como conjunto, sem relevância das propriedades de sua ordem. Assim, para a soma de uma sequência podemos substituir o conjunto de índices $\mathbb{N}$ por qualquer outro conjunto enumerável (infinito).

- Visto que para uma série $\overset{+\infty}{\sum} p_n$ de termos reais e positivos, convergente ou divergente (para $+\infty$), vale a igualdade:

$$\sum^{+\infty} p_n = \sum p_n,$$

concluímos que, para séries de termos positivos podemos utilizar livremente a notação $\sum p_n$ pois não há risco de dubiedade se a interpretarmos como uma série ou como uma soma (não ordenada).

6.16 Definição. *Seja J um conjunto de índices enumerável.*

- *Uma família $(x_j)_J$ de números reais é* somável *se as famílias $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$ das partes positivas e negativas de x_j, $j \in J$, respectivamente (v. Definição 6.5), são somáveis. Se $(x_j)_J$ é somável, sua* soma (não ordenada) *é*

$$\sum x_j = \sum p_j - \sum q_j .$$

- *Uma família $(z_j)_J$ de números complexos é* somável *se as famílias $\big(Re(z_j)\big)_J$ e $\big(Im(z_j)\big)_J$, das partes reais e imaginárias de z_j, $j \in J$, respectivamente, são somáveis. Se $(z_j)_J$ é somável, sua* soma (não ordenada) *é*

$$\sum z_j = \sum Re(z_j) + i \sum Im(z_j) .$$

- *Uma família $(z_j)_J$ de números reais ou complexos é uma família* absolutamente somável *se a família $(\,|z_j|\,)_J$ é somável. Isto é, se*

$$\sum |z_j| < \infty .$$

Comentários.

- Escrevemos $\sum a_i < \infty$ para indicar que a família $(a_i)_I$ é somável.

- A definição de famílias somáveis dada acima é equivalente a usualmente apresentada nos textos que abordam somas não ordenadas (ou, dito de outra forma, somabilidade). Vide Apêndice 6-C.

6.17 Lema. *Seja $(z_j)_J$ uma família em $\mathbb{C}$ e $\sigma : \mathbb{N} \to J$ bijetora. São equivalentes:*

(a) $(z_j)_J$ *é somável.*

(b) $(\, z_j \,)_J$ *é absolutamente somável.*

(c) $\sum^{+\infty} |z_{\sigma(n)}|$ *é (absolutamente) convergente.*

Ainda, ocorrendo (a) ou (b) ou (c) temos,

$$\sum z_j \;=\; \sum^{+\infty} z_{\sigma(n)} \;.$$

Prova. Consideremos as famílias $\big(\mathrm{Re}(z_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(z_j)\big)_J$ e as famílias de suas partes positivas, $(p_j)_J$ e $(P_j)_J$, respectivamente, e de suas partes negativas, $(q_j)_J$ e $(Q_j)_J$, também respectivamente.

(a) $\Leftrightarrow$(b) Utilizando 6.5.1 e 6.8.1 é fácil ver que para todo $j \in J$ segue,

$$0 \;\le\; \max\big\{p_j, q_j, P_j, Q_j\big\} \;\le\; |z_j| \;\le\; p_j + q_j + P_j + Q_j \;.$$

Logo, temos $\sum |z_j| < \infty$ se e somente se $\sum p_j$, $\sum q_j$, $\sum P_j$ e $\sum Q_j$ são finitas. Donde, a família $(|z_j|)_J$ é somável se e somente se (z_j) é somável.

(b) $\Leftrightarrow$(c) Segue do Corolário 6.15.

Para finalizar, suponhamos que (a) ou (b) ou (c) vale. Pela Definição 6.16 temos $\sum z_j = \sum \mathrm{Re}(z_j) + i \sum \mathrm{Im}(z_j)$, $\sum \mathrm{Re}(z_j) = \sum p_j - \sum q_j$ e $\sum \mathrm{Im}(z_j) = \sum P_j - \sum Q_j$. Então, aplicando o Corolário 6.15 obtemos

$$\sum p_j = \sum^{+\infty} p_{\sigma(n)}\,, \quad \sum q_j = \sum^{+\infty} q_{\sigma(n)}\,, \quad \sum P_j = \sum^{+\infty} P_{\sigma(n)} \quad \text{e} \quad \sum Q_j = \sum^{+\infty} Q_{\sigma(n)}\;.$$

Donde segue,

$$\begin{aligned} \sum z_j \;&= \Big[\sum^{+\infty} p_{\sigma(n)} - \sum^{+\infty} q_{\sigma(n)}\Big] \;+\; i\Big[\sum^{+\infty} P_{\sigma(n)} - \sum^{+\infty} Q_{\sigma(n)}\Big] \\ &= \sum^{+\infty} \mathrm{Re}\big[z_{\sigma(n)}\big] \;+\; i \sum^{+\infty} \mathrm{Im}\big[z_{\sigma(n)}\big] \;=\; \sum^{+\infty} z_{\sigma(n)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.18 Corolário. *Seja $(z_i)_I$ uma família somável e J um subconjunto de I. Então, a família $(z_i)_{i\in J}$ é também somável.*

Prova.

Pelo Lema 6.17 (b) temos $\sum_{i\in I} |z_i| < \infty$ e, pela inclusão $J \subset I$, a desigualdade

$$\sum_{i\in J} |z_i| \leq \sum_{i\in I} |z_i| \ .$$

Portanto, pelo Lema 6.17 (a), a família $(z_i)_I$ é somável ∎

6.19 Proposição. *Seja $\mathbb{K}$ fixo. Sejam $(a_j)_J$ e $(b_j)_J$ famílias somáveis em $\mathbb{K}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, as famílias $(a_j+b_j)_J$ e $(\lambda a_j)_J$ são somáveis e valem as propriedades:*

(a) $\sum(a_j + b_j) \ = \ \sum a_j \ + \ \sum b_j$.

(b) $\sum \lambda a_j \ = \ \lambda \sum a_j$.

Prova. Seja $\sigma : \mathbb{N} \to J$ uma bijeção arbitrária.

(a) Pelo Lema 6.17, as séries $\sum^{+\infty} |a_{\sigma(n)}|$ e $\sum^{+\infty} |b_{\sigma(n)}|$ convergem. Então, pela desigualdade triangular a série $\sum^{+\infty} |a_{\sigma(n)} + b_{\sigma(n)}|$ também converge. Portanto, pelo Lema 6.17 a família $(a_j + b_j)_J$ é somável e

$$\sum_J (a_j + b_j) \ = \ \sum^{+\infty} \left(a_{\sigma(n)} \ + \ b_{\sigma(n)} \right) \ = \ \sum^{+\infty} a_{\sigma(n)} \ + \ \sum^{+\infty} b_{\sigma(n)} \ = \ \sum_J a_j \ + \ \sum_J b_j \ .$$

(b) Este caso é análogo ao caso (a) e o deixamos ao leitor ∎

6.4 - Somas Não Ordenadas e Associatividade

A associatividade para séries se encontra no Apêndice 6-A.

A associatividade para somas, diferentemente da restrita associatividade para séries, se dá mesmo particionando $\mathbb{N}$ em uma quantidade infinita de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, o que pode ser obtido, por exemplo, listando os números primos $I = \{1, 2, 3, 5, 7, ...\}$, em ordem crescente, e definindo $F_1 = \{1\}$; F_2: o conjunto dos naturais múltiplos de 2; F_3: o conjunto dos naturais múltiplos de 3 mas não de 2; F_5: o conjunto dos naturais múltipos de 5 mas não de 2 ou 3, e assim sucessivamente e então escrevendo $\mathbb{N} = \bigcup_I F_p$, com $F_p \cap F_q = \emptyset$ se $p \neq q$.

Enfatizamos que os resultados nesta seção, para sequências somáveis, se estendem trivialmente a famílias somáveis indexadas em um conjunto enumerável I ao utilizarmos uma bijeção arbitrária $\sigma : \mathbb{N} \to I$. Os enunciamos e provamos para sequências por comodidade.

O primeiro destes três resultados mostra que podemos: (1) associar livremente uma família de números positivos e (2) dissociar cada termo de uma família de números positivos livremente como uma família de números também positivos; no sentido de que tais operações não alteram a somabilidade ou a não somabilidade da família original. Em suma, para computarmos a soma de uma família de números positivos podemos introduzir ou suprimir parenteses livremente.

Nesta seção utilizaremos as notações abaixo:

- O símbolo $\dot{\bigcup}$ indica uma reunião de conjuntos dois a dois disjuntos.
- Uma partição de $\mathbb{N}$ é uma reunião $\mathbb{N} = \dot{\bigcup}_I J_i$, onde I é um conjunto de índices (enumerável), satisfazendo as seguintes condições:
  - (a) $J_i \cap J_{i'} = \emptyset$ se $i \neq i'$, quaisquer que sejam i e i' em I.
  - (b) $J_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$.

Meramente sugerimos ao leitor que antes de prosseguir na leitura mostre : *"Dados A e B, dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, então vale* $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$, *com a convenção* $\sup X = +\infty$ *se X não é majorado superiormente"*.

6.20 Teorema (Associatividade e Dissociatividade) *Seja (p_n) uma sequência arbitrária de termos positivos. Seja $\mathbb{N} = \dot{\bigcup}_I J_i$ uma partição qualquer de $\mathbb{N}$. Então,*

$$\sum p_n = \sum_{i \in I} \sum_{n \in J_i} p_n \,,$$

com a convenção $\sum_{i \in I} \sum_{n \in J_i} p_n = +\infty$, se $\sum_{n \in J_i} p_n = +\infty$ para algum $i \in I$.

Prova. Analisemos dois casos.

(1) Suponhamos $\sum_{n \in J_{i_0}} p_n = +\infty$ para algum $i_0 \in I$. Pela Definição 6.12 é óbvia a desigualdade $\sum p_n = \sum_{\mathbb{N}} p_n \geq \sum_{n \in J_{i_0}} p_n$. Donde segue $\sum p_n = +\infty$, como desejado.

(2) Suponhamos $\sum_{n \in J_i} p_n < \infty$, $\forall i \in I$. Provemos duas desigualdades. Dado F finito em $\mathbb{N}$, por hipótese existe um subconjunto finito de índices distintos $\{i_1, ..., i_k\} \subset I$ tal que $F \subset J_{i_1} \cup ... \cup J_{i_k}$. Donde segue,

$$\sum_{n \in F} p_n \;\leq\; \sum_{J_{i_1}} p_n + ... + \sum_{J_{i_k}} p_n \;\leq\; \sum_{i \in I} \sum_{n \in J_i} p_n$$

e então, pela definição de $\sum p_n$, obtemos a primeira desigualdade:

$$\sum p_n \;\leq\; \sum_{i \in I} \sum_{n \in J_i} p_n \;.$$

Para obtermos a desigualdade reversa, notemos que dado um conjunto finito de índices distintos $\{i_1, ..., i_k\} \subset I$ e conjuntos finitos F_{i_r}, com $F_{i_r} \subset J_{i_r}$ se $1 \leq r \leq k$, então os conjuntos J_{i_1},...,J_{i_k} são dois a dois disjuntos e portanto os conjuntos F_{i_1},...,F_{i_k} também. Assim temos,

$$\sum_{n \in F_{i_1}} p_n + ... + \sum_{n \in F_{i_k}} p_n \;\leq\; \sum p_n \;.$$

Na desigualdade acima, fixando os conjuntos $F_{i_2}, ..., F_{i_k}$ e computando o supremo sobre a família dos conjuntos finitos F_{i_1} contidos em J_{i_1} obtemos a desigualdade $\sum_{J_{i_1}} p_n + \sum_{F_{i_2}} p_n + ... + \sum_{F_{i_k}} p_n \leq \sum p_n$. Nesta desigualdade, fixos $F_{i_3}, ..., F_{i_k}$, computando o supremo sobre a família de conjuntos finitos $F_{i_2} \subset J_{i_2}$ obtemos a desigualdade $\sum_{J_{i_1}} p_n + \sum_{J_{i_2}} p_n + \sum_{F_{i_3}} p_n + ... + \sum_{F_{i_k}} p_n \leq \sum p_n$. Assim, por indução encontramos

$$\sum_{J_{i_1}} p_n + \sum_{J_{i_2}} p_n + ... + \sum_{J_{i_k}} p_n \;\leq\; \sum p_n \;.$$

Por fim, como $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ é qualquer subconjunto finito de I concluímos

$$\sum_{i \in I} \sum_{n \in J_i} p_n \;\leq\; \sum p_n \quad \blacksquare$$

6.21 Corolário *(***Lei Associativa Para Somas***) Seja* (a_n) *uma sequência somável. Suponha* $\mathbb{N} = \biguplus_I J_i$ *uma partição arbitrária de* $\mathbb{N}$*. Então, a família* $(a_n)_{n\in J_i}$ *é somável, para todo* $i \in I$*, e*

$$\sum a_n = \sum_I \sum_{n\in J_i} a_n.$$

Prova. Pelo Corolário 6.18 a família $(a_n)_{n\in J_i}$ é somável, para todo $i \in I$.

Em $\mathbb{R}$, a identidade anunciada segue da decomposição (vide Definição 6.16) $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$, com p_n e q_n as partes positiva e negativa de a_n, respectivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, do Teorema 6.20 e da Proposição 6.19.

Em $\mathbb{C}$, a identidade segue da decomposição $\sum a_n = \sum \mathrm{Re}(a_n) + i \sum \mathrm{Im}(a_n)$, do caso real acima provado e da Proposição 6.19 ∎

6.22 Proposição. *Seja* (a_n) *uma sequência somável. Suponha* (I_m) *uma sequência crescente arbitrária de subconjuntos de* $\mathbb{N}$ *tal que* $\bigcup I_m = \mathbb{N}$ *(dita uma sequência exaustiva para* $\mathbb{N}$*). Então, a família* $(a_n)_{n\in I_m}$ *é somável, para todo* $m \in \mathbb{N}$*, e*

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n\in I_m} a_n = \sum a_n \ .$$

Prova. Mantenhamos a notação na prova do Corolário 6.21. Pelo Corolário 6.18, a família $(a_n)_{I_m}, m \in \mathbb{N}$, é somável. Dividamos a prova em três casos.

(a) Suponhamos $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $0 \leq \sum_{n\in I_m} a_n \leq \sum a_n$, para todo $m \in \mathbb{N}$, que a sequência $\left(\sum_{n\in I_m} a_n\right)_{m\in\mathbb{N}}$ é crescente e que vale a desigualdade $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n\in I_m} a_n \leq \sum a_n$, para a qual mostraremos sua reversa. De fato, é fácil ver que dado F um subconjunto finito arbitrário de $\mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset I_n$ e obtemos $\sum_{n\in F} a_n \leq \sum_{n\in I_m} a_n \leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{n\in I_m} a_n$. Donde segue, $\sum_{n\in F} a_n \leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{n\in I_m} a_n$. Por fim, como F é um subconjunto finito arbitrário de $\mathbb{N}$, pela Definição 6.12 segue a desigualdade desejada $\sum a_n \leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{n\in I_m} a_n$.

(b) Suponhamos $a_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A demonstração segue então da decomposição $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ e do caso (a).

(c) Suponhamos $a_n \in \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A demonstração segue então da decomposição $\sum a_n = \sum \mathrm{Re}(a_n) + i \sum \mathrm{Im}(a_n)$ e do caso (b) ∎

6.5 - Soma de uma Sequência Dupla e o Produto de Séries

Seguem versões análogas ao Corolário 6.21 e Proposição 6.22 para uma sequência dupla complexa $(a_{(n,m)})_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Indicamos $a_{nm} = a_{(n,m)}$ os termos de uma sequência dupla e $\sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm} = \sum\limits_{n,m} a_{nm} = \sum a_{nm}$ a soma (não ordenada) de uma sequência dupla. Ainda, indicamos a sequência dupla com a matriz infinita:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Teorema 6.23 *Se $\sum |a_{nm}| < \infty$ então (a_{nm}) é somável e,*

(a) *Se $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} J_i$, é uma partição de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ então,*

$$\sum_{i\in I} \sum_{(n,m)\in J_i} a_{nm} = \sum a_{nm} \ .$$

(b) *Se $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de subconjuntos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ satisfazendo $\bigcup I_k = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (dita uma sequência exaustiva para $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) então,*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{(n,m)\in I_k} a_{nm} \ = \ \sum a_{nm} \ .$$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{nm} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{nm} = \sum a_{nm}$ *(Séries iteradas/ somatório duplo).*

(d) *Para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ temos:* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{\sigma(k)} = \sum a_{nm}$.

Prova. A somabilidade de (a_{nm}) segue do Lema 6.17.

(a) Segue do Corolário 6.21 (vide Figura 6.1 a seguir).

(b) Segue da Proposição 6.22 (vide Figura 6.1. a seguir).

(c) Aplicando o item (a) e o Lema 6.17 (duas vezes), nesta ordem, temos

$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{nm} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{nm},$$

o resultado é análogo para $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{nm}$ (v. Figuras 6.2 e 6.3(a), a seguir).

(d) Segue do Lema 6.17 ∎

6.24 Observação. *Supondo* $\sum\limits^{+\infty} a_n = a$ *e* $\sum\limits^{+\infty} b_m = b$, *é fácil ver que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_n b_m = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_m = ab \ .$$

Antes de definirmos o produto de duas séries notemos que dadas $\sum\limits^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits^{+\infty} b_m$ há infinitas maneiras de associarmos os termos da sequência dupla $(a_n b_m)$ para formarmos uma série. Nestas notas usaremos apenas o produto de Cauchy abaixo.

6.25 Definição. *Dadas* $\sum\limits^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits^{+\infty} b_m$, *seu* produto de Cauchy *é a série*

$$(a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots \ = \ \sum_{p=0}^{+\infty} c_p \, , \quad com \ c_p \ = \sum_{n+m=p} a_n b_m \ .$$

O produto de Cauchy surge, no caso finito, com a multiplicação de dois polinômios arbitrários e, no caso infinito, com o produto de duas séries de potências arbitrárias. Vide Exemplo 6.27 e Figura 6.3(b), a seguir.

6.26 Corolario. *Sejam* $\sum\limits^{\infty} a_n = a$ *e* $\sum\limits^{\infty} b_m = b$ *séries absolutamente convergentes. Então temos* $\sum |a_n b_m| < \infty$ *e ainda,*

(a) $\sum a_n b_m = ab$.

(b) O produto de Cauchy *das séries apresentadas é também uma série absolutamente convergente e tem por soma*

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} a_n \, b_m\Big) \ = ab \, .$$

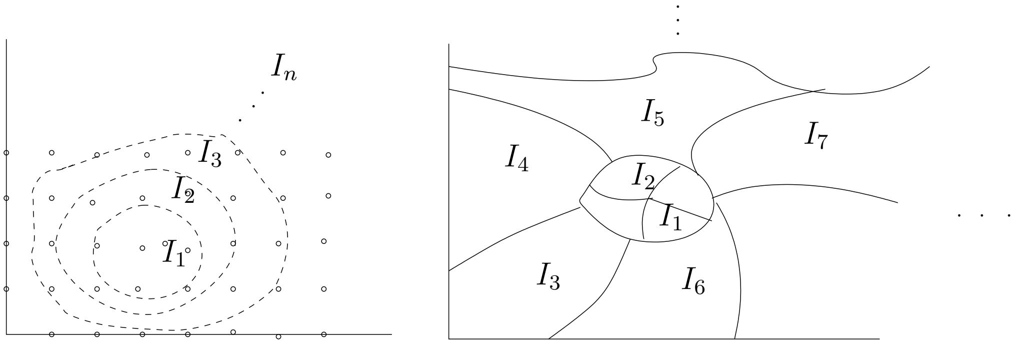
Prova. É claro que $\sum |a_n b_m| = \big(\sum |a_n|\big)\big(\sum |b_m|\big) < \infty$. Assim, $(a_n b_m)$ é somável.

(a) Pelo Teorema 6.23 (c) segue trivialmente $\sum a_n b_m = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_n b_m = ab$.

(b) Considerando a partição $(J_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $J_p = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : n+m = p\}$ e então aplicando o item (a) e o Teorema 6.23 (a) e o Lema 6.17 obtemos

$$ab \ = \ \sum a_n b_m \ = \sum_{p\in\mathbb{N}} c_p \ = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p \, , \quad \text{com } c_p \ = \sum_{n+m=p} a_n b_m \ \text{ e } \ \sum_{p=0}^{+\infty} |c_p| < \infty \quad \blacksquare$$

Comentário. Apresentamos a prova acima para o Corolário 6.26 (b), utilizando o conceito de somas não ordenadas, devido a: (1) sua concisão e (2) tal conceito será muito útil para provarmos, também concisamente, alguns teoremas e regras operatórias para séries de potências no próximo capítulo. Vide Exercícios 18 e 19 para provas muito simples (mas não curtas) do Corolário 6.26 (b).



$I_n \subset I_{n+1}$ e $\bigcup I_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{I_n} a_{ij} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm}$

(a) Sequência exaustiva para $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$I_n \bigcap I_m \neq \varnothing, n \neq m,$ e $\bigcup I_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\sum\limits_{\mathbb{N}} \sum\limits_{I_n} a_{ij} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij}$

(b) Associatividade.

Figura 6.1: Ilustração ao Teorema 6.23 (b) e (a), respectivamente.

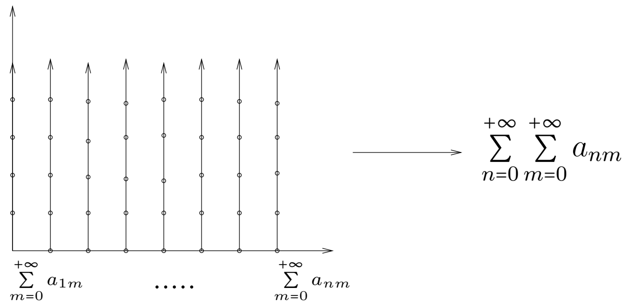
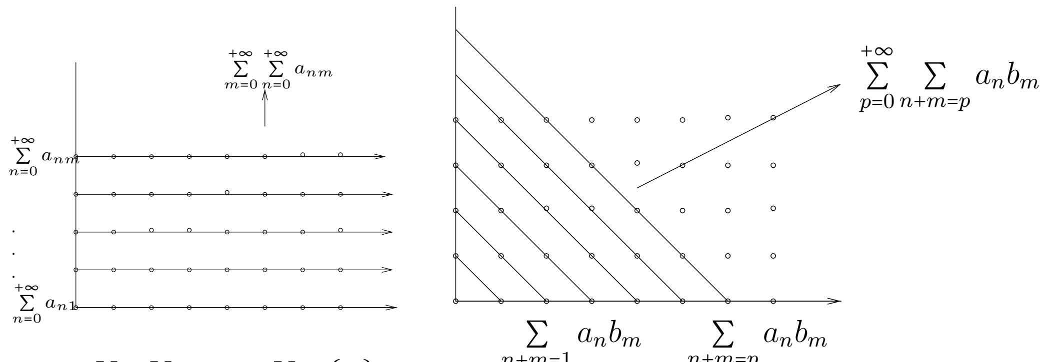


Figura 6.2: Ilustração ao Teorema 6.23 (c) - $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{nm} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm}$



$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\}$

(a) $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{nm} = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm}$

(b) $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} \{(n,m) : n+m=p\}$

Figura 6.3: Ilustração ao Teorema 6.23 (c) ; Ilustração à Definição 6.25

6.27 Exemplo. *Justifiquemos a fórmula para o produto de Cauchy.*

(a) Se $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ e $b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m$ são polinômios na variável $z \in \mathbb{C}$, com coeficientes complexos, é claro que

$$(a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n)(b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m) = \sum_{p=0}^{n+m} c_p z^p \,, \text{ com } c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m \ .$$

(b) Sejam $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m z^m$ séries em $\mathbb{C}$ e absolutamente convergentes qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$. Pelo Corolário 6.26 (a) temos,

$$f(z)g(z) = \sum a_n b_m z^n z^m = \sum a_n b_m z^{n+m} \ ,$$

e pelo Teorema 6.23 (a),

$$\sum a_n b_m z^{n+m} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n+m=p} a_n b_m z^p = \sum_{p \in \mathbb{N}} c_p z^p \,, \quad \text{com } c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m \ .$$

Pelo Lema 6.17 temos $\sum_{p \in \mathbb{N}} c_p z^p = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p$. Por fim concluímos,

$$f(z)g(z) = \sum a_n b_m z^{n+m} = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p \,, \quad \text{com } c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m \ .$$

6.28 Exemplo. *Se* $|z| < 1$, *então a soma da sequência dupla dada pela matriz infinita abaixo é* $\frac{z}{(1-z)^2}$.

$$\begin{pmatrix} z & z^2 & z^3 & z^4 & ..... \\ z^2 & z^3 & z^4 & z^5 & ..... \\ z^3 & z^4 & z^5 & z^6 & ..... \\ ..... & ..... & ..... & .... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & .... & ..... \end{pmatrix}$$

Verificação. Inicialmente mostremos que a sequência dupla é somável.

A soma dos valores absolutos dos elementos na n-ésima linha, $n = 1, 2, ...$ é

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} |z|^{n+p} = \sum_{p=1}^{+\infty} |z|^{n+p} = \frac{|z|^n}{1-|z|} \,,$$

e, somando tais resultados obtemos,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|z|^n}{1-|z|} = \frac{1}{1-|z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |z|^n = \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \ .$$

Então, pelo Teorema 6.23 (c) a soma da sequência dupla é $\frac{z}{(1-z)^2}$ ∎

6.6 -A Função Exponencial Complexa e as Funções Trigonométricas

6.29 Teorema. *A função exponencial complexa,*

$$\exp(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \ , z \in \mathbb{C} \ ,$$

é bem definida, satisfazendo as propriedades abaixo.

(a) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}$.

(b) $\exp(0) = 1$, *e para todo* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$ *e* $\exp(z) \neq 0$.

(c) A restrição de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ao conjunto* $\mathbb{R}$ *é a função* $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

(d) $\exp(1) = e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, *onde e é o número de Euler (vide Definição 3.81).*

(e) Introduzindo a notação $e^z = \exp(z)$ *temos,*

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad e \qquad |e^z| = e^{Re(z)} \ .$$

(f) $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, *onde* $h \in \mathbb{C}^*$.

(g) $\exp(z)$ *é contínua em* $\mathbb{C}$.

(h) $\lim_{h \to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \ , \forall z \in \mathbb{C}$; *onde* $h \in \mathbb{C}^*$.

Prova.

(a) Utilizando a fórmula para o produto de Cauchy das séries absolutamente convergentes $\exp(z)$ e $\exp(w)$ obtemos,

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{w^m}{m!}\Big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n+m=p} \frac{1}{n!\,m!} z^n w^m = \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p\,!} \sum_{n=0}^{n=p} \frac{p\,!}{n!\,(p-n)!} z^n w^{p-n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^p}{p\,!} = \exp(z+w) \ .\end{aligned}$$

(b) É óbvio que $\exp(0) = 1$. Assim, dado $z \in \mathbb{C}$ e empregando (a) obtemos,

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z) \ .$$

Donde segue $\exp(z) \neq 0$. Ainda mais, $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

(c) e (d) São afirmações triviais (vide Proposição 3.86).

(e) Como $|\overline{z}| = |z|$, segue que a **função conjugado** $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ é contínua. Donde segue (vide Corolário 3.64),

$$\overline{e^z} = \overline{\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}} = \lim_{n\to+\infty} \overline{\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \right)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\overline{z}^j}{j!} = e^{\overline{z}} \ .$$

Ainda mais,

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} = \left(e^{\mathrm{Re}(z)} \right)^2 \ .$$

Então, utilizando que $e^{\mathrm{Re}(z)} \geq 0$ (vide Definição 3.82) obtemos $e^{\mathrm{Re}(z)} = |e^z|$.

(f) É fácil ver que temos,

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots \ .$$

Logo, supondo $|h| \leq 1$ e $h \neq 0$, obtemos

$$\left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| \leq \frac{|h|}{2!} + \frac{|h|^2}{3!} + \dots . \leq |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right] \leq e|h|.$$

Donde segue,

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{e^h - 1}{h} - 1 \right] = 0 \ .$$

(g) Dado $z \in \mathbb{C}$ temos, pelo ítem anterior,

$$\lim_{h\to 0} \left(e^{z+h} - e^z \right) = \lim_{h\to 0} e^z \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) h = e^z.1.0 = 0 \ .$$

(h) Temos, pelo item (f),

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^z e^h - e^z}{h} = e^z \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z \quad \blacksquare$$

Definamos a seguir as funções trigonométricas complexas $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$. Notemos que até aqui, neste texto, a apresentação das funções trigonométricas esteve baseada em considerações geométricas.

Observemos que dado $\theta \in \mathbb{R}$ temos,

$$\text{(6.29.1)} \quad e^{i\theta} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots \right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots \right] .$$

Ainda, as partes real e imaginária da série acima são as séries de Taylor na origem das funções reais $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, respectivamente [vide Exemplos 3.10 (b) e (c)].

Apresentamos então as seguintes definições analíticas.

6.30 Definição. *Dado $z \in \mathbb{C}$, indicamos*

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + ...(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \qquad , \qquad sen z = z - \frac{z^3}{3!} + ...(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

6.31 Corolário (Fórmula de Euler). *Dado $\theta \in \mathbb{R}$ temos,*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i sen\theta \ .$$

Prova. Segue da fórmula 6.29.1 e da Definição 6.30 ∎

A seguir, verifiquemos que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, com $x \in \mathbb{R}$, obtidas restringindo as funções complexas $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ ao eixo real, possuem as propriedades geométricas e analíticas que esperamos.

6.32 Teorema. *As funções $\cos x$ e $sen x$ são deriváveis e satisfazem, $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\cos' x = -sen x \qquad e \qquad sen' x = \cos x \ .$$

Prova. Do teorema 6.29 (h) segue, supondo a variável $h \in \mathbb{R}$ no cômputo abaixo,

$$e^{ix} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ix+ih} - e^{ix}}{ih} = -i \lim_{h\to 0} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} \ .$$

Logo, identificando as partes reais e imaginárias na identidade acima temos,

$$\begin{cases} \cos x = & \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \operatorname{sen}' x \\ \operatorname{sen} x = - & \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos' x \end{cases} \blacksquare$$

A seguir, apresentamos a definição do número π dada por Landau.[3]

6.33 Teorema. *Existe o menor número estritamente positivo l tal que $\cos l = 0$.*

Prova. É óbvio que $\cos 0 = 1$. Mostremos que $\cos 2 < 0$. Escrevendo

$$\cos 2 = \left(1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \left[\left(-\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}\right) + \left(-\frac{2^{10}}{(10)!} + \frac{2^{12}}{(12)!}\right) \cdots\right],$$

[3]Landau foi perseguido durante o nazismo por ser judeu, perdendo seu posto de professor em Berlim. Bierberbach, um des seus detratores, alegara que sua matemática não era germânica. Provavelmente se referindo, entre outras "razões", à definição do número π sugerida por Landau.

temos $1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ e com cada uma das parcelas entre colchetes satisfazendo $-\frac{2^{2n}}{(2n)!} + \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{4}{(2n+2)(2n+1)}\right) < 0$, com n ímpar e $n \geq 3$. Segue então que $\cos 2 < 0$.

Assim, como a função $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário ela se anula em algum ponto entre 0 e 2. Então, é fácil concluir que existe o menor real estritamente positivo l tal $\cos l = 0$ (verifique) ■

6.34 Definição (O número π). *Indicamos $\pi = 2l$, l como no teorema acima.*

6.35 Proposição. *Valem as propriedades abaixo.*

(a) $|e^{i\theta}| = 1 = \cos^2\theta + sen^2\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

(b) $e^{i\pi/2} = i$ *e* $e^{i\pi} = -1$.

(c) A função $\exp(z)$ *é periódica com período* $2\pi i$*. Isto é,* $e^{z+2\pi i} = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(d) Se $\theta \in (0, 2\pi)$ *então* $e^{i\theta} \neq 1$.

(e) $e^z = 1$ *se e somente se* $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(f) Se $\omega \in \mathbb{C}$ *é tal que* $|\omega| = 1$ *então, existe um único* $\theta \in [0, 2\pi)$ *tal que* $e^{i\theta} = \omega$.

(g) A imagem da função exponencial, $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *é* $\mathbb{C}^*$.

Prova.

(a) Temos, $|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta}\,\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = (\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta - i\mathrm{sen}\,\theta) = 1$.

(b) Pela Fórmula de Euler e pela definição de π segue

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\mathrm{sen}(\pi/2) = i\mathrm{sen}(\pi/2)\ .$$

Pelo ítem (b) temos $1 = |e^{i\pi/2}| = |\mathrm{sen}(\pi/2)|$. Logo, $\mathrm{sen}(\pi/2) = \pm 1$. É fácil ver que $\cos\theta$ é positiva em $(0, \frac{\pi}{2})$, implicando que $\mathrm{sen}\,\theta$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$, com $|\mathrm{sen}\,\theta| \leq |e^{i\theta}| = 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Segue então que $\mathrm{sen}(\pi/2) = +1$ e $e^{i\pi/2} = i$.

(c) Temos $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(e^{i\pi/2})^4 = e^z i^4 = e^z$.

(d) Dado $\theta \in (0, 2\pi)$, consideremos $\alpha = \frac{\theta}{4} \in (0, \frac{\pi}{2})$. Como $\cos 0 = 1$ e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e a função $\cos x$ (com $\cos x = \operatorname{sen}' x$) é estritamente positiva neste intervalo temos que a função $\operatorname{sen} x$ é estritamente crescente neste intervalo. É claro que $\operatorname{sen} 0 = 0$ e, pelo ítem (b), $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$. Logo, concluímos que $\operatorname{sen} x \in (0,1)$ se $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Portanto, supondo $1 = e^{i\theta} = (e^{i\alpha})^4$ obtemos $(e^{i\alpha})^2 = \pm 1$ e assim $e^{i\alpha} \in \{+1, -1, +i, -i\}$. Logo, $\operatorname{sen} \alpha \in \{0, +1, -1\}$, com $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\lightning$

(e) Dado $n \in \mathbb{Z}$ temos, pelo ítem (c), $e^{2\pi n i} = (e^{2\pi i})^n = (e^0)^n = 1$.

Inversamente, se $e^z = 1$ então $1 = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Logo, pelo Teorema 6.29 (c) e (e), obtemos $\operatorname{Re} z = 0$. Assim, podemos escrever $z = iy$, com $y \in \mathbb{R}$. É fácil ver que existe um único número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y \in [2n\pi, 2(n+1)\pi)$. Logo, $y - 2n\pi \in [0, 2\pi)$. Desta forma, utilizando o ítem (c) seguem as identidades $1 = e^z = e^{iy} = e^{iy - 2n\pi i} = e^{(y-2n\pi)i}$, com $y - 2n\pi \in [0, 2\pi)$. Então, pelo ítem (d) obtemos $y - 2n\pi = 0$, Portanto, $z = iy \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(f) Seja $\omega = a + ib$, com $1 = |\omega| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Suponhamos $a > 0$ e $b > 0$ [logo, $a, b \in (0,1)$]. Como a função $\cos x$ restrita a $[0, \pi/2]$ é contínua, estritamente decrescente e satisfaz $\cos 0 = 1$ e $\cos \pi/2 = 0$, pelo Teorema do Valor Intermendiário segue que existe $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos \theta = a$. Então, $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - a^2 = b^2$. Assim, como a função $\operatorname{sen} x$ é positiva em $[0, \pi/2]$ [vide a prova do ítem (b)], segue que $\operatorname{sen} \theta = b$. Logo, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = a + ib = \omega$.

Suponhamos $a < 0$ e $b > 0$. Então, existe $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que $e^{i\theta} = b - ai$. Assim, $\alpha = \theta + \pi/2 \in (\pi/2, \pi)$ e $e^{i\alpha} = e^{i(\theta + \pi/2)} = e^{i\theta} e^{i\pi/2} = (b - ai)i = a + bi = \omega$.

Suponhamos $b < 0$ e $a \neq 0$. Pelos casos acima existe $\theta \in (0, \pi)$ tal que $e^{i\theta} = -a - bi$. Assim, $\alpha = \theta + \pi \in (0, 2\pi)$ e $e^{i\alpha} = e^{i\theta} e^{i\pi} = (-a - bi)(-1) = a + bi = \omega$.

Os casos $a = 0$ ou $b = 0$ são triviais.

A unicidade segue do ítem (d). De fato, dados θ_1 e θ_2 em $[0, 2\pi)$ tais que $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, é claro que podemos supor $\theta_2 \geq \theta_1$. Logo, temos $\theta_2 - \theta_1 \in [0, 2\pi)$ e ainda, $e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = e^{i\theta_2} e^{-i\theta_1} = e^{i\theta_1} e^{-i\theta_1} = e^0 = 1$. Portanto, $\theta_2 - \theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta_1$.

(g) Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos $|w| \neq 0$ e assim, pelo Teorema 3.83 existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = |w|$. Ainda mais, como $\frac{w}{|w|}$ tem módulo 1, pelo ítem (f) segue que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$. Logo, $e^{x+iy} = w$ $\blacksquare$

6.36 Proposição. *Pelo isomorfismo* $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$*, para todo* $k \in \mathbb{Z}$*, é uma bijeção a restrição,*

$$\begin{cases} \exp : \mathbb{R} \times [k\pi, k\pi + 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \,, \\ \exp(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y). \end{cases}$$

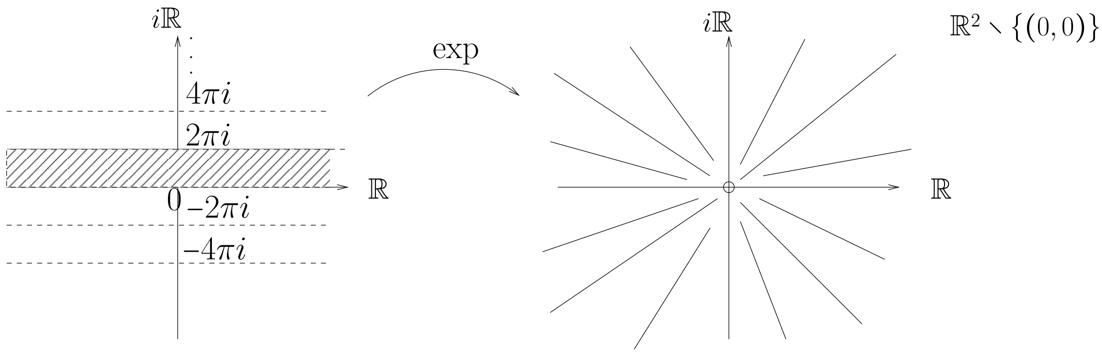


Figura 6.4: A aplicação $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Prova. Deixamos ao leitor verificar ∎

Abaixo utilizamos a fórmula, onde N é ímpar e $z, w \in \mathbb{C}$ (v. Exercício 6.23),

$$(z+w)^N = \sum_{2n+1+2m=N} \left[\binom{N}{2m} z^{2n+1} w^{2m} \; + \; \binom{N}{2n+1} z^{2m} w^{2n+1} \right] .$$

6.37 Teorema. *Sejam* z *e* w *arbitrários em* $\in \mathbb{C}$*. Então,*

$$sen\,(z+w) = sen\, z \cos w + sen\, w \cos z \ .$$

Prova. Vide Exercício 6.24.

6.7 - O Produto de Duas Séries
Não Necessariamente Absolutamente Convergentes

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},$$

a qual não é absolutamente convergente pois temos

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{n} = +\infty,$$

mas é condicionalmente convergente pelo Critério de Leibnitz.

6.38 Exemplo. *O produto de Cauchy da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *por si mesma diverge.*

Verificação.

Seja $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos, $0 \leq (m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$ e

$$2\sqrt{m+1}\sqrt{n+1} \leq m+1+n+1 = m+n+2\ .$$

Então, supondo $m+n=p$ obtemos $(-1)^p a_m a_n = \frac{1}{\sqrt{m+1}\sqrt{n+1}} \geq \frac{2}{p+2}$ e,

$$(-1)^p \sum_{m+n=p} a_m a_n \geq \sum_{m+n=p} \frac{2}{p+2} = (p+1)\frac{2}{p+2} \geq 1\,,\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ .$$

Então, como o termo geral $c_p = \sum_{m+n=p} a_m a_n$ do produto de Cauchy não tende a zero, segue que o produto de Cauchy é uma série divergente ∎

6.39 Definição. *Dadas* $\sum^{+\infty} a_n$ *e* $\sum^{+\infty} b_m$ *e uma bijeção* $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *a série* $\sum^{+\infty} c_p$, *com* $c_p = a_n b_m$ *e* $p = \sigma(n,m)$, *é* um produto *das séries* $\sum^{+\infty} a_n$ *e* $\sum^{+\infty} b_m$.

Notemos que o produto de Cauchy entre duas séries $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ não é, em geral, um produto. Porém, ele pode ser obtido por associação de algumas das séries definidas como um produto das duas citadas séries.

6.40 Teorema (Mertens, 1875).[4] *Se* $\sum^{+\infty} a_n = A$, *com convergência absoluta, e* $\sum^{+\infty} b_n = B$, *então o produto de Cauchy destas séries converge e tem soma* AB.

Prova.

Sejam $c_n = \sum_{k=o}^{n} a_k b_{n-k}$ e

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\,, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\,, \quad \beta_n = B_n - B\ .$$

Então,

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_nB + (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0)\ . \end{aligned}$$

Destacando a segunda parcela entre parenteses no último membro acima,

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0\ ,$$

temos $C_n = A_nB + \gamma_n$ e como $\lim A_nB = AB$, resta apenas verificarmos $\lim \gamma_n = 0$.

Por hipótese,

$$\alpha = \sum^{+\infty} |a_n| < \infty \qquad \text{e} \qquad \lim \beta_n = 0\ ,$$

e dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\beta_n| \le \epsilon$, $\forall n \ge N$. Donde, para $n > N$ segue

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\le |\beta_0a_n + \ldots\beta_Na_{n-N}| + |\beta_{N+1}a_{n-N-1}| + \ldots + |\beta_na_0| \\ &\le |\beta_0a_n + \ldots\beta_Na_{n-N}| + \epsilon\alpha\ . \end{aligned}$$

Assim, como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} |\beta_0a_n + \ldots\beta_Na_{n-N}| = 0$ e consequentemente,

$$\limsup |\gamma_n| \le \epsilon\alpha \qquad \forall \epsilon > 0 \quad \blacksquare$$

[4]Franz C. J. Mertens (1840-1927), de ancestralidade germânica, nasceu em uma vila à época na Prussia e hoje na Polônia e foi aluno de Weierstrass em Berlim.

No capítulo sobre séries de potências, provaremos facilmente o resultado abaixo.

6.41 Teorema (Abel, 1826). *Suponhamos que as séries* $\sum^{+\infty} a_n$ *e* $\sum^{+\infty} b_n$ *e também seu produto de Cauchy* $\sum^{+\infty} c_n$ *convergem. Então,*

$$\sum^{+\infty} c_n = \Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} b_n\Big) \ .$$

6.42 Definição. *A série* $\sum^{+\infty} a_n$, $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *é a* **série nula**.

6.43 Teorema. *Sejam* $\sum^{+\infty} a_n = a$ *e* $\sum^{+\infty} b_m = b$ *séries convergentes não nulas. Consideremos uma bijeção arbitrária e fixa* $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e a série produto* $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p$, $c_p = a_n b_m$, *com* $\sigma(n,m) = p$. *Então, tal série produto é absolutamente convergente se e somente se as séries* $\sum^{+\infty} a_n$ *e* $\sum^{+\infty} b_m$ *são também absolutamente convergentes. Ainda mais, sob tais hipóteses temos,*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = ab \ .$$

Prova.

($\Rightarrow$) Por hipótese temos $\sum |a_n b_m| < \infty$ e então, para $a_{n_0} \neq 0$,

$$|a_{n_0}| \sum_m |b_m| = \sum_m |a_{n_0}||b_m| \leq \sum |a_n b_m| < \infty \,,$$

e portanto $\sum |b_m| < \infty$. Analogamente obtemos $\sum |a_n| < \infty$

($\Leftarrow$) É claro que

$$\sum_{p=1}^{N} |c_p| \leq \big(\sum |a_n|\big)\big(\sum |b_m|\big) \,, \quad \forall N \in \mathbb{N} \ .$$

Logo, $\sum^{+\infty} c_p$ é uma série absolutamente convergente.

Por fim, ocorrendo uma das hipóteses no enunciado, temos que a sequência dupla $(a_n b_m)$ é somável e, pelo Lema 6.17 segue

$$\sum a_n b_m \ = \ \sum^{+\infty} c_p = ab \ \blacksquare$$

6.8 - Somabilidade de Cesaro

A Soma de Cesaro é uma das mais úteis formas de somabilidade e muito importante em Séries de Fourier (já citamos que também o Critério de Dirichlet é importante para Séries de Fourier). No Exemplo 3.53 (3) mostramos que se uma sequência (z_n) converge a z então a sequência formada pelas médias aritméticas de (z_n) também converge a z. Vejamos então que o conceito de somabilidade segundo Cesaro é mais geral que o de série.

6.44 Definição. *Dada* $\sum^{+\infty} z_n$*, seja* s_n *a n-ésima soma parcial desta série e*

$$\tau_n = \frac{s_1 + ... + s_n}{n}, n \in \mathbb{N} .$$

A série $\sum z_n$ *é* Cesaro-somável *[ou (C,1) somável] se* (τ_n) *converge. Se* $\lim \tau_n = s$ *então* s *é* a soma de Cesaro *[ou* soma (C,1)*] de* $\sum^{+\infty} z_n$ *e escrevemos,*

$$\sum z_n = s \qquad (C,1) .$$

6.45 Teorema. *Se* $\sum^{+\infty} z_n = s \in \mathbb{C}$ *então*

$$\sum^{+\infty} z_n = s \qquad (C,1) .$$

Prova: Consequência imediata do Exemplo 2.46 (3) pois $\lim s_n = s$ ■

6.46 Exemplo. *Seja* $a_n = z^n$, $|z| = 1$, $z \neq 1$. *Então,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \qquad (C,1) \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2} \qquad (C,1) .$$

Verificação. Pela fórmula para a soma de uma progressão geométrica temos,

$$s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z} \quad ,$$

$$\tau_n = \frac{s_1 + ... + s_n}{n} = \frac{\frac{n}{1-z} - \frac{1}{1-z}(z + ...z^n)}{n} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{n}\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2} .$$

Desta forma, visto que $\left|\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2}\right| = \frac{|1-z^n|}{|1-z|^2} \leq \frac{2}{|1-z|^2}$, concluímos

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \frac{1}{1-z} \ ■$$

Apêndice 6-A - Associatividade para Séries

Nesta seção são feitos alguns comentários sobre a associatividade para séries. Sendo que a seção não é imprescíndivel para o entendimento do capítulo.

Dada uma série $\sum^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$ com sequência das somas parciais (s_n) a inserção de parenteses, ainda que infinitos, gera uma série $\sum^{+\infty} b_n$ cuja sequência das somas parciais (t_n) é, evidentemente, subsequência de (s_n). Assim, a inserção de parenteses não altera a soma de uma série convergente; mas, se esta é divergente, pode até mesmo resultar em uma série convergente, como é o caso com a série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1....$ que após inserirmos determinados parenteses torna-se a série nula $(1-1) + (1-1) + (1-1) + ...$

Para uma sequência (a_n), real e somável, provamos que $\sum |a_n| < \infty$ e desta forma, escrevendo $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$, p_n e q_n as partes positivas e negativas de a_n, veremos que podemos associar os termos, todos positivos, das somas $\sum p_n$ e $\sum q_n$ de forma totalmente arbitrária e assim também com os termos da soma $\sum a_n$. Notemos, para exemplificar, que para séries não é em geral correto escrevermos $\sum^{+\infty} a_n = \sum^{+\infty} a_{2n} + \sum^{+\infty} a_{2n+1}$ mas, para somas efetivamente temos (provaremos)

$$\sum_{\mathbb{N}} a_n = \sum_{2\mathbb{N}} a_n + \sum_{2\mathbb{N}+1} a_n \ .$$

O caso de uma sequência complexa é facilmente redutível ao caso real. Assim, tendo em vista que já provamos que as séries absolutamente convergentes são comutativamente convergentes, ganhamos muita liberdade ao lidarmos com tais séries ao aplicarmos a elas o conceito de associatividade para famílias somáveis, ao invés da restrita associatividade para séries. As séries absolutamente convergentes foram interpretadas pelo uruguaio J. L. Massera (1915-2002) como "séries de borracha" e a tal comentário, modestamente adicionariamos "acrobáticas".

6.47 Observação. *Consideremos uma aplicação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e as séries, reais ou complexas, $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ relacionadas por:*

$$b_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{\sigma(1)} \ , ..., b_{n+1} = a_{\sigma(n)+1} + a_{\sigma(n)+2} + ... + a_{\sigma(n+1)} \ , \ n = 1, 2, ... \ .$$

A série $\sum^{+\infty} b_n$ é dita obtida da série $\sum^{+\infty} a_n$ por associação *(ou, brevemente, dizemos que a série $\sum^{+\infty} b_n$ é uma associação da série $\sum^{+\infty} a_n$).*

Inversamente, a série $\sum^{+\infty} a_n$ é dita obtida da série $\sum^{+\infty} b_n$ por dissociação *(ou, brevemente, dizemos que a série $\sum^{+\infty} a_n$ é uma dissociação da série $\sum^{+\infty} b_n$).*

Exemplifiquemos com a série harmônica $\sum^{+\infty} \frac{1}{n}$ e a aplicação estritamente crescente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\sigma(n) = 2n$. Então temos, $b_1 = 1 + \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $b_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ e portanto, de maneira geral, $b_k = 1/(2k-1) + 1/(2k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

6.48 Observação (Lei Associativa Para Séries). *Suponhamos que a série* $\sum^{+\infty} b_n$ *é uma associação da série* $\sum^{+\infty} a_n = a \in \mathbb{K}$. *Então,* $\sum^{+\infty} b_n = a$.

Prova. Mantendo a notação $s_n = a_1 + ... + a_n$ e $t_n = b_1 + ... + b_n = s_{\sigma(n)}$ segue trivialmente, $\lim t_n = \lim s_{\sigma(n)} = \lim s_n$ ∎

6.49 Observação. *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série em* $\mathbb{K}$ *e absolutamente convergente. Consideremos* $\mathbb{N} = \bigcup F_i$, *com* F_i *finito e não vazio para todo* $i \in I$, *e tal que* $F_i \cap F_j = \varnothing$ *para* $i \neq j$, *uma partição de* $\mathbb{N}$ *por conjuntos finitos. Temos,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \quad ; \quad se \quad u_i = \sum_{n \in F_i} a_n \, , \forall \, i \in I \ .$$

[Os conjuntos $F_i \, , i \in I$, *são ditos dois a dois disjuntos se* $F_i \cap F_j = \varnothing$, $i \neq j$.*]*

Prova. Segue da comutatividade da série $\sum^{+\infty} a_n$, vide Corolário 6.9(c), listando sucessivamente, na etapa i, com $i = 1, 2, ...$, os termos a_n tais que $n \in F_i$ e então agrupando-os pela associatividade para séries acima vista na Observação 6.48 ∎

Apêndice 6-B - Teorema de Riemann

6.50 Teorema (Riemann) *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série real e condicionalmente convergente. Dados* $x, y \in [-\infty, +\infty]$, $x \leq y$, *existe uma rearranjo* $\sum^{+\infty} b_n$ *de* $\sum a_n$ *tal que, se* $s_n = b_1 + ... + b_n$,

$$\liminf s_n = x \quad e \quad \limsup s_n = y \ .$$

Prova. Sejam p_n a parte positiva de a_n e q_n a parte negativa de a_n. Como $\sum^{+\infty} a_n < \infty$, temos $0 = \lim a_n = \lim p_n = \lim q_n$. Entretanto, $\sum |a_n| = +\infty$, donde $\sum p_n = +\infty$ ou $\sum q_n = +\infty$ e, como existe $\lim \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i)$, concluímos que $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$. Consideremos agora a partição

$$\mathbb{N} = P \cup Q\,, \quad \text{com} \quad P = \{i : a_i = p_i \geq 0\} \ \text{ e } \ Q = \{j : a_j = -q_j < 0\}\,,$$

e dois números reais arbitrários x e y. Reordenemos a série $\sum^{+\infty} a_n$ tomando os n_1 primeiros índices em P, indicados $\{1, ..., n_1\}$, tais que

$$p_1 + ... + p_{n_1} > y \ .$$

A seguir, tomamos os n_2 primeiros índices em Q, indicados $\{1, 2, ..., n_2\}$, tais que

$$p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} < x \ .$$

Subtraídos em P os índices já selecionados, escolhemos os novos primeiros índices, indicados $\{n_1 + 1, ..., n_3\}$, tais que

$$p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} + p_{n_1+1} + ... + p_{n_3} > y \ .$$

Procedendo analogamente com Q, retirados os índices já coletados, pegamos os primeiros índices $\{n_3 + 1, ..., n_4\}$ satisfazendo

$$p_1 + p_2 + ... + p_{n_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{n_2} + p_{n_1+1} + ... + p_{n_3} - q_{n_3+1} - .... - q_{n_4} < x \ .$$

Continuando este processo ad infinitum obtemos um rearranjo $\sum^{+\infty} b_n$ de $\sum^{+\infty} a_n$ tal que se (s_n) é a sequência de suas somas parciais temos, para i ímpar,

$$s_{n_{i+1}} < x \leq y < s_{n_i}\,, \quad s_{n_i} - p_{n_i} \leq y \ \text{ e } \ s_{n_{i+1}} + q_{n_{i+1}} \geq x \ ;$$

donde segue $0 < x - s_{n_{i+1}} \leq q_{n_i+1}$ e $0 < s_{n_i} - y \leq p_{n_i}$ e então (s_{n_i}), i par, converge a x e (s_{n_i}), i ímpar, converge a y. Além disso, é fácil ver que para i ímpar, $n_i < n < n_{i+1}$ implica $s_{n_i+1} \leq s_n \leq s_{n_i}$. Assim, se s é um valor de aderência de (s_n) não é possível $s > y$ e também não é possível $s < x$. Logo, temos $x \leq s \leq y$ e, como x e y são valores de aderência de (s_n), concluímos que x é o menor valor de aderência (i.e., $x = \liminf s_n$) e y o maior valor de aderência (i.e., $y = \limsup s_n$).

Os casos $x = -\infty$ ou $y = +\infty$ são análogos, e simples, e os deixamos ao leitor ■

6.51 Corolário. *Seja* $\sum\limits^{+\infty} a_n$ *uma série real e condicionalmente convergente e* x *um número real arbitrário. Então, existe um rearranjo de* $\sum\limits^{+\infty} a_n$ *convergente a* x.

Prova. Caso particular do Teorema 6.50, com $x = y$ ■

Apêndice 6-C - Equivalência das Definições de Somabilidade

Com o Teorema 6.52 abaixo mostramos que em $\mathbb{K}$ é equivalente a definição de família somável apresentada neste texto, vide Definição 6.12, e a usual enunciada no item (b) do resultado a seguir.

6.52 Teorema. *Dada uma família $(a_j)_J$, são equivalentes:*

(a) A família $(a_j)_J$ é somável.

(b) Existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\forall \epsilon > 0$, existe um conjunto finito $F_\epsilon \subset J$ tal que

$$\left| \sum_{j\in F} a_j - \alpha \right| < \epsilon\,,$$

qualquer que seja o conjunto finito F tal que $F_\epsilon \subset F \subset J$.

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) Por hipótese, as famílias $\big(\mathrm{Re}(a_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(a_j)\big)_J$ são somáveis. Donde, escrevendo $\alpha = \mathrm{Re}(\alpha) + i\mathrm{Im}(\alpha)$ e utilizando as desigualdades $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ e $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$, podemos supor (a_j) e α em $\mathbb{R}$. Então, as famílias $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$, das partes positivas e negativas de $(a_j)_J$, respectivamente, são somáveis e temos

$$\sum p_j \;=\; P \;=\; \sup\left\{ \sum_F p_j :\; F \text{ é finito e contido em } J \right\} \;<\; \infty\,.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe, por definição de sup, F_ϵ finito contido em J tal que

$$P - \epsilon \;<\; \sum_{F_\epsilon} p_j \;\leq\; P\,.$$

Então, se F é finito, com $F_\epsilon \subset F \subset J$, temos $P - \epsilon < \sum_{F_\epsilon} p_j \leq \sum_F p_j \leq P$ e assim,

$$P - \epsilon \;\leq\; \sum_F p_j \;\leq\; P$$

Analogamente existe $Q \in \mathbb{R}$ e G_ϵ finito tal que, se G é finito e $G_\epsilon \subset G \subset J$,

$$Q - \epsilon \;\leq\; \sum_G q_j \;\leq\; Q\,.$$

Consideremos $H_\epsilon = F_\epsilon \cup G_\epsilon$. Para H finito tal que $H_\epsilon \subset H \subset J$ temos,

$$P - \epsilon \;\le\; \sum_H p_j \;\le\; P \quad \text{e} \quad Q - \epsilon \;\le\; \sum_H q_j \;\le\; Q\,.$$

Portanto,

$$P - \epsilon - Q \;\le\; \sum_H p_j \;-\; \sum_H q_j \;\le\; P - Q + \epsilon\,,$$

o que implica

$$-\epsilon \;\le\; \sum_H (p_j - q_j) - (P - Q) \;\le\; \epsilon$$

e, finalmente, pondo $\alpha = P - Q$ e recordando a identidade $a_j = p_j - q_j$,

$$\Big|\sum_H a_j - \alpha\Big| \;\le\; \epsilon\,,$$

para todo conjunto H finito tal que $H_\epsilon \subset H \subset J$. Isto encerra este caso.

(b) $\Rightarrow$(a) Analogamente ao caso "(a)$\Rightarrow$(b)", podemos supor (a_j) e α em $\mathbb{R}$. Dado $\epsilon = 1$ existe F finito (que fixamos) em J tal que

$$\Big|\sum_{j\in G} a_j - \alpha\Big| < 1\,, \quad \text{para todo } G \text{ finito tal que } F \subset G \subset J\,.$$

Seja H finito e arbitrário, com $H \subset J$. Seja $H' = \{j \in H : a_j = p_j \ge 0\}$. Então, da desigualdade $\sum\limits_{H'\cap F} a_j \le \sum\limits_F p_j$ segue facilmente

$$\begin{aligned}\sum_H p_j \;=\; \sum_{H'} a_j \;=\; \sum_{H'\cap F} a_j \;+\; \sum_{H'\setminus F} a_j \\ \le\; \sum_F p_j \;+\; \sum_{F\cup(H'\setminus F)} a_j \;-\alpha\;+\alpha - \sum_F a_j\,.\end{aligned}$$

Assim, como p_j é positivo para todo j, pela desigualdade triangular segue

$$\sum_H p_j \;\le\; \sum_F p_j + \Big|\sum_{F\cup(H'\setminus F)} a_j \;-\alpha\Big| + \Big|\alpha - \sum_F a_j\Big| \;\le\; \sum_F p_j \;+\; 1 +\; 1\,.$$

Sendo F fixo, $\sum\limits_F p_j$ é um real fixo. Logo, da definição de supremo segue

$$\sum_J p_j \;\le\; 2 \;+\; \sum_F p_j < \infty\,.$$

Ainda, como $(-a_j)_J$ também satisfaz (b) também temos $\sum\limits_J q_j < \infty$ (com q_j a parte negativa de a_j). Logo, por definição, $(a_j)_J$ é somável ■

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 6

1. Suponha que a série $\sum^{+\infty} a_n$ converge absolutamente. Mostre que também convergem absolutamente as séries

$$(a) \quad \sum a_n^2 \qquad\qquad (b) \quad \sum \frac{a_n}{1+a_n}\,, \text{ se } a_n \neq -1\,, \qquad\qquad (c) \quad \sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}\ .$$

2. Mostre que converge condicionalmente a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2}\right]\ .$$

3. Mostre, usando o produto de Cauchy de séries que se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ então,

$$\frac{1}{1-z}f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_0 + ... + a_n)z^n\ .$$

4. Mostre que o produto de Cauchy de duas séries absolutamente convergentes é uma série absolutamente convergente.

5. Mostre: converge absolutamente o produto de Cauchy das séries divergentes

$$(2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ...)(-1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...)\ .$$

6. Sejam $(a_i)_I$ e $(b_j)_J$ duas famílias somáveis (I e J enumeráveis). Mostre

$$\Big(\sum a_i\Big)\Big(\sum b_j\Big) = \sum a_i b_j\ .$$

7. Mostre que se $|x| < 1$ então

$$x^2 + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{(a+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^4} + ... = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 21 + x^2\,, & \text{se } 0 < |x| < 1\ . \end{cases}$$

Isot mostra que a soma infinita de funções contínuas não é necessariamente uma função contínua.

8. Compute, para $|z| < 1$,

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + ...\ .$$

9. Seja $r > 1$. Mostre que
$$\frac{1}{r-1} = \frac{1}{r+1} + \frac{2}{r^2+1} + \frac{4}{r^4+1} + \frac{8}{r^8+1} + \dots\ .$$

10. Seja (f_n) a *sequência de Fibonacci*, definida por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,, \quad \text{para todo} \ \ n \ \geq 0\ .$$

    (i) Prove que existe $\varphi = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Compute φ, dita **razão áurea**.

    (ii) Mostre que
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{f_{n+1}f_{n-1}} \ = \ 1\ .$$

    (iii) Mostre que
$$\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \ \text{se } n \geq 0\ .$$

    (iv) Mostre que
$$\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \ \text{se } n \geq 1\ .$$

    (v) Determine uma fórmula para f_n.

    Sugestão: Suponha válida a fórmula $f_n = \alpha A^n + \beta B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para específicos A, B, α e β. Então, ache A e B tais que a fórmula seja válida para quaisquer α e β. Por fim, determine α e β tais que $f_1 = f_2 = 1$.

11. Seja $x \geq 1$. Mostre que a série abaixo converge e compute sua soma:
$$S = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} + \dots + \frac{x^{2^n}}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})}\ .$$

12. Suponha $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$. Compute
$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a^m b^n\ .$$

13. Seja $\mathbb{Z}$ o conjuntos dos inteiros. Mostre a divergência da soma
$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \frac{1}{m^2+n^2+1}\ .$$

14. Expresse $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$, para $|z| < 1$, como uma série $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$.

15. Suponha $|z| < 1$. Mostre,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2} \ .$$
Dica: Expresse uma série como um somatório duplo.

16. Suponha $|z| < 1$. Mostre,
$$\frac{8z}{1-z} + \frac{16z^2}{1+z^2} + \frac{24z^3}{1-z^3} + \ldots \ = \ \frac{8z}{(1-z)^2} + \frac{8z^2}{(1+z^2)^2} + \frac{8z^3}{(1-z^3)^2} + \ldots \ .$$

17. Seja $a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{mn}$, com $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$. Mostre que não existe
$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn} \ .$$
Porém, existem
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_{mn} \ , \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \ .$$

18. Roteiro para uma prova muito simples e muito fácil de que dadas $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_n = \beta$, duas series absolutamente convergentes, então o produto de Cauchy, $\sum^{+\infty} c_p$, com $c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m$, satisfaz $\sum^{+\infty} c_p = \alpha\beta$.

    (a) Suponha a_n e b_n positivos para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam s_N e t_N as N-ésimas somas parciais das séries $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_n = \beta$. Verifique:
    $$s_N t_N \ = \ (a_0 + \ldots + a_N)(b_0 + \ldots + b_N) \ \le \ c_0 + c_1 + \ldots + c_{2N} \ \le \ s_{2N} t_{2N}.$$
    Conclua que $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \alpha\beta$ (note que $c_p \ge 0$, $\forall p$).

    (b) Suponha $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam (p_n) e (q_n) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de a_n, $n \in \mathbb{N}$, e (P_m) e (Q_m) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de b_m, $m \in \mathbb{N}$. Portanto temos $a_n = p_n - q_n$ e $b_m = P_m - Q_m$. Então, desenvolvendo e aplicando (a) obtemos

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} b_m\Big) &= \Big(\sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m - \sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&= \Big(\sum^{+\infty} p_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m\Big) - \Big(\sum^{+\infty} p_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&\quad -\Big(\sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m\Big) + \Big(\sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} p_n P_m\Big) - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} p_n Q_m\Big) \\
&\quad - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} q_n P_m\Big) + \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} q_n Q_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big[\sum_{n+m=p}\Big(p_n P_m - p_n Q_m - q_n P_m + q_n Q_m\Big)\Big] \dots\,.
\end{aligned}
$$

(c) Desenvolva o caso em que $\sum^{+\infty} z_n$ e $\sum^{+\infty} w_m$ são séries complexas absolutamente convergentes.

Sugestões:

(1) Utilize as notações $z_n = a_n + ib_n$, com a_n e b_n em $\mathbb{R}$, e $w_m = c_m + id_m$ com c_m e d_m em $\mathbb{R}$.

(2) Devido às desigualdades

$$|a_n| \leq |z_n|\,,\ \ |b_n| \leq |z_n|\,,\ \ |c_m| \leq |w_m| \ \text{ e } \ |d_m| \leq |w_n|\,,$$

as séries $\sum^{+\infty} a_n$, $\sum^{+\infty} b_n$, $\sum^{+\infty} c_m$ e $\sum^{+\infty} d_m$ convergem absolutamente.

(3) Desenvolvendo e aplicando o item (b) escreva

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum^{+\infty} z_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} w_m\Big) &= \Big(\sum^{+\infty} a_n + i\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m + i\sum^{+\infty} d_m\Big) = \\
&= \Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m\Big) - \Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} d_m\Big) \\
&\quad + i\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} d_m\Big) + i\Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} a_n c_m\Big) - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} b_n d_m\Big) \dots\,.
\end{aligned}
$$

19. Roteiro para uma prova simples e fácil de que dadas $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_m = \beta$, duas series absolutamente convergentes, então o produto de Cauchy $\sum^{+\infty} c_p$, com $c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m$, converge absolutamente e $\sum^{+\infty} c_p = \alpha\beta$. Verifique:

   (a) Qualquer que seja a ordenação atribuída aos termos da sequência dupla $(a_n b_m)$, obtemos uma série absolutamente convergente (e convergente). Assim podemos considerar $z \in \mathbb{C}$ o valor da série

   $$\begin{aligned} z \;\;=\;\; & a_0b_0 \quad + a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0 \quad + a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0 + \\ & +a_0b_3 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + a_3b_0 + \;\dots\,. \end{aligned}$$

   (b) Introduzindo parenteses na série em (a) obtemos a série

   $$\begin{aligned} & (a_0b_0) \quad + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1) \quad + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2) + \\ & +(a_0b_3 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_0 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3) + \;\dots \end{aligned}$$

   com N-ésima soma parcial

   $$(a_0 + a_1 + \dots + a_N)(b_0 + \dots + b_N) = s_N t_N\,,$$

   s_N e t_N as N-ésimas somas parciais de $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_m$, respectivamente. Logo, a série considerada neste item converge a $\alpha\beta$.

   (c) A série em (b) é tal que a sequência de suas somas parciais é subsequência da sequência das somas parciais da série em (a), que converge a z. Assim, a série em (b) converge a z. Donde, $z = \alpha\beta$.

   (d) Reordene e associe apropriadamente a serie absolutamente em (a) para obter a série, também absolutamente convergente, que é o produto de Cauchy desejado, sem alterar a soma da série.

20. Dado $N \in \mathbb{N}$, verifique a fórmula :

$$(z+w)^{2N+1} = \sum_{2j+2k+1\,=\,2N+1} \left[\binom{2N+1}{2j} z^{2j} w^{2k+1} \;+\; \binom{2N+1}{2k+1} z^{2k+1} w^{2j} \right]\,.$$

21. Prove (refaça a demonstração quando for o caso ou dê outra prova), para $z, w \in \mathbb{C}$:

   (a) $e^z = e^{z+2\pi i}$

   (b) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$

   (c) $\frac{\exp(z)}{\exp(w)} = \exp(z - w)$.

   (d) $[\exp(z)]^m = \exp(mz)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

22. Mostre que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

   Sugestão: Utilize as séries para $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$.

23. Verifique a fórmula, onde N é ímpar e $z, w \in \mathbb{C}$.

$$(z+w)^N = \sum_{2n+1+2m=N} \left[\binom{N}{2m} z^{2n+1} w^{2m} \;+\; \binom{N}{2n+1} z^{2m} w^{2n+1} \right] .$$

   Sugestão: Teste o caso $N = 5$.

24. Verifique a fórmula, para z e w arbitrários em $\mathbb{C}$,

$$\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w = \operatorname{sen}(z+w) .$$

   Sugestão: utilize séries e o Exercício 6.23.

25. Verifique a fórmula, para z e w arbitrários em $\mathbb{C}$,

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w .$$

26. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, verifique a validade das definições de Euler para as funções trigonométricas:

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad , \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} .$$

27. Considere a série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (z + \frac{1}{2})^k$. Verifique:

   (a) A série converge se $|z + \frac{1}{2}| < 1$.

   (b) Se as potências de $(z + \frac{1}{2})$ são expandidas e o resultado é então rearranjado como uma série em potências de z, então a nova série de potências não converge em $z = -1$.

   (c) Explique porque não valeu a Lei Associativa neste caso.