NÚMEROS COMPLEXOS

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS, TOPOLOGIA E CONTINUIDADE

3.1 - Introdução

O que é uma derivada? Resposta: um limite.
O que é uma integral? Resposta: um limite.
O que é uma série infinita? Resposta: um limite.
O que é então um limite? Resposta: um número.
Muito bem! O que é então um número? [1]

O estudo de sequências numéricas e de funções se insere no desenvolvimento do que veio a ser chamado "Aritmetização da Análise" durante o século XIX, sendo que a análise foi vista pelo inglês I. Newton (1642 – 1727) e pelo alemão G. Leibnitz (1646 – 1715) como o estudo dos processos infinitos e de grandezas contínuas tais como comprimentos, áreas, velocidade, etc. O conceito de função é o mais importante neste ramo da matemática e a princípio não era claro.

Em meados do século XVIII o suiço D. Bernoulli (1700 – 1782), ou Daniel I, soluciona o problema da corda vibrante com uma soma infinita de funções trigonométricas, diferindo das soluções de d'Alembert (1717 – 1783) e de Euler. Em 1822 o francês J. Fourier (1768 – 1830) em *Théorie analytique de la cha-*

[1] Vide Analysis by Its History, E. Hairer and G. Wanner, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, N. Y., 2000, p. 168.

leur descobre que toda função pode ser escrita como soma infinita de funções trigonométricas (a série de Fourier). Sua obra foi considerada imprecisa e para elucidá-la, e responder a outras questões presentes à época, torna-se premente formalizar os conceitos de função, convergência e de número real.

Ilustremos o tema com um problema de convergência de uma sequência do início do século XVIII.

O suiço J. Bernoulli (1654 – 1705), ou Jacques I, tio de Daniel I, ao fornecer em obra póstuma de 1713 a primeira prova adequada, por indução matemática - também chamada indução de Fermat, devido ao francês P. Fermat (1601 – 1665)[2] - do teorema binomial (fórmula binomial) para potências inteiras positivas é o primeiro matemático a dizer que a sequência $(1+1/n)^n$ converge para um número real quando $n \to \infty$. Visto que dada uma taxa de juros t, aplicando n vezes um capital inicial C, a cada vez com a taxa de juros t/n, o montante é

$$M = C(1 + \frac{t}{n})^n$$

(é intuitivo que fixada a taxa, quanto maior o número de aplicações maior é o montante), J. Bernoulli veio a propor o problema da composição contínua de juros. Isto é, o de determinar o número

$$\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \ .$$

Assim, J. Bernoulli tornou-se o primeiro a afirmar a existência do número e.

Porém, passaram aproximadamente 160 anos até que as questões da convergência de uma sequência e da definição de um número real fossem esclarecidas. Tais conceitos vieram a ser formalizados pela primeira vez em 1872, meio século após a obra clássica de Fourier, com os trabalhos do francês H. Méray (1835 – 1911) - que percebera o "círculo vicioso" decorrente de definir o limite de uma sequência como um número real e um número real como o limite de uma sequência - e também dos alemães K. Weierstrass (1815 – 1897) - considerado o "pai da Análise Matemática" e que percebera a necessidade de definir um número irracional independentemente do conceito de limite e assim sendo prova o

[2] O francês B. Pascal (1623 – 1662) em 1654 apresentou a primeira clara explanação da indução matemática.

Teorema de Bolzano-Weierstrass [3]:

Todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ *tem ponto de acumulação* –,

seu aluno H. E. Heine (1821 – 1881) - que em 1872, com o chamado desenvolvimento de Cantor-Heine, em essência adota como definição que sequências convergentes que não convergem a números racionais definem números irracionais -, G. Cantor (1845 – 1911) e J. W. R. Dedekind (1831 – 1916) - que apresentou a construção dos números reais na atualidade denominada "cortes de Dedekind" utilizando o axioma de Cantor-Dedekind, isto é, que os pontos sobre uma reta formam um contínuo biunívoco com $\mathbb{R}$.

Os cortes de Dedekind permitiram a fundamentação da análise sem apelo à intuição geométrica e foram simplificados no início do século XX pelo matemático e filósofo inglês B. Russel (1872 – 1970)[4]

Ainda mais, os desenvolvimentos supra citados conduziram ao Axioma do Supremo, ou Completude, que distingue os corpos ordenados $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, fornecendo a propriedade de continuidade de $\mathbb{R}$.

Além da construção de $\mathbb{R}$ via cortes de Dedekind uma segunda construção dos números reais bastante famosa e utilizada (e muito adaptada em matemática avançada) é efetuada via "sequências de Cauchy de números racionais". Esta última é denominada "Construção de Cantor".

[3] Bernhard Bolzano (1781 – 1848), padre theco nascido em Praga. A obra de Bolzano foi, no que respeita ao rigor em análise, superior a de seus contemporâneos mas, em grande parte por ele não ser de um grande centro, permaneceu desconhecida até 1870, quando foi redescoberta pelos matemáticos alemães H. A. Schwarz (1843 – 1921), sucessor de Weierstrass em Berlim a partir de 1892, e H. Hankel (1839 – 1873), aluno de Riemann.

[4] Sobre a procura de Bertrand Russel pelos fundamentos da lógica, é agradável e recomendável ler o aclamado romance gráfico colorido *Logicomix - Uma Jornada Épica em Busca da Verdade*, Apostoulos Doxiadis e Christos H. Papadimitriou, arte por Alecos Papadatos e Annie Di Donna, 1 edição, Ed. Martins Fontes, 2010.

3.2 - Axioma do Supremo

Duas das mais famosas construções de $\mathbb{R}$ podem ser encontradas em Aragona [3], Rudin [20] e Spivak [24]. Neste texto assumimos a existência de $\mathbb{R}$, apresentando o axioma da completude.

Consideremos $\mathbb{L}$ um corpo ordenado arbitrário.

3.1 Definição. *Seja $X \subset \mathbb{L}$, X não vazio.*

(a) $M \in \mathbb{L}$ *é um* majorante, *ou* cota superior, *para X se* $x \leq M$, $\forall x \in X$.

(b) $\beta \in \mathbb{L}$ *é um* supremo *de X se β é um majorante de X e, se M é majorante de X, então $\beta \leq M$ (i.e., β é o menor dos majorantes de X).*

O supremo de X, indicado $\sup X$, *se existir, é único (por favor, verifique). Se* $\sup X \in X$, *ele é um* máximo, *denotado* $\max X$. *Analogamente define-se* minorante, *ou* cota inferior, *para X e* ínfimo *de X,* $\inf X$, *e* mínimo *de X,* $\min X$.

3.2 Definição. $X \subset \mathbb{L}$ *é* limitado superiormente *se existe $M \in \mathbb{L}$ tal que $x \leq M$, $\forall x \in X$. Analogamente definimos X* limitado inferiormente. *Ainda, X é* limitado *se X é limitado superiormente e também inferiormente.*

Doravante, assumimos que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ satisfaz à propriedade abaixo.

3.3 Axioma do Supremo. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que X é não vazio e limitado superiormente. Então, X tem supremo.*

Para $X = [0,1]$ é fácil ver que temos

$$\inf X = \min X = 0 , \quad \sup X = \max X = 1 ,$$

$$\{m \in \mathbb{R} : m \text{ minora } X\} = (-\infty, 0] , \ \{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [1, +\infty) \ .$$

É fácil ver que se X é um subconjunto não vazio e limitado de $\mathbb{R}$ então,

$$\sup X = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ é majorante de } X\} \ ,$$

$$\inf X = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ é minorante de } X\} \ .$$

O axioma do supremo equivale ao Axioma do Ínfimo - *Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado inferiormente então X admite um ínfimo.* - e permite deduzir[5] analiticamente propriedades geométricas dos inteiros e a Propriedade Arquimediana.

3.4 Propriedade de Aproximação. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que existe $\beta = \sup X$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\beta - \epsilon < x \leq \beta$*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, como $\beta - \epsilon < \beta$ segue pela Definição 3.1(b) que $\beta - \epsilon$ não é majorante de X; caso contrário teríamos $\beta \leq \beta - \epsilon$. Consequentemente, existe $x \in X$ tal que $\beta - \epsilon \leq x$ e então, $\beta - \epsilon < x \leq \beta$ ■

3.5 Lema. *O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.*

Prova.

Suponhamos, por contradição, $\mathbb{N}$ limitado superiormente. Pelo axioma do supremo segue que existe $\beta = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Então, $\beta - 1$ não é majorante de $\mathbb{N}$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\beta - 1 < n$. Logo, $\beta < n + 1$, com $n + 1 \in \mathbb{N}$ $\lightning$

3.6 Propriedade Arquimediana. *Sejam $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Prova.

Pelo Lema 3.5 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{y}{x}$ ■

A propriedade arquimediana implica que não existem "infinitésimos" em $\mathbb{R}$.

3.7 Corolário. *Seja $x \geq 0$ tal que $x < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Então, $x = 0$.*

Prova.

Suponhamos, por contradição, $x \neq 0$. Neste caso temos $0 < x < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim $nx < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que é absurdo pois contradiz a propriedade arquimediana. Logo, $x = 0$ ■

[5]Nas palavras de Méray (1869) "....até o presente estas proposições eram consideradas axiomas"

3.8 Exemplo. *Analisemos os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}$*:*

$$(a)\, X = (0,1) \quad (b)\, X = (2,+\infty) \quad (c)\, X = \mathbb{Q} \cap (0,7).$$

(a) não existe $\min X$, não existe $\max X$, $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ minora } X\} = (-\infty, 0]$, $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [1, +\infty)$, $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.

(b) não existe $\min X$, não existe $\max X$, $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ minora } X\} = (-\infty, 2]$, X não admite majorante, $\inf X = 2$ e, não existe $\sup X$.

(c) não existe $\min X$, não existe $\max X$, $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ minora } X\} = (-\infty, 0]$ e $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ majora } X\} = [7, +\infty)$, $\inf X = 0$ e $\sup X = 7$.

3.9 Proposição (Em $\mathbb{Q}$ não vale a Propriedade do Supremo)**.** *São verdadeiras:*

(1) Não existe $p \in \mathbb{Q}$ *tal que* $p^2 = 2$.

(2) O conjunto $A = \{p \in \mathbb{Q} : p > 0 \text{ e } p^2 < 2\}$ *não tem máximo e o conjunto* $B = \{p \in \mathbb{Q} : p > 0 \text{ e } p^2 > 2\}$ *não tem mínimo.*

(3) O conjunto A *não tem supremo em* $\mathbb{Q}$.

Prova.

(1) Suponhamos que existam $p, q \in \mathbb{Q}^*$ com $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Podemos supor $p, q > 0$ e $\text{mdc}(p,q) = 1$. Então, $p^2 = 2q^2$ e p^2 é par e, portanto, p é par. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2m$ e obtemos $(2m)^2 = 2q^2$ e, então, $q^2 = 2m^2$. Logo, q^2 é par e também q é par. O que contradiz $\text{mdc}(p,q) = 1$.

(2) Se $p \in A$, pelo Lema 3.5 existe $r = 1/n \in \mathbb{Q}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < r < 1$ e $r(2p+1) < 2 - p^2$. Então temos, $q = p + r \in \mathbb{Q}$, $q > p$ e

$$q^2 = p^2 + r(2p + r) < p^2 + r(2p+1) < p^2 + (2 - p^2) = 2 \;;$$

donde segue, $q \in A$ e $q > p$. Assim, não existe $\max A$.

Se $p \in B$ então temos $p^2 > 2$ e, ainda, $q = p - \frac{p^2-2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}$ é tal que $0 < q < p$ e

$$q^2p^2 - (p^2 - 2) + \Big(\frac{p^2-2}{2p}\Big)^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2 \;;$$

donde segue, $q \in B$, com $q < p$. Assim, não existe $\min B$.

(3) Como dado um número racional $p > 0$, temos $p^2 < 2$ ou $p^2 > 2$, pelo ítem (2) concluímos que não existe $\sup A \in \mathbb{Q}$ ■

O corpo $\mathbb{R}$ é o único corpo ordenado, a menos de um isomorfismo de corpos ordenados que preserve a ordem, satisfazendo a Propriedade do Supremo. Dizemos que $\mathbb{R}$ é o único corpo ordenado completo.

3.10 Definição. *Suponhamos $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é* denso *em $\mathbb{R}$ se, para todo intervalo aberto e não vazio $(a,b) \subset \mathbb{R}$, temos $X \cap (a,b) \neq \varnothing$.*

3.11 Teorema. *Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.*

Prova. Deixamos ao leitor verificá-la (vide Exercícios) ■

A Propriedade Arquimediana implica também a desigualdade abaixo.

3.12 Desigualdade de Bernoulli. *Se $\alpha > 0$, $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Se $n = 0$ é óbvio. Supondo a desigualdade válida para $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha)(1+n\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha \quad ■$$

3.13 Corolário. *Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Então,*

(a) Se $a > 1$, para todo $M > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > M$.

(b) Se $0 < a < 1$, para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < \epsilon$.

Prova.

(a) Escrevendo $a = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$, pela desigualdade de Bernoulli obtemos $a^m \geq 1 + m\alpha$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.5, o conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{M}{\alpha}$ e portanto, $a^n \geq 1 + n\alpha > M$.

(b) Temos $\frac{1}{a} > 1$ e, pelo item (a), dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{a})^n > \frac{1}{\epsilon}$ e portanto, $a^n < \epsilon$ ■

Abaixo mostramos a equivalência entre o Axioma do Supremo e um dos mais relevantes enunciados sobre o qual pode-se fundamentar a teoria dos números reais.

3.14 Teorema. *Em $\mathbb{R}$, são equivalentes:*

(a) O Axioma do Supremo.

*(a) (***Princípio dos Intervalos Encaixantes***)*[6] *Para toda sequência $[a_0, b_0], \ldots,$ $[a_n, b_n], \ldots.,$ $n \in \mathbb{N}$, de intervalos fechados em $\mathbb{R}$, satisfazendo as condições:*

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

(ii) para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq b_n - a_n < \epsilon$,

temos que a intersecção $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ é um único ponto em $\mathbb{R}$.

Prova.

(a) $\Rightarrow (b)$ Fixado $n \in \mathbb{N}$, de $a_n \leq a_{n+p} \leq b_{n+p} \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots. \leq b_0$, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, segue que $a_n \leq b_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, e todo b_n é um majorante de $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pelo axioma do supremo existe $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$, e $a_n \leq \alpha \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\alpha \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Se $\beta \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ então $|\beta - \alpha| \leq b_n - a_n$, $\forall n$, e $|\beta - \alpha| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, e pelo Corolário 3.7, $\beta - \alpha = 0$.

(b) $\Rightarrow (a)$[7] Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A limitado superiormente, $M \in \mathbb{R}$ um majorante de A e $a \in A$. Se $a = M$, é óbvio que a é um supremo de A. Caso contrário, contruamos indutivamente uma sequência de intervalos $[a_n, m_n]$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $[a_{n+1}, m_{n+1}] \subset [a_n, m_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, satisfazendo ($\forall n \in \mathbb{N}$): $a_n \in A$, m_n é majorante de A e $|m_{n+1} - a_{n+1}| \leq |m_n - a_n|$.

Seja $a_0 = a$ e $m_0 = M$. Supondo construído $[a_n, m_n]$ com as propriedades desejadas, consideremos $\beta_n = \frac{a_n + m_n}{2}$, o ponto médio de $[a_n, m_n]$. Se β_n é majorante de A, definindo $a_{n+1} = a_n$ e $m_{n+1} = \beta_n$, é óbvio que $[a_{n+1}, m_{n+1}]$ satisfaz as condições estipuladas. Se β_n não é majorante de A, existe $a' \in A$ com $\beta_n < a'$ e, como m_n é majorante de A, temos $a' \leq m_n$; logo, $\beta_n < a' \leq m_n$ e definimos $a_{n+1} = a'$ e $m_{n+1} = m_n$ e assim, é claro que $[a_{n+1}, m_{n+1}]$ atende as condições requeridas. Temos então $|m_n - a_n| \leq \frac{M-a}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e, pelo Corolário 3.13(b), para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|m_{n_0} - a_{n_0}| \leq \frac{M-a}{2^{n_0}} < \epsilon$. Assim, a sequência de intervalos $[a_n, m_n]$, $n \in \mathbb{N}$, cumpre as exigências (i)

[6] Bolzano e Cauchy assumiam como verdadeiro tal princípio.

[7] Raciocínios por bissecções devem-se muito a Bolzano e constam em Euclides, Elementos X.

e (ii) no enunciado do Princípio dos Intervalos Encaixantes e concluímos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,m_n]=\{p\}$, para algum $p\in\mathbb{R}$.

Por fim, provemos $p=\sup A$. Se $a\in A$ temos $a\leq m_n=a_n+(m_n-a_n)\leq p+(m_n-a_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Logo, pela hipótese (a)(ii), $a\leq p+\epsilon$, $\forall\epsilon>0$, e então $a\leq p$, $\forall a\in A$, e p é majorante de A. Ainda mais, se M é majorante de A então $p=a_n+(p-a_n)\leq M+(m_n-a_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, e por (a)(ii), $p\leq M+\epsilon$, $\forall\epsilon>0$; donde segue $p\leq M$ e, finalmente, p é o supremo de A ∎

Doravante assumimos que dado $n\in\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$, todo número real positivo x tem uma única raíz n-ésima positiva, indicada $\sqrt[n]{x}$ (v. Exercícios e Aragona [3]).

3.3 - Topologia essencial de $\mathbb{C}$

As definições topológicas que seguem possuem correspondentes óbvios em $\mathbb{R}$.

3.15 Notação. *Dado $a\in\mathbb{C}$ e $r>0$ indicamos,*

- $D_r(a)=D(a;r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<r\}$, *o* disco aberto *de centro a e raio r.*
- $\overline{D}_r(a)=\overline{D}(a;r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|\leq r\}$, *o* disco fechado *de centro a e raio r.*
- $D_r^*(a)=D^*(a;r)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-a|<r\}$, o disco reduzido *de centro a e raio r.*
- $S_r(a)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|=r\}$, *a* circunferência *de centro a e raio r.*

É claro que,

$$\overline{D}_r(a)=D_r(a)\cup S_r(a)\quad,\quad D_r(a)\cap S_r(a)=\varnothing\ \text{ e }\ D_r^*(a)=D_r(a)\setminus\{a\}\ .$$

3.16 Definição. *Seja $A\subset\mathbb{C}$, $A\neq\varnothing$. Diz-se que $a\in A$ é um ponto* interior *a A se existir $r>0$ tal que $D_r(a)\subset A$. O* interior de *A é,*

$$\mathring{A}=\{a\in A: a\ \textit{é interior a}\ A\}\ .$$

Ainda, A é um conjunto aberto *ou, simplesmente,* aberto *se $\mathring{A}=A$.*

Pedimos ao leitor verificar as afirmações contidas no exemplo abaixo.

3.17 Exemplos. *Seja $r > 0$. Os subconjuntos abaixo são considerados em $\mathbb{C}$.*

(a) O disco aberto $D(a;r)$ é um conjunto aberto (pela desigualdade triangular).

(b) $\mathbb{C}$ e o conjunto $\varnothing$, este por convenção, *são conjuntos abertos.*

(c) Dados $A_1 = \{z : Re z > 0\}$, $A_2 = \{z : Re z \geq 0\}$ e $A_3 = \{z : Re z = 0\}$ temos, $\mathring{A}_1 = A_1$, $\mathring{A}_2 = A_1 \neq A_2$ e $\mathring{A}_3 = \varnothing$.

(d) $\mathring{D}_r(a) = D_r(a)$, $\mathring{\overline{D}}_r(a) = D_r(a)$ e $\mathring{S}_r(A) = \varnothing$.

3.18 Definição. *Seja $X \subset \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$.*

- *a é* um ponto de aderência *de X se $D(a;\epsilon) \cap X \neq \varnothing$, $\forall \epsilon > 0$.*
- *O* fecho *de $X \neq \varnothing$ é $\overline{X} = \{a : a$ é aderente a $X\}$. É óbvio que $\overline{\varnothing} = \varnothing$.*
- *X é um* conjunto fechado, *ou simplesmente* fechado, *se $\overline{X} = X$.*
- *a é* um ponto de fronteira *de X se todo disco aberto centrado em a contém pontos de X e do complementar de X, $X^c = \mathbb{C} \setminus X$. Isto é,*

$$D(a;\epsilon) \cap X \neq \varnothing \quad e \quad D(a;\epsilon) \cap X^c \neq \varnothing \ , \ \forall \epsilon > 0 \ .$$

- *A* fronteira de *X é: $\partial X = \{a : a$ é um ponto de fronteira de $X\}$. É óbvio que $\partial\varnothing = \varnothing$.*
- *a é* ponto de acumulação *de X se $\forall \epsilon > 0$, $D^*(a;\epsilon) \cap X \neq \varnothing$.*
- *O* derivado de *X é :*

$$X' = \{a : a \text{ é ponto de acumulação de } X\} \ .$$

É óbvio que $\varnothing' = \varnothing$.

- *a é* ponto isolado de *X se $a \in X$ e a não é ponto de acumulação de X.*

Atenção: X é aberto se e só se X^c é fechado. De fato, se X é fechado (i.e., $\overline{X} = X$) e $b \in X^c$ então b não é ponto de aderência de X e existe $r > 0$ tal que $D(b;r) \subset X^c$. Logo, X^c é aberto. Ainda mais, se X é aberto e b é ponto de aderência de X^c então $D(b;r) \cap X^c \neq \varnothing$, $\forall r > 0$; logo, b não pertence ao aberto X e assim, $b \in X^c$.

Por $\mathbb{K}$ designamos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.19 Proposição. *Seja $X \subset \mathbb{K}$, com $\mathbb{K}$ fixo. Valem as propriedades:*

(a) $\overline{X} = \mathring{X} \cup \partial X$

(b) $\overline{X} = X \bigcup X'$

(c) X *é fechado* $\Leftrightarrow X \supset X'$.

(d) $\partial X = \overline{X} \smallsetminus \mathring{X}$

(e) X *é fechado* $\Leftrightarrow X \supset \partial X$

Prova.

(a) É óbvio que $\mathring{X} \cup \partial X \subset \overline{X}$. É claro que $\overline{X} \smallsetminus \mathring{X} \subset \partial X$; logo, $\overline{X} \subset \mathring{X} \cup \partial X$.

(b) É claro que $X \cup X' \subset \overline{X}$. É também claro que $\overline{X} \smallsetminus X \subset X'$; logo, $\overline{X} \subset X \cup X'$.

(c) Por definição e por (a) segue: X é fechado $\Leftrightarrow X \cup X' = X \Leftrightarrow X' \subset X$.

(d) É claro que $\partial X \subset \overline{X} - \mathring{X}$. Ainda, é fácil ver que $\overline{X} \smallsetminus \mathring{X} \subset \partial X$.

(e) Por definição e por (a) segue: X é fechado $\Leftrightarrow \mathring{X} \cup \partial X = X \Leftrightarrow \partial X \subset X$ ∎

3.20 Exemplos. *Consideremos os conjuntos A_i, $i = 1, 2, 3$, apresentados no Exemplo 3.17, um ponto $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$.*

(a) Temos $\overline{A_1} = A_2 = \overline{A_2}$, $A_3 = \overline{A_3}$, $\partial A_1 = \partial A_2$ (eixo imaginário) e $\partial A_3 = A_3$.

(b) $\overline{D_r(a)} = \overline{D}_r(a)$, $\overline{S_r(a)} = S_r(a)$, $\partial D_r(a) = \partial \overline{D}_r(a) = S_r(a)$ e, finalmente, $\partial D_r^*(a) = S_r(a) \cup \{a\}$.

3.21 Definição. *Seja $\mathbb{K}$ fixo. Suponhamos $X \subset Y \subset \mathbb{K}$. Dizemos que X* é denso em *Y se para todo $y \in Y$ e para todo $r > 0$, temos $D(y; r) \bigcap X \neq \varnothing$.*

3.22 Proposição. *O conjunto $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$.*

Prova. Deixamo-la ao leitor (vide Exercícios) ∎

É usual dizer que $\mathbb{C}$ tem a topologia determinada pela aplicação bijetora

$$\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{definida por } \Phi(z) = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ com } z = x + iy \in \mathbb{C} .$$

É fácil ver que um conjunto $X \subset \mathbb{C}$ é aberto (fechado) se e somente se $\Phi(X)$ é aberto (fechado) em $\mathbb{R}^2$. Desta forma, o plano complexo "herda" as características topológicas do plano cartesiano.

Doravante identificamos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2 = \Phi(\mathbb{C})$, como espaços topológicos.

3.4 - Sequência, Limite de uma Sequência e Propriedades Operatórias

A reta estendida é $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{+\infty\}$.

3.23 Definição. *Uma* sequência *em um conjunto X arbitrário, $X \neq \emptyset$, é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Indicamo-la por $x = (x_n)$ ou $x = (x_n)_{\mathbb{N}}$, onde $x_n = x(n), \forall n \in \mathbb{N}$, é o* termo geral *da sequência.*

3.24 Definição (d'Alembert 1765, Cauchy 1821). *A sequência $x = (x_n)$ em $\mathbb{K}$, é* convergente *se existir $x \in \mathbb{K}$ tal que $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|x_n - x| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$ (v. figura 3.1)*

Notação:[8] Escrevemos $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ ou $\lim x_n = x$ ou, ainda, $x_n \to x$, se $n \to +\infty$.

3.25 Proposição (Unicidade). *Se $(x_n) \subset \mathbb{K}$ é tal que $\lim x_n = x$ e $\lim x_n = y$ então $x = y$.*

Prova. Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ se $n \geq n_1$ e, $|x_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ se $n \geq n_2$. Logo, para todo $n \geq N = max(n_1, n_2)$ segue

$$|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,, \ \forall \epsilon > 0\ .$$

Donde, $x = y$ ∎

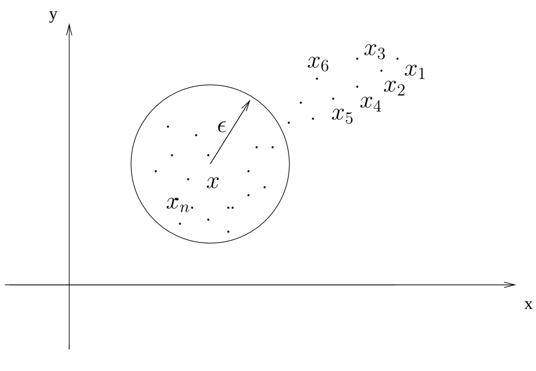

Figura 3.1: Se $\lim x_n = x$, para todo $\epsilon > 0$ é finito $\{n : x_n \notin D(x; \epsilon)\}$.

[8]A notação "lim" para indicar um "limite" foi introduzida por Cauchy, em *Cours d'Analyse* (1821). Porém, Bolzano (1817) e Weierstrass (1874), que usava a notação com $\epsilon' s$ e $\delta' s$, trouxeram a noção de limite à perfeição.

3.26 Definição. *Uma sequência é* divergente *se não é convergente.*

A sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ diverge (tende) a $+\infty$ se $\forall M \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M\,, \forall n \geq n_0$. Denotamos, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Analogamente definimos e notamos a divergência a $-\infty$.

Dizemos que existe $\lim x_n$ somente se a sequência (x_n) é convergente (com limite em $\mathbb{K}$). Sequências reais divergentes a $\pm\infty$ não são convergentes (por vezes, dizemos que existe o limite em $\overline{\mathbb{R}}$). Escrevemos $\nexists \lim x_n$ se (x_n) não é convergente. Com abuso de notação, se $(x_n) \subset \mathbb{R}$, também escrevemos $\nexists \lim x_n$ para indicar que (x_n) não é convergente e, ainda, $\lim x_n \neq \pm\infty$.

3.27 Exemplo. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\lim a^n = \begin{cases} \nexists\,, & se\ a \leq -1\,, \\ 0\,, & se\ a \in (-1,1)\,, \\ 1\,, & se\ a = 1 \\ +\infty\,, & se\ a > 1\ . \end{cases}$$

Verificação. Analisemos três casos.

Se $a \leq -1$, temos: $|a|^n \geq 1$, $\forall n$; $a^n = (-1)^n |a|^n \leq -1$ se n é ímpar; e $a^n \geq 1$, se n é par. Logo, pela Definição 3.24, não existe $\lim a_n$.

Se $|a| < 1$, dado $\epsilon > 0$ pelo Corolário 3.13(b) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a|^{n_0} < \epsilon$ e então, se $n \geq n_0$ temos $|a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \epsilon$. Pela Def. 3.24, $\lim a^n = 0$.

Se $a > 1$, dado $M > 0$ pelo Corolário 3.13(a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} > M$. Logo, se $n \geq n_0$ temos $a^n \geq a^{n_0} > M$ e, pela Definição 3.26, $\lim a^n = +\infty$ ∎

A seguir vejamos as mais usuais operações com sequências.
Dadas duas sequências (x_n) e (y_n) em $\mathbb{K}$ e um número $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos

- a soma $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$,
- a multiplicação por escalar $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$,
- o produto $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$, e
- a divisão $(\frac{x_n}{y_n})$, admitindo $y_n \neq 0\,, \forall n$.

3.28 Proposição. *Sejam* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{\mathbb{N}}$ *convergentes em* $\mathbb{K}$, *com* $\lim x_n = x$ *e* $\lim y_n = y$. *Então,*

(a) $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$.

(b) $\lim \lambda x_n = \lambda \lim x_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

(c) $\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n)$.

(d) *Se* $y_n \neq 0\,, \forall n \in \mathbb{N}$, *e* $y \neq 0$ *então* $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Prova.

(a) Dado $\epsilon > 0$, existem n_1 e n_2 tais que se $n > n_1$ então $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ e, se $n > n_2$, $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, para todo $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ segue,

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ .$$

(b) Dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que se $n > n_0$ $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{|\lambda|+1}$. Logo, $\forall n > n_0$ temos,

$$|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda|\,|x_n - x| \leq |\lambda| \frac{\epsilon}{|\lambda| + 1} \leq \epsilon\ .$$

(c) Obviamente, $|y_n - y| < 1$ se n é suficientemente grande e (y_n) é limitada. Seja $M > 0$ tal que $|y_n| \leq M\,, \forall n$ e, ainda, $M > |x|$. Dado então $\epsilon > 0$ existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que se $n > n_1$ então $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2M}$ e, se $n > n_2$, $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2M}$. Logo, para todo $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$, com $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \leq |x_n - x|\,|y_n| + |x|\,|y_n - y| < \frac{\epsilon M}{2M} + \frac{\epsilon M}{2M} = \epsilon\ .$$

(d) Escrevendo $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$ vemos pelo ítem (c) que é suficiente mostrarmos $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$. Como $y_n \to y \neq 0$, se $n \to +\infty$, e pela desigualdade triangular temos $\big||y_n| - |y|\big| \leq |y_n - y|$, segue que $|y_n| \to |y|$ se $n \to +\infty$. Logo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > \frac{|y|}{2}$, $\forall n > n_1$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - y| < \frac{\epsilon |y|^2}{2}$ se $n > n_2$. Seja $n_0 = \max(n_1\,, n_2)$. Para todo $n > n_0$ temos

$$\Big|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\Big| = \Big|\frac{y - y_n}{y_n y}\Big| = \frac{|y_n - y|}{|y_n|\,|y|} < \frac{\epsilon |y|^2}{2} \frac{2}{|y|^2} = \epsilon \quad \blacksquare$$

3.29 Exemplo. *Se $z \in \mathbb{C}$ então,*

$$\begin{cases} \lim z^n = 0\,, & se\ |z| < 1\,, \\ \lim z^n = 1\,, & se\ z = 1\,, \\ \lim |z^n| = +\infty\,, & se\ |z| > 1\,, \\ \text{a sequência } (z^n) \text{ diverge se } |z| \geq 1\,,\ \text{com } z \neq 1\,. \end{cases}$$

Verificação.

Se $|z| < 1$, pelo Exemplo 3.27 temos $\lim |z|^n = 0$ e, como $|z^n - 0| = |z|^n$, $\lim z^n = 0$.

Se $|z| > 1$, temos $|z^n| = |z|^n$ e, pelo Exemplo 3.27, $+\infty = \lim |z|^n = \lim |z^n|$.

Se $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$ é tal que existe $\lim z^n = \zeta \in \mathbb{C}$, multiplicando a sequência (z^n) por z obtemos, pela Proposição 3.28(b), $\lim z^{n+1} = z\zeta$ e, é claro, $\lim z^{n+1} = \lim z^n = \zeta$. Assim temos, $z\zeta = \zeta$ e $\zeta(z-1) = 0$; donde segue $\zeta = 0$. Como para $|z| \geq 1$ temos $|z^n| = |z|^n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, segue que a sequência (z^n) certamente não converge a zero e, por fim, concluímos que ela diverge ■

3.30 Proposição. *Sejam (x_n),(y_n) e (z_n) convergentes em $\mathbb{R}$. São válidas:*

(a) (Conservação do sinal) *Se $\lim x_n = L > 0$ então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n > 0$.*

(b) Se $x_n \geq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \geq a$.

(c) Se $x_n \geq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \geq \lim y_n$.

(d) (Confronto) *Se $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim x_n = \lim z_n = L$ então $\lim y_n = y$.*

Prova.

(a) Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $|x_n - L| < \frac{L}{2}$. Logo, $n \geq n_0$ implica $x_n \in (\frac{L}{2}, \frac{3L}{2})$ e então, $x_n > \frac{L}{2} > 0$.

(b) Se $\lim x_n = L < a$, dado $\epsilon = \frac{a-L}{2}$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $x_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$; logo, se $n \geq n_0$, obtemos $x_n < L + \frac{a-L}{2} = \frac{L+a}{2} < \frac{a+a}{2} = a$ ↯

(c) Como $x_n - y_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a afirmação segue do item (c).

(d) Por (c) temos $L = \lim x_n \leq \lim y_n \leq \lim z_n = L$ ■

3.31 Definição. *A sequência* (x_n) *é dita* crescente *(*decrescente*) se* $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_{n+1} \leq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N})$*. Em ambos os casos a sequência é dita* monótona.

Seguem formas (fracas) equivalentes do axioma do supremo que são muito úteis.

3.32 Teorema. *São equivalentes:*

(a) Axioma do supremo.

(b) Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$*, crescente e limitada superiormente, é convergente.*

(c) Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$*, decrescente e limitada inferiormente é convergente.*

Prova.

Temos,

(a) $\Rightarrow$ (b) Trivial.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Óbvio.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $X \subset \mathbb{R}$, com $X \neq \varnothing$ e X limitado superiormente. Consideremos $x \in X$ e M um majorante de X. Definamos duas sequências em $\mathbb{R}$, (x_n) e (y_n), com $(x_n) \subset X$ e crescente, e (y_n) uma sequência decrescente de majorantes em $\mathbb{R}$ da sequência (x_n), satisfazendo

$$(*)\ |y_{n+1} - x_{n+1}| \leq \frac{|y_n - x_n|}{2^n}, n \geq 1\ .$$

(Passo 1) Sejam $x_1 = x$ e $y_1 = M$. Seja $\beta = \frac{x_1+y_1}{2}$. Se β não majora X, então existe $x' \in X$, com $\beta < x'$, e assim pomos $x_2 = x'$ e $y_2 = y_1$. Se β majora X, pomos $x_2 = x_1$ e $y_2 = \beta$. Logo, (*) vale para $n = 1$.

(Passo 2) Suponhamos escolhidos $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ segundo $(*)$. Seja $\beta = \frac{x_n+y_n}{2}$. Se β não majora X, então existe $x' \in X$, com $\beta < x'$, e assim pomos $x_{n+1} = x'$ e $y_{n+1} = y_n$. Caso contrário, se β majora X, pomos $x_{n+1} = x_n$ e $y_{n+1} = \beta$.

O par de sequências $(x_n), (y_n)$ satisfaz (*) e, pelo itens (b) e (c) [os quais são equivalentes], ambas convergem. Seja $\alpha = \lim x_n$ e $\beta = \lim y_n$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M-x_1}{2^{n-1}} = 0$ então $\alpha = \beta$. Não existe, é claro, $x' \in X$ tal que $x' > \beta = \lim y_n$, e assim β é um majorante de X e não há majorante de X menor que $\beta = \lim x_n$. Logo, $\beta = \sup X$ ∎

3.5 - Subsequências e Valor de Aderência

3.33 Definição. *Dada* $a = (a_n) \subset \mathbb{K}$ *e* $I = \{n_1 < n_2 < n_3 < ..... < n_k < n_{k+1}...\} \subset \mathbb{N}$ *um conjunto infinito de índices, a sequência* (b_k), $b_k = a_{n_k}$, *é uma* subsequência *de* (a_n), *indexada em* I.

3.34 Proposição. *Se* (a_n) *converge a* L *e* (a_{n_k}) *é uma sua subsequência, então* (a_{n_k}) *converge a* L.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ com $|a_n - L| < \epsilon$, se $n \geq N$, e existe k_0 tal que $n_{k_0} > N$. Para $k > k_0$, temos $n_k > n_{k_0}$ e $|a_{n_k} - L| < \epsilon$ ∎

3.35 Lema. *Dada a sequência* $(x_n) \subset \mathbb{K}$, $L \in \mathbb{K}$ *é limite de uma sua subsequência, se, e só se,* $\forall\, \epsilon > 0$, *o conjunto de índices* $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in D(L;\epsilon)\}$ *é infinito. Isto é, se quaisquer que sejam* $\epsilon > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existe* $n > n_0$ *tal que* $|\, x_n - L| < \epsilon$.

Prova.

- $\Rightarrow$ Óbvio.
- $\Leftarrow$ Consideremos n_1 no conjunto infinito $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in D(L;1)\}$. Escolhidos $n_1 < n_2 < ... < n_k$, em $\mathbb{N}$, tais que $x_{n_j} \in D(L;\frac{1}{j})$, onde $1 \leq j \leq k$, seja n_{k+1} arbitrário no conjunto infinito $\big\{n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,....,n_k\} : x_n \in D(L;\frac{1}{k+1})\big\}$. Temos, $n_{k+1} > n_k$ e $x_{n_{k+1}} \in D(L;\frac{1}{k+1})$. Definimos indutivamente uma subsequência (x_{n_k}) tal que $|x_{n_p} - L| \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{k}$, $\forall p \geq k$. Logo, $x_{n_k} \to L$ se $k \to +\infty$ ∎

3.36 Definição. L, *como acima, é um* valor de aderência *da sequência* (x_n).

Se $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente (inferiormente), é claro que o conjunto dos seus valores de aderência também o é. Ainda mais, se $\{x_n\} \subset [\,\alpha\,,\beta\,]$, então

$$\big\{x : x \text{ é valor de aderência de } (x_n)\big\} \subset [\,\alpha\,,\beta\,]\ .$$

Alerta: O conceito de valor de aderência de uma sequência (x_n) é distinto dos de ponto de aderência ou acumulação do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Exemplos:

(1) se (x_n) é ilimitada e estritamente crescente (decrescente) então,

$$\{x : x \text{ é valor de aderência de } (x_n)\} = \emptyset \neq \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\ .$$

(2) se (x_n) é constante e $x_n = a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R}$, então

$$\{x : x \text{ é valor de aderência de } (x_n)\} = \{a\} \neq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}' = \emptyset\ .$$

3.37 Teorema. *Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ admite uma subsequência ou crescente ou decrescente.*

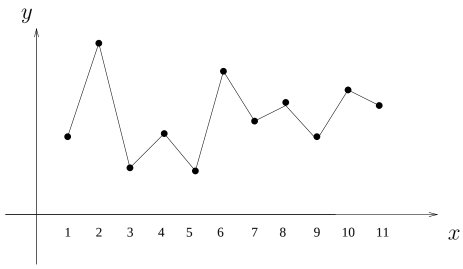

Figura 3.2: Função poligonal conectando os pontos $(n, x_n) \in \mathbb{R}^2$

Prova. Vide figura 3.2. Seja $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n > x_m \,, \forall m > n\}$. Se M é infinito, temos $M = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ e claramente (x_{n_k}) é decrescente. Se M é finito, consideremos $n_1 = 1 + \max M$. Então, $n_1 \notin M$ e existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} \le x_{n_2}$ e, analogamente, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_2} \le x_{n_3}$. Procedendo por recursão definimos uma subsequência (x_{n_k}) crescente ■

3.38 Corolário. *Toda sequência limitada, em $\mathbb{K}$, tem subsequência convergente.*

Prova. O caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ segue do Teor. 3.37 e Teor. 3.32 (b) e (c). Em $\mathbb{C}$, dada (z_n) limitada consideremos as sequências reais e limitadas: $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)$ e $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)$. Pelo caso real, existe uma subsequência $\big(\mathrm{Re}(z_{n_1}), \ldots, \mathrm{Re}(z_{n_k}), \ldots\big)$ convergente. Então, ainda pelo caso real, a sequência $\big(\mathrm{Im}(z_{n_1}), \ldots, \mathrm{Im}(z_{n_k}), \ldots, \big)$ tem subsequência convergente indexada em um subconjunto de índices $I \subset \mathbb{N}$. Logo, as subsequências $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)_{n \in I}$ e $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{n \in I}$ convergem. Portanto, $(z_n)_{n \in I}$ converge ■

3.39 Corolário. *Seja $(x_n) \subset \mathbb{K}$ e limitada. Então, (x_n) converge a $x \in \mathbb{K}$ se e somente se toda subsequência convergente de (x_n) converge a p.*

Prova.

($\Rightarrow$) Segue da Proposição 3.34.

($\Leftarrow$) Afirmação: $\lim x_n = p$. Caso contrário, existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}$, existe $n > m$ tal que $|x_n - p| > \epsilon$. Por indução, é trivial, existe uma subsequência (x_{n_k}) tal que $|x_{n_k} - p| > \epsilon$, $\forall k$. Logo, (x_{n_k}) não tem subsequência convergente a p. Porém, por ser limitada, (x_{n_k}) têm uma subsequência convergente a $L \in \mathbb{K}$, a qual é subsequência de (x_n). Logo, por hipótese, $L = p$ ↯

3.40 Corolário (Teorema de Bolzano-Weierstrass - 1874). *Todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{K}$ tem ponto de acumulação em $\mathbb{K}$.*

Prova. Seja $X \subset \mathbb{K}$, com X infinito e limitado. É óbvio que X contém uma sequência (x_n) de pontos distintos. Pelo Corolário 3.38, existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente a algum $x \in \mathbb{K}$. Claramente, x é ponto de acumulação de X ■

3.6 - Compacidade.

Já destacamos anteriormente e reconheceremos ao longo deste livro,
a importância dos conjuntos compactos. Todos os interessados
em análise tem visto que é impossível seguir sem eles.
(Frechét 1928, *Espaces abstraits, p. 66)*

As definições e os resultados nesta seção admitem óbvios análogos em $\mathbb{R}$.

3.41 Definição. *Seja K um subconjunto de $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Dizemos que K é* compacto *se K admite a* Propriedade de Heine-Borel*: toda cobertura de K por conjuntos abertos admite uma subcobertura finita. Isto é, se $K \subset \bigcup_{j \in J} O_j$, com O_j aberto em $\mathbb{R}^2$, para todo $j \in J$, então existem $j_1, ..., j_N \in J$ tais que $X \subset O_{j_1} \cup ... \cup O_{j_N}$.*

Assim, K é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ se e somente se K, identificado como um subconjunto do plano cartesiano, é compacto em $\mathbb{R}^2$.

A seguir enunciamos o principal resultado sobre compacidade que utilizaremos neste texto. A prova do teorema abaixo se encontra no Apêndice 3.1.

3.42 Teorema *Seja K um subconjunto não vazio de $\mathbb{C}$. São equivalentes:*

(a) K é compacto.

(b) K é fechado e limitado (Teorema de Heine, *1872* - Borel, *1895).*

(c) Todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K (Propriedade de Bolzano-Weierstrass*).*

(d) Toda sequência em K tem subsequência convergente em K (Frechet, *1906).*

Prova. Vide Apêndice 3.1 ■

Segue então que os intervalos fechados e limitados $[a,b]$ e os discos fechados $\overline{D}(z;r), r > 0$, são conjuntos compactos. Ainda , se (z_n) é uma sequência em $\mathbb{C}$ que converge a $z \in \mathbb{C}$ então, o conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{z\}$ é também compacto.

3.7 - Sequências de Cauchy

3.43 Definição. *A sequência $(x_n) \subset \mathbb{K}$ é uma* sequência de Cauchy *(ou* sequência fundamental) *se $\forall \epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$, $\forall\ n, m \geq N$.*

3.44 Proposição. *Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{K}$ convergente é de Cauchy.*

Prova. Seja $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq N$. Logo, para $n, m \geq N$ temos $|x_n - x_m| \leq |x_n - p| + |p - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ ■

O principal resultado nesta seção é que em $\mathbb{K}$ toda sequência de Cauchy é convergente. Tal propriedade não é válida no corpo $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{R}$, tal resultado é equivalente ao Axioma do Supremo[9].

3.45 Teorema *Toda sequência de Cauchy, $(x_n) \subset \mathbb{C}$, é convergente*[10].

Prova.

Mostremos que (x_n) é limitada. Seja N tal que $|x_n - x_m| < 1$ se $n, m \geq N$. Logo, para $n \geq N$ temos $|x_n - x_N| < 1$ e $x_n \in \overline{D}(x_N; 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_N| \leq 1\}$. Fora deste disco há finitos pontos de (x_n), claramente contidos em um disco $\overline{D}(0; R')$, com $R' > 0$. Seja $R = \max(R', |x_N| + 1)$. É óbvio que $(x_n) \subset \overline{D}(0; R)$.

Assim, pelo Corolário 3.38 existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente a p. Mostremos que (x_n) converge a p. Dado $\epsilon > 0$, existe N tal que $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$, se $n, m \geq N$ e, $k_0 \in \mathbb{N}$ com $|x_{n_k} - p| < \frac{\epsilon}{2}$, se $k \geq k_0$. Existe também, e escolhemos, um sub-índice $n_{k'} \in \mathbb{N}$ tal que $k' \geq k_0$ e $n_{k'} \geq N$. Logo, para $n \geq N$, obtemos a dupla desigualdade $|x_n - p| \leq |x_n - x_{n_{k'}}| + |x_{n_{k'}} - p| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ ■

[9] Bolzano (1817) define sequências fundamentais antes que Cauchy e supondo estabelecido que estas, em $\mathbb{R}$, são convergentes, "prova" (sem notar a circularidade) com uma argumentação perfeita (exceto pelo círculo vicioso) o Teorema do Supremo, veja [12, p. 175].

[10] Cauchy, em *Cours d'Analyse* (1821), define sequência fundamental e "prova" que uma sequência é fundamental se e só se é convergente. Obviamente (hoje), a prova tem um lapso na parte "só se" (a chamada "volta").

3.8 - O $\limsup$ e o $\liminf$.

O conjunto dos valores de aderência de uma sequência limitada em $\mathbb{R}$ é limitado e, pelo Corolário 3.37, não vazio. Assim, a definição abaixo é bem posta.

3.46 Definição.[11] *Dada $(x_n) \subset \mathbb{R}$, uma sequência limitada indicamos,*

$$\liminf x_n = \inf\left\{x : x \text{ é valor de aderência de } (x_n)\right\},$$

$$\limsup\ x_n = \sup\left\{x : x \text{ é valor de aderência de } (x_n)\right\}.$$

Se (x_n) é ilimitada superiormente pomos $\limsup x_n = +\infty$ e, se inferiormente, $\liminf x_n = -\infty$. Dada $(x_n) \subset \mathbb{R}$ dizemos que $\liminf x_n$ é o limite inferior de (x_n) e $\limsup x_n$ é o limite superior de (x_n). Utilizamos também as notações:

$$\underline{\lim}\, x_n = \liminf x_n \quad \text{e} \quad \overline{\lim}\, x_n = \limsup x_n\ .$$

3.47 Teorema. *Dada $(x_n) \subset \mathbb{R}$ limitada, $\liminf\ x_n$ e $\limsup\ x_n$ são, respectivamente, o menor e o maior valor de aderência de (x_n).*

Prova. Basta mostrarmos que ambos são valores de aderência.

Para $m = \liminf\ x_n$ e $\epsilon > 0$, por definição de ínfimo existe m', um valor de aderência, tal que $m' \in [\, m\, , m + \frac{\epsilon}{2})$. Pelo Lema 3.35, existe uma subsequência $(x_{n_k}) \subset (m' - \frac{\epsilon}{2}, m' + \frac{\epsilon}{2})$. Logo, $(x_{n_k}) \subset (m - \epsilon, m + \epsilon)$ e então, novamente pelo Lema 3.35, concluímos que m é valor de aderência.

Para $\limsup\ x_n$ aplicamos o mostrado no páragrafo acima à sequência $(-x_n)$ ∎

3.48 Observação. *Qualquer que seja a sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$, limitada ou não, convergente ou não, existem $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$, em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.*

3.49 Exemplos. *Consideremos as sequências reais (x_n) abaixo indicadas.*

(1) Se $x_n = (-1)^n$, então 1 e -1 são seus (únicos) valores aderentes, com $\limsup(-1)^n = 1$ e $\liminf(-1)^n = -1$.

(2) Se (x_n) é uma enumeração de $\mathbb{Q}$, todo $x \in \mathbb{R}$ é valor aderente de (x_n). Ainda mais, $\liminf x_n = -\infty$ e $\limsup x_n = +\infty$.

[11] Cauchy, em *Cours d'Analyse* (1821), apresenta "vagamente" o conceito de $\limsup$ no Teste da Raíz.

3.50 Corolário. *Suponha* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *e limitada. Dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq n_0$ *então* $\liminf x_n - \epsilon \leq x_n \leq \limsup x_n + \epsilon$*.*

Prova. Mostraremos apenas uma das desigualdades. A outra é análoga.

Por contradição. Dado $\epsilon > 0$, se para todo $m \in \mathbb{N}$ existir $n > m$ satisfazendo $x_n > \limsup x_n + \epsilon$, então determinamos uma subsequência de (x_n) limitada e contida em $J = [\limsup x_n + \epsilon, +\infty)$. Pelo Corolário 3.38, tal subsequência admite uma subsequência convergente (em J) que, por sua vez, também é subsequência de (x_n). Absurdo! Pois, $\limsup x_n$ é o valor máximo de aderência ■

3.51 Corolário. *Seja* (x_n) *em* $\mathbb{R}$ *e limitada. Então,* (x_n) *é convergente se e somente se* $\liminf\ x_n = \limsup\ x_n$*.*

Prova. Segue do Corolário 3.39 e Teorema 3.47 ■

Para uma sequência $(x_n) \subset [m, M] \subset \mathbb{R}$, com $m \leq M$, podemos, além da caracterização um tanto geométrica dada pelo Teorema 3.47, expressar analiticamente o $\liminf x_n$ e o $\limsup x_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$. É óbvio que $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$ e, portanto,

$$\begin{aligned} m &\leq \inf X_1 \leq \inf X_2 \leq .... \leq \inf X_n \leq \inf X_{n+1} \leq .... \leq M \\ M &\geq \sup X_1 \geq \sup X_2 \geq .... \geq \sup X_n \geq \sup X_{n+1} \geq .... \geq m\ . \end{aligned}$$

Logo, as sequências $(\inf X_n)$ e $(\sup X_n)$ são limitadas e, respectivamente, crescente e decrescente e, pelo Teorema 3.32, convergentes. Mantendo a notação temos o resultado que segue.

3.52 Teorema. *Se* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *é uma sequência limitada então*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf X_n = \liminf x_n \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} \sup X_n = \limsup x_n\ .$$

Prova. Sejam $a_n = \inf X_n$, $b_n = \sup X_n$, com $n \in \mathbb{N}$, $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$.

Mostremos que todo valor de aderência de (x_n) pertence a $[a, b]$. Consideremos $x = \lim x_{n_k}$, com (x_{n_k}) uma subsequência convergente de (x_n). Temos $a_{n_k} \leq x_{n_k} \leq b_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, pela Proposição 3.30 temos $a = \lim a_n = \lim a_{n_k} \leq x = \lim x_{n_k} \leq \lim b_{n_k} = \lim b_n = b$, o que conclui a afirmação.

Pela Definição 3.46, resta apenas mostrar que a e b são valores de aderência.

Iniciemos com a sequência crescente $(a_n) = (\inf X_n)$. Dado $\epsilon > 0$, e $n_0 \in \mathbb{N}$, como $a_n \nearrow a$ [isto é, a sequência (a_n) é crescente e convergente a a], existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq p$ implica $a - \epsilon < a_m = \inf X_m \leq a$; ainda mais, fixando $m > \max(n_0, p)$ temos $a - \epsilon < \inf X_m = \inf\{x_i : i \geq m\} < a + \epsilon$ e, por definição de ínfimo, existe $n \geq m$ tal que $\inf X_m \leq x_n < a + \epsilon$ e, para tal $n > n_0$, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Portanto, pelo Lema 3.35, a é um valor de aderência de (x_n).

Ainda, trocando (x_n) por $(-x_n)$, $-b$ é valor de aderência de $(-x_n)$ e b de (x_n)■

Com as notações[12] $\inf\limits_{m\geq n} x_m$ para $\inf X_n$ e $\sup\limits_{m\geq n} x_m$ para $\sup X_n$ escrevemos,

$$\liminf x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{m\geq n} x_m \qquad \text{e} \qquad \limsup x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{m\geq n} x_m.$$

3.9 - Exemplos Clássicos de Sequências

3.53 Exemplos. *Deixamos ao leitor completar as provas das afirmações abaixo.*

(1) **Aplicações do Axioma do Supremo:**

(a) Se $a > 1$ então $\sqrt[n]{a} \searrow 1$ [isto é, $(\sqrt[n]{a})_{\mathbb{N}}$ é decrescente e converge a 1].

Verificação.

Dados $a > 0$ e $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é claro que $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ e, portanto, $a > b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Logo, como $a > 1$, temos $1 < a^n < a^n a = a^{n+1}$ e tomando a raíz de ordem $n(n+1)$ obtemos

$$1 < a^{\frac{1}{n+1}} = (a^n)^{\frac{1}{n(n+1)}} < (a^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n}} .$$

Pelo Teorema 3.32 (b), existe $\lim \sqrt[n]{a} = L \geq 1$. Assim, para a subsequência $(\sqrt[2n]{a})$ temos, pela Proposição 3.34, $L = \lim \sqrt[2n]{a} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{a}}$ e, pela continuidade da função raíz quadrada, $\lim \sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{L}$. Assim, pela unicidade do limite segue $L = \sqrt{L}$, com $L \geq 1$, e portanto $L = 1$.

[12]Gauss, com tais notações, definiu corretamente os limites inferior e superior de uma sequência e assim provando o Teorema 2.38 acima, em um fragmento de 1800 só publicado no início do século XX.

(b) Se $0 < a < 1$ então $\sqrt[n]{a} \nearrow 1$ [isto é, $(\sqrt[n]{a})_{\mathbb{N}}$ é crescente e converge a 1].

Verificação.

É claro que $a^{n+1} < a^n$ e, analogamente ao item anterior,

$$a^{\frac{1}{n}} = \left(a^{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} < \left(a^n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n+1}} \ .$$

Pelo Teorema 3.32 (b) segue que existe $L = \lim \sqrt[n]{a}$, $L > 0$ e então, argumentando como no item anterior, $L = \lim \sqrt[2n]{a} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{L}$. Logo, $L = \sqrt{L}$, com $L > 0$, e portanto $L = 0$.

(c) A sequência $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, não é limitada superiormente.

Verificação.

Escrevendo,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + ...\frac{1}{2^n})$$

temos $\frac{1}{2^{n-1}+1} + ...\frac{1}{2^n} = \frac{2^n - (2^{n-1}+1)+1}{2^n} = \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n}$ e portanto,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n\frac{1}{2} \ .$$

Logo, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_{2^n} = +\infty$ e para $m > 2^n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, obtemos a desigualdade $s_m > s_{2^n}$. Logo, $\lim\limits_{m \to +\infty} s_m = +\infty$.

(d) A sequência (a_n), $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é crescente e satisfaz a desigualdade $a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (a_n) é convergente.

Verificação.

É claro que $n! = 1.2.3.....(n-1)n \geq 2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Logo,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{e}$$

$$1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \ .$$

(e) A sequência $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, limitada por 3, convergente e

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\frac{1}{n!} \,, \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Verificação.

Pelo binômio de Newton temos,

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}1^{n-p}(\frac{1}{n})^p = \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}.$$

Destaquemos nos coeficientes binomiais o fatorial de p, para $p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)...2.1}{(n-p)!}\frac{1}{p!} = [n...(n-p+1)]\frac{1}{p!}.$$

Reintroduzindo n^p no denominador obtemos,

$$(*)\quad \binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = \frac{n...(n-p+1)}{n^p}\frac{1}{p!} = (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n})\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{p!}.$$

Cada uma das $n+1$ parcelas $\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}$ da expansão de $(1+\frac{1}{n})^n$ é um múltiplo positivo de $\frac{1}{p!}$. Se n cresce, o número de parcelas e também o coeficiente de $\frac{1}{p!}$ crescem e assim a sequência (b_n) é crescente. De (*) obtemos $b_n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...\frac{1}{n!}$ e, pelo Exemplo 3.53 1(d), $b_n < 3$, $\forall n$. Logo, pelo Teorema 3.32, concluímos que (b_n) é convergente.

Em breve veremos que o limite de $(b_n)_{\mathbb{N}}$ é o número de Euler e.

(f) A sequência $(\sqrt[n]{n}) = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, ...)$ converge a 1.

Verificação.

Mostremos que a sequência é, a partir do terceiro termo, decrescente e limitada inferiormente por 1. De fato, é óbvio que $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e é claro que

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < n \Leftrightarrow (1+\frac{1}{n})^n < n\ ,$$

e então, como pelo exemplo 3.46 (e) acima temos $(1+\frac{1}{n})^n < 3$, segue a desigualdade $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, se $n \geq 3$. Assim, pelo Teorema 3.32 vemos que existe $L = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$, com $L \geq 1$. Argumentando como nos Exemplos 3.53 1(a) e 1(b), e utilizando a igualdade $\lim\sqrt[n]{2} = 1$ (vide a Proposição 3.28 (c), para o limite do produto de duas sequências convergentes), concluímos

$$L = \lim\sqrt[2n]{2n} = \lim\sqrt{\sqrt[n]{2n}} = \lim\sqrt{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}} = \sqrt{1.L} = \sqrt{L}\ .$$

Logo, $L = \sqrt{L}$, com $L \geq 1$; donde $L = 1$.

(2) (a) Se $a > 1$ então, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Verificação.

Escrevemos $n = 1 + \alpha, \alpha > 0$. Se $n > p$ temos,

$$\frac{(1+\alpha)^n}{n^p} = \frac{1}{n^p}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\alpha^m \geq \binom{n}{p+1}\frac{\alpha^{p+1}}{n^p} = n\frac{(n-1)(n-2)...(n-p)}{n^p}\alpha^{p+1},$$

e é claro que

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{(n-1)(n-2)...(n-p)}{n^p}\,\alpha^{p+1} = +\infty\ .$$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Verificação. O caso $z = 0$ é óbvio.

Suponhamos $z \neq 0$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, com $\frac{n_0}{|z|} > 2$. Para $n > n_0$ obtemos

$$\frac{n!}{|z|^n} = \frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}}\frac{n_0+1}{|z|}....\frac{n}{|z|} > \frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}}2^{n-n_0}\ .$$

Donde,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{|z|^n} \geq \lim_{n\to+\infty}\frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}}\,2^{n-n_0} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{z^n}{n!} = 0\ .$$

(3) (**Soma de Cesaro**[13]) Seja $(z_n) \subset \mathbb{C}$. Se $\lim z_n = z$ então,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{z_1 + ... + z_n}{n} = z\ .$$

Verificação.

Dado $\epsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $|z_n - z| < \epsilon$. Então, se $n > N$,

$$\frac{z_1 + ... + z_N + z_{N+1} + ...z_n}{n} - z = \frac{(z_1 - z) + ... + (z_N - z)}{n} + \frac{(z_{N+1} - z) + ...(z_n - z)}{n}.$$

Evidentemente, podemos escolher $n_0 > N$ tal que se $n > n_0$ a primeira parcela do 2 membro da equação acima é menor que ϵ.

Então, para $n > n_0 > N$, aplicando a desigualdade triangular na segunda parcela do 2 membro da citada equação obtemos

$$\left|\frac{(z_{N+1} - z) + ...(z_n - z)}{n}\right| \leq \frac{|z_{N+1} - z| + ... + |z_n - z|}{n} \leq \frac{(n-N)\epsilon}{n} < \epsilon \quad \blacksquare$$

[13]E. Cesaro (1859-1906), matemático italiano.

3.10 - Continuidade em $\mathbb{C}$

A definição de limite para uma função de uma variável complexa, suas propriedades e demonstrações, são "cópias"de suas correlatas para funções de uma variável real. Pois, tudo que necessitamos e utilizamos é a estrutura de corpo e a existência da função distância (módulo). Abaixo consideramos uma função na variável complexa z, indicada $f = f(z) : A \to \mathbb{C}$, com $\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}$, z_0 um ponto de acumulação de A (isto é, $z_0 \in A'$, A' o derivado de A) e w_1 e w_2 pontos em $\mathbb{C}$.

3.54 Definição. *Dado $z_0 \in A'$, dizemos $w_0 \in \mathbb{C}$ é o* limite de $f = f(z)$ quando z tende a z_0 *se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\textit{se } z \in D^*_\delta(z_0) \cap A \textit{ então } |f(z) - w_0| < \epsilon \ .$$

Escrevemos então,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \ .$$

3.55 Proposição (Unicidade do Limite). *Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$ e $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_2$ então $w_1 = w_2$.*

Prova. Dado $\epsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para $j = 1$ e para $j = 2$, $z \in D^*(z_0;\delta_j) \cap A \Rightarrow |f(z) - w_j| < \frac{\epsilon}{2}$. Fixando $z \in D^*(z_0;\delta) \cap A$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, concluímos então $|w_1 - w_2| \leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ ■

Considerando a identificação usual para um número complexo $z = x + iy$, com $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$, escrevamos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, onde $u(x,y) = \mathrm{Re}f(z)$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}f(z)$ são funções das variáveis $x, y \in \mathbb{R}$.

Abaixo consideramos os números complexos $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w_0 = u_0 + iv_0$.

3.56 Proposição. *É válida a propriedade,*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \ \textit{e} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \ .$$

Prova. Imediata da Definição 3.57 pois,

$$0 \ \leq \ |u(x,y) - u_0|, |v(x,y) - v_0| \ \leq \ |f(z) - w_0| \ \leq \ |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| \quad ■$$

3.57 Proposição. *Consideremos as funções* $f_1 : A \to \mathbb{C}$ *e* $f_2 : A \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in A'$. *Suponnhamos* $\lim\limits_{z\to z_0} f_j(z) = w_j \in \mathbb{C}$, *com* $j = 1, 2$, *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Valem as propriedades:*

(a) $\lim\limits_{z\to z_0} \lambda f_1(z) = \lambda w_1$.

(b) $\lim\limits_{z\to z_0} (f_1 + f_2)(z) = w_1 + w_2$.

(c) $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) f_2(z) = w_1 w_2$.

(d) $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{w_1}$, *se* $w_1 \neq 0$.

Prova.

(a) Se $\lambda \neq 0$, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $z \in D^*_\delta(z_0) \cap A$ então $|f_1(z) - w_1| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ e portanto $|\lambda f_1(z) - \lambda w_1| < \epsilon$. O caso $\lambda = 0$ é trivial.

(b) Dado $\epsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $z \in D^*_{\delta_j}(z_0) \cap A$, $j = 1$ e $j = 2$, então $|f_j(z) - w_j| < \frac{\epsilon}{2}$, $j = 1$ e $j = 2$. Logo, se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, $z \in D^*_\delta(z_0) \cap A \Rightarrow |[f_1(z) + f_2(z)] - [w_1 + w_2]| \le |f_1(z) - w_1| + |f_2(z) - w_2| < \epsilon$.

(c) e (d) Deixamos ao leitor ■

Para definirmos a continuidade de uma função em um ponto é necessário que este pertença ao domínio da função mas não é necessário que seja um ponto de acumulação do domínio.

3.58 Definição. *Seja* $f : A \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in A$.

(a) f contínua *em* z_0 *se* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que: se* $z \in D(z_0; \delta) \cap A$ *então* $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ *ou, equivalentemente,* $f\big(D(z_0; \delta) \cap A) \subset D(f(z_0); \epsilon)$

(b) f *é* contínua em A *se é contínua em todos os pontos de* A.

Assim, toda função $f : A \to \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos isolados de A. Se z_0 é ponto de acumulação de A então, f é contínua em z_0 se e somente se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \ .$$

Como exemplo trivial (e fundamental) temos que a função módulo, indicada $|.|:\mathbb{C} \longrightarrow [0,+\infty)$, definida por $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ é contínua. De fato, pela desigualdade triangular temos $\big||z|-|z_0|\big| \leq |z-z_0|$, quaisquer que sejam z e z_0 em $\mathbb{C}$. Assim, dado $\epsilon > 0$ e escolhendo $\delta = \epsilon$ segue que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow \big||z| - |z_0|\big| < \epsilon$. Logo, $\lim\limits_{z\to z_0} |z| = |z_0|$.

3.59 Proposição. *Sejam $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$ contínuas em $z_0 \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(a) As funções λf_1, $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ são contínuas em z_0.

(b) Se $f_1(z_0) \neq 0$, a função $\frac{1}{f_1} : \{z \in A : f_1(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0.

Prova.

Se z_0 é ponto isolado de A é óbvio que (a), (b) e (c) valem.

Se z_0 é ponto de acumulação de A então as afirmações são consequências óbvias da Proposição 3.57 e do comentário acima ■

3.60 Definição. *Dadas $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$, com $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$ e $f(A) \subset B$, a* função composta *$g \circ f : A \to \mathbb{C}$ é dada por $(g \circ f)(z) = g(f(z))$, $z \in A$.*

3.61 Proposição. *Sejam $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$, com $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$ e $f(A) \subset B$. Suponhamos ainda que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \in B$ e g é contínua em w_0. Então,*

$$\lim_{z\to z_0} g\big(f(z)\big) = \lim_{w\to w_0} g(w) = g(w_0) \ .$$

Prova.

Por hipótese, dado $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $g\big(D_r(w_0)\big) \subset D_\epsilon\big(g(w_0)\big)$ e, para tal r, existe $\delta > 0$ tal que $f\big(D^*_\delta(z_0)\big) \subset D_r(w_0)$. Consequentemente temos,

$$g\Big(f\big(D^*_\delta(z_0)\big)\Big) \subset g\big(D_r(w_0)\big) \subset D_\epsilon\big(g(w_0)\big) \ ■$$

3.62 Corolário. *Se $f : A \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0, $g : B \to \mathbb{C}$ é contínua em $f(z_0)$ e $f(A) \subset B$ então, a função $g \circ f$ é contínua em z_0.*

Prova. Segue trivialmente da Proposição 3.61 e da definição de continuidade ■

3.63 Proposição. *Seja* $A \subset \mathbb{K}$ *e* $z_0 \in A'$. *Suponhamos que* $f : A \to \mathbb{K}$ *é uma função tal que* $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$. *Seja* $(z_n) \subset A$ *tal que* $\lim z_n = z_0$. *Então temos,*

(a) $\lim f(z_n) = L$.

(b) Se f *é contínua*[14] *em* z_0 *então,* $\lim f(z_n) = f(z_0)$.

Prova.

(a) Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ implica $|f(z) - L| < \epsilon$. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_0| < \delta$ se $n \geq n_0$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow |f(z_n) - L| < \epsilon$.

(b) Segue de (a) ∎

3.64 Corolário. *Seja* $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ *uma função e* $z_0 \in A$. *Então,* f *é contínua em* z_0 *se e somente se temos* $\lim f(z_n) = f(z_0)$ *para toda sequência* $(z_n) \subset A$ *tal que* $\lim z_n = z_0$.

Prova. Solicitamos ao leitor verificar ∎

3.65 Teorema. *Seja* $f : K \to \mathbb{C}$ *contínua e* K *compacto em* $\mathbb{C}$. *Então,* $f(K)$ *é compacto.*

Prova. Dada uma sequência $\big(f(z_n)\big)$ em $f(K)$, com $(z_n) \subset K$, pelo Teorema 3.42 existe uma subsequência (z_{n_k}) convergente a um ponto $z \in K$. Pelo Corolário 3.64 segue $\lim f(z_{n_k}) = f(z)$. Logo, pelo Teorema 3.42, $f(K)$ é compacto ∎

3.66 Definição. *Seja* $f : A \to \mathbb{C}$. *Dizemos que* f *é* limitada *se existe* $M > 0$ *tal que* $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in A$.

Se $X \subset \mathbb{R}$ é tal que X é não vazio e limitado superiormente (inferiormente) então, pela Propriedade de Aproximação 3.4 temos que $\sup X \in \overline{X}$ ($\inf X \in \overline{X}$). Desta forma, se X é fechado e limitado temos que $\sup X$ e $\inf X$ pertencem a X. Isto é, X tem máximo e mínimo.

3.67 Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Seja* K *compacto em* $\mathbb{C}$ *e* $f : K \to \mathbb{R}$ *contínua. Então,* f *assume máximo e mínimo em* K.

Prova. Pela Teorema 3.65, $f(K)$ é compacto. Logo, $f(K)$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}$. Então, pelo comentário acima, $f(K)$ tem máximo e mínimo ∎

[14] Bolzano, em 1817, é o primeiro a fornecer a definição moderna de função contínua.

3.11 - Conjuntos Conexos

Se $X \subset \mathbb{R}$ então: $\{U \cap X : U \text{ é aberto em } \mathbb{R}\} = \{V \cap X : V \text{ é aberto em } \mathbb{C}\}$.

Se A e B são conjuntos disjuntos indicamos a união disjunta $A \cup B$ por $A \uplus B$.

3.68 Definição. *Seja $X \subset \mathbb{K}$. Um subconjunto A de X, é* aberto em X *se existe um aberto O em $\mathbb{K}$ tal que $A = O \cap X$. Analogamente, um subconjunto B de X, é* fechado em X *se existe um fechado F em $\mathbb{K}$ tal que $B = F \cap X$.*

É fácil ver que A é aberto em X se e só se $X \smallsetminus A$ (o complementar de A em relação a X) é fechado em X. Basta notarmos que dados X e O em $\mathbb{K}$ temos,

$$A = O \cap X \Leftrightarrow X \smallsetminus A = (\mathbb{K} \smallsetminus O) \cap X,$$

e também que um conjunto O é aberto em $\mathbb{K}$ se e só se $\mathbb{K} \smallsetminus O$ é fechado em $\mathbb{K}$.

Os conjuntos X e $\emptyset$ são ambos abertos e fechados em X.

3.69 Definição. *Seja $X \subset \mathbb{K}$.*

- *X é* conexo *se os únicos subconjuntos de X que são abertos em X e também fechados em X são: X e $\emptyset$*
- *X é* desconexo *se X não é conexo.*

Intuitivamente, um conjunto conexo é formado por "um único pedaço".

Dado $X \subset \mathbb{K}$, temos que X é desconexo se e somente se existe $A \subset X$, com $A \neq \emptyset$ e $A \neq X$, tal que A é aberto em X e também fechado em X. Assim, decompomos $X = A \uplus (X \smallsetminus A)$, A e $X \smallsetminus A$ não vazios, disjuntos e abertos em X. O par (A, B), com $B = X \smallsetminus A$, é chamado uma cisão de X.

Assim, X é conexo se e somente se X não admite uma cisão.

É fácil ver que: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ é desconexo, com o par $\big((-\infty, 0), (0, +\infty)\big)$ uma cisão de $\mathbb{R}^*$; $X = \emptyset$ é conexo; todo conjunto unitário $X = \{x\} \subset \mathbb{K}$ é conexo.

3.70 Definição. *Seja $X \subset \mathbb{C}$. Dizemos que X é* conexo por caminhos *se dados arbitrários $p \in X$ e $q \in X$ então, existe uma curva (ou caminho) contínua*

$$\gamma : [0,1] \to X \quad \textit{tal que} \quad \gamma(0) = p \quad \textit{e} \quad \gamma(1) = q \ .$$

Dizemos que a curva γ une, ou conecta, os pontos p e q.

3.71 Definição. *Dizemos que X, $X \subset \mathbb{K}$, é* convexo *se dados $p \in X$ e $q \in X$ então, o segmento $\overline{pq} = \{p + t(q-p) : 0 \le t \le 1\}$ está contido em X.*

É óbvio que todo conjunto convexo é conexo por caminhos. A proposição abaixo nos mostra uma ampla classe de conjuntos conexos.

3.72 Proposição. *Seja $X \subset \mathbb{C}$, com X conexo por caminhos. Então, X é conexo.*

Prova. Suponhamos existir uma cisão (A, B) de X. Então, existem $p \in A$ e $q \in B$, $p \neq q$. Seja $\gamma : [0,1] \to X = A \cup B$ uma curva contínua, $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Seja $T = \{t \in [0,1] : \gamma(t) \in A\}$. Obviamente T é não vazio e limitado superiormente. Sejam O_1 e O_2 abertos em $\mathbb{K}$ tais que $A = O_1 \cap X$ e $B = O_2 \cap X$. Então, $\gamma(1) = q \in O_2$ e, como γ é contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma\big((1-\epsilon, 1] \big) \subset O_2 \cap X = B$. Similarmente, $\gamma\big([0, \epsilon) \big) \subset A$. Portanto, $t_0 = \sup T \in (0,1)$ e, $t_0 \in A$ ou $t_0 \in B$.

Se $t_0 \in A = O_1 \cap X$ então existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma\big((t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \big) \subset O_1 \cap X = A$ ↯

Se $t_0 \in B = O_2 \cap X$ então existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma\big((t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \big) \subset O_2 \cap X = B$. Porém, por definição de sup, no intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0]$ existe t_1 tal que $\gamma(t_1) \in A$ ↯

Chamamos $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo se dados $a, b \in X$ então $\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} \subset X$. Assim, o conjunto $\varnothing$ e também todo conjunto unitário $\{x\} \subset \mathbb{R}$ são intervalos.

3.73 Corolário. *Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ contínua. Então, a imagem de γ é conexa.*

Prova. A imagem de γ é um conjunto conexo por caminhos. Logo, conexo ∎

3.74 Teorema. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então, X é conexo se e só se X é um intervalo.*

Prova. Já vimos que $X = \varnothing$ e X unitário são conexos e também intervalos.

$\Rightarrow$ Sejam $a, b \in X$ e $c \in (a,b) \setminus X$. Então, $\big((-\infty, c) \cap X, (c, +\infty) \cap X \big)$ cinde X↯

$\Leftarrow$ Todo intervalo é convexo. Logo, conexo por caminhos e então, conexo ∎

3.75 Teorema do Valor Intermediário. *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Seja c um número real entre $f(0)$ e $f(1)$. Então, existe $t \in [0,1]$ tal que $f(t) = c$.*

Prova. Pelo Corolário 3.73, a imagem de f é um conexo em $\mathbb{R}$ e portanto, pelo Teorema 3.74, um intervalo ∎

3.11 - As Funções Logaritmo e Exponencial Reais

3.76 Definição. A função logaritmo real, $\log : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$, *é dada por*

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \; .$$

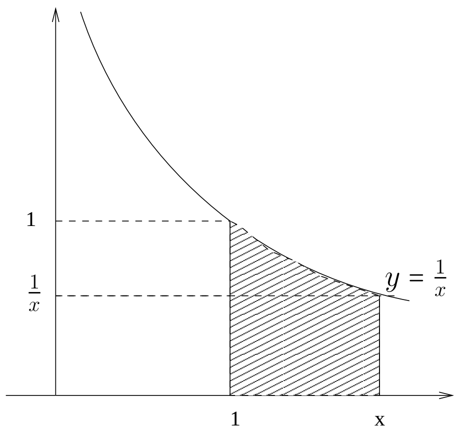

Figura 3.3: A área da região hachurada é $\log x$

3.77 Teorema. *A função* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *satisfaz,*

(a) Se $0 < x < 1$, $\log x < 0$*;* $\log 1 = 0$ *e,* *se* $x > 1$, $\log x > 0$.

(b) É uma função estritamente crescente.

(c) É infinitamente derivável, com $\log'(x) = \frac{1}{x}$ *e* $\frac{d^m \log}{dx^m}(x) = \frac{(-1)^{m+1}(m-1)!}{x^m}, m \geq 1$.

Prova. Trivial e a deixamos ao leitor ■

3.78 Proposição. *Para* x *e* y *positivos tem-se* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Prova. Temos,

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \log(x) + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \; .$$

Na última integral, a mudança de variável, de t para s, $t = sx$, $1 \leq s \leq y$, $dt = xds$, acarreta

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{xds}{sx} = \log(y) \quad ■$$

3.79 Corolário. *Seja* $x > 0$. *Para* $r \in \mathbb{Q}$ *tem-se* $\log(x^r) = r\log(x)$.

Prova.

Pela Proposição 3.78 o resultado é óbvio se $r = n \in \mathbb{N}$ e, neste caso, $x^n x^{-n} = 1$ e então, $0 = \log(1) = \log(x^n x^{-n}) = \log(x^n) + \log(x^{-n})$ e portanto, $\log(x^{-n}) = -\log(x^n) = -n\,\log(x)$. Se $r = \frac{p}{q}$, com p, $q \in \mathbb{Z}^*$, temos as três seguintes identidades: $p\,\log\,x = \log\,x^p = \log\,(x^{\frac{p}{q}})^q = q\,\log\,x^{\frac{p}{q}}$. Donde segue, $\log\,x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\log\,(x)$ ■

3.80 Corolário. *A função* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é inversível e a inversa é contínua.*

Prova.

Sobre a imagem, a função $\log(\,.\,)$ é obviamente sobrejetora. Pelo Teorema 3.77(b) a função $\log(\,.\,)$ é injetora. Pelo Teorema do Valor Intermediário, a imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo. É então fácil ver que $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ pois, se $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} \log\,2^{\pm n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \pm n\,\log\,2 = \pm\infty$.

Afirmação: a função $\log^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é contínua. Consideremos um número $y_0 \in \mathbb{R}$ e um intervalo $J = [a, b] \subset (0, \infty)$ tal que $\log^{-1}(y_o) \in (a, b)$. Como a função $\log(\,.\,)$ é crescente temos que $y_0 \in I = (\log a, \log b)$. Donde, $\log^{-1}(I) \subset (a, b)$ ■

3.81 Definição. *Indicamos por* e *o único número real tal que* $\log e = 1$.

3.82 Definição. A função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *é a inversa da função logaritmo.*

3.83 Teorema. *A função exponencial real é uma bijeção crescente de* $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{R}^+$ *satisfazendo,*

(a) É infinitamente diferenciável e $\exp'(x) = \exp(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(b) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(c) Se $r \in \mathbb{Q}$ *então,* $\exp(r) = e^r$.

Prova.

(a) Pelo teorema da função inversa exp é derivável e, pela regra da cadeia,

$$1 = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\log \circ \exp)(x) = \log'[\exp(x)]\exp'(x) = \frac{1}{\exp(x)}\exp'(x).$$

(b) Temos,

$$\log[\exp(x+y)] = x+y \ \text{ e } \ \log[\exp(x)\exp(y)] = \log[\exp(x)]+\log[\exp(y)] = x+y\,.$$

(c) Pelo Corolário 3.79 e definição de e tem-se $\log e^r = r\log(e) = r$ e, é óbvio, $\log\exp(r) = r$ ∎

3.84 Notação. $\exp(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

3.85 Definição. *Para* $a \in \mathbb{R}, a > 0$, *e* $x \in \mathbb{R}$, *pomos* $a^x = e^{x\log a}$.

3.86 Proposição. *Temos,* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$.

Prova. Pela fórmula de Taylor[15] para $f = \exp$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, existe $\bar{x}$ entre 0 e x tal que

$$e^x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}\,x^{n+1} \quad .$$

Se $x \in [-R, R]$, $R > 0$ e fixo, temos $\bar{x} \in [-R, R]$, com $f^{(j)}(x) = e^x$, $f^{(j)}(0) = 1$, $f^{(n+1)}(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$ e

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le e^{\bar{x}}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \le e^R\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \quad .$$

Para $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ temos $|e^x - S_n(x)| \le e^R\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}, \forall |x| \le R$, e $S_n(x)$ converge a $\exp(x)$ (uniformemente sobre $[-R, R]$, veremos) pois, pelo Exemplo 3.53 2(b), $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{R^n}{n!} = 0$, ∎

3.87 Teorema. *O número* **e** *é irracional e*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) \quad .$$

Prova.

Pela Proposição 3.86 para $x = 1$ [vide Ex. 3.53 1(d) e 1(e)] basta mostrarmos $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$, quando $x \to +\infty$. Como $\log'(y) = \frac{1}{y}$ temos $1 = \log'(1)$ e portanto, pela definição de derivada,

$$1 = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y) - \log 1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0}\log(1+y)^{\frac{1}{y}} \ .$$

[15] O inglês B. Taylor (1685-1731) a publicou em 1715. Porém, já era conhecida pelo escocês J. Gregory (1638-1675) e, na Índia, antes de 1550.

Assim, $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim\limits_{y\to 0} e^{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}} = e^1 = e$ e, substituindo $y = \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Quanto à irracionalidade de e, notemos que se $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$ então,

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ... < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + ...\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n\,n!}\ .$$

Supondo e racional, escrevendo $e = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ e $mdc(p,q) = 1$, temos $0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}$, com o número $q!e$ e o número $q!s_q = q!\,(1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!})$ inteiros. Logo, $q!\,(e - s_q)$ é um inteiro entre 0 e 1 $\lightning$

Verificando que $0 < e - s_7 < 10^{-4}$, obtemos as primeiras três casas decimais de $e = 2,718....$

A função e^x tem limites $\pm\infty$ em $\pm\infty$, derivadas primeira e segunda estritamente positivas, é estritamente crescente e com concavidade voltada para cima. Os gráficos de e^x e $\log x$, funções inversas uma da outra, são simétricos em relação à bissetriz principal (v. figura 3.4).

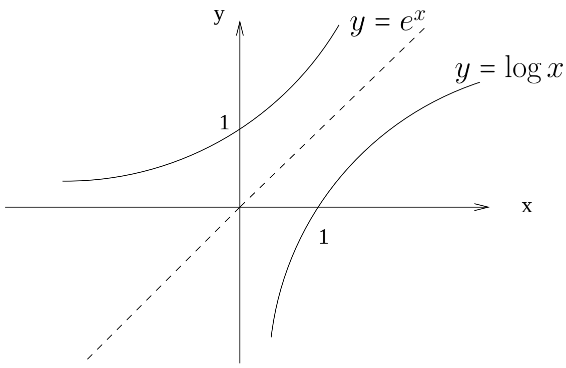

Figura 3.4: Gráficos de $y = e^x$ e $y = \log x$

Apêndice 3.1 - Comentários sobre e e π.

Os números e e π são mais sofisticados que o outrora desafiador irracional $\sqrt{2}$, o qual satisfaz $x^2 - 2 = 0$. Dizemos **algébricos** os números x que satisfazem uma equação polinomial da forma,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,, a_i \in \mathbb{Z}\,, 0 \leq i \leq n\,,\ \text{com } a_0 \neq 0\ \ ,$$

por exemplo, $\sqrt[7]{4 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[5]{11}}$ é algébrico mas não provaremos este fato aqui. Números não algébricos são **transcendentes** e e e π são dois exemplos, sendo que π surgiu na antiguidade, como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. O número e é "recente", sendo o escocês John Neper (1550-1617) e Jacques Bernoulli, citado na introdução deste capítulo, dois dos principais nomes ligados a sua origem.

Neper objetivava simplificar operações com grandes números. Para manter próximos os termos numa progressão de potências inteiras de um número dado é mister toma-lo próximo de 1. Neper escolheu $1 - 10^{-7} = 0,9999999$ (vide exerc ??) e, para simplificar multiplicou cada potência por 10^7. Então, se $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, L é o **logaritmo de Neper** de N. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos algo próximo de um sistema de logaritmos de base $1/e$ pois $(1 - 1/10^7)^{10^7}$ é próximo de $\lim_{n\to\infty}(1 - 1/n)^n = 1/e$.

Desde a Grécia antiga, procurou-se obter a "quadratura do círculo" por meio de régua e compasso. Isto é, a partir de um círculo de raio 1 contruir um quadrado de igual área. Para tal é necessário um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$. O comprimento de um segmento construtível a partir da unidade com régua e compasso (**número contrutível**) , pode ser obtido a partir das operações elementares, $+$, $-$, . e $\div$ e, ainda, $\sqrt{.}$ e é portanto um número algébrico. Em 1882 o alemão C. Lindemann (1852-1939) mostrou que π é transcendente e consequentemente não construtível e irracional.

A prova acima de que e é irracional é bem mais simples que a "elementar" da irracionalidade de π [Sp], existindo uma prova simples de que π é transcendente que requer métodos "avançados" em álgebra (Teoria de Galois [16]). Isto não deve

[16]Évariste Galois (1811-1832), jovem francês, escreveu parte de suas descobertas na noite anterior à sua morte em duelo por motivo passional. Liouville as publicou em 1846.

causar surpresa pois é comum que argumentos “elementares” sejam mais difíceis que os ”avançados”. Em 1844 o francês J. Liouville (1809-1882) mostrou que e não é construtível e em 1873 seu compatriota C. Hermite (1822-1901) demonstrou a transcendência de e, para a qual existe uma prova elementar, baseada numa idéia do germânico D. Hilbert (1862-1943) [Sp].

Cabe salientar que as provas da transcendência de e e π são praticamente as mesmas o que surprende visto que tais números tem origens bem distintas. Obviamente tal fato é curioso afinal, qual relação pode haver entre e e π ? A resposta a esta questão virá com a apresentação da função exponencial complexa e a fórmula de Euler na seção 4.4.

As notações e e π (e também i para $\sqrt{-1}$) devem-se a Euler. Provavelmente a letra e tenha sido adotada por ser a primeira letra de exponencial.

Apêndice 3.2 - Compacidade.

As definições e os resultados neste apêndice admitem óbvios análogos em $\mathbb{R}$.

3.88 Notações e Definições. *Sejam X, Y e X_n, $n = 1, 2, ...$, conjuntos em $\mathbb{R}^2$.*

(a) Se $X \subset \mathbb{R}^2$ escrevemos $X^c = \mathbb{R}^2 \setminus X$.

(b) A sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente *se $X_n \subset X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Analogamente, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é* decrescente *se $X_n \supset X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

3.89 Teorema. *Seja $K \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. São equivalentes:*

(a) K é compacto.

(b) K é fechado e limitado.

(c) Todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K.

(d) Toda sequência em K admite subsequência convergente em K.

Prova.

$(a) \Rightarrow (b)$

Dado $z \in K^c$, consideremos a sequência decrescente de fechados $\overline{D}(z; 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{D}(z; 1/n) = \{z\}$. Passando ao complementar temos $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{D}(z; 1/n)^c = \{z\}^c = \mathbb{C} \setminus \{z\}$, uma óbvia cobertura de K pela reunião de uma sequência crescente de abertos. Por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \overline{D}(z; 1/N)^c$. Passando novamente ao complementar temos, $K^c \supset \overline{D}(z; 1/N) \supset D(z; 1/N) \supset \{z\}$. Logo, K^c é aberto e K é fechado.

Mostremos que K é limitado. Já que $K \subset \bigcup_{z\in K} D(z; 1)$, existem $z_1, ..., z_n$ em K tais que $K \subset D(z_1; 1) \cup ... \cup D(z_n; 1)$. É claro que $K \subset D\big(0; |z_1| + ... + |z_n| + 1\big)$.

$(a) \Rightarrow (c)$

Seja $Z \subset K$, Z sem ponto de acumulação em K. Então, dado $z \in Z$ existe $r = r(z) > 0$ tal que $D(z; r) \cap K = \{z\}$. Ainda, dado $z \in K \setminus Z$, existe $r = r(z) > 0$ tal que $D(z; r) \cap Z = \emptyset$. Por hipótese, a cobertura por abertos $K \subset \bigcup_{z\in K} D(z; r(z))$ admite subcobertura finita: $\bigcup_{j=1}^{j=n} D(z_j; r_j) \supset K \supset Z$, com $r_j = r(z_j), j = 1, ..., n$. Como cada um dos discos $D(z_j; r_j)$, $j = 1, ..., n$, contém no máximo um ponto de Z, segue que Z é finito. Logo, todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K.

(c) $\Rightarrow (d)$

Seja (z_n) uma sequência em K. Se $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $J = \{n \in \mathbb{N} : z_n = z_N\}$ é infinito. Escrevendo $J = \{n_1 < n_2 < ...\}$ temos que a subsequência (z_{n_k}) é constante e converge a z_N. Se Z é infinito, por hipótese Z tem um ponto de acumulação $z \in K$. Então, todo disco $D(z; r)$, $r > 0$, intersecta infinitos pontos de Z. Assim, é fácil ver que existem índices $n_1 < ... < n_k < ...$ tais que $z_{n_k} \in D(z; 1/k)$. Logo, (z_{n_k}) converge a $z \in K$.

(b) $\Rightarrow (d)$

Seja (z_n) uma sequência em K. Como K é limitado, (z_n) é limitada. Pelo Corolário 3.37, (z_n) admite uma subsequência convergente a $w \in \mathbb{C}$. Logo, $w \in \overline{K}$. Como K é fechado, segue que $w \in K = \overline{K}$.

(d) $\Rightarrow (a)$

Seja O um aberto arbitrário em $\mathbb{C}$. Para cada $z \in O$, existe $n = n(z) \in \mathbb{N}$ tal que $D(z; 1/n) \subset O$. Então, como $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$, segue que existe $w = w(z; n) \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tal que $|w - z| < \frac{1}{2n}$. É fácil ver que $z \in D(w; \frac{1}{2n}) \subset O$. Logo, $O = \bigcup_{z \in O} D(w(z; n); \frac{1}{2n})$. Assim, todo aberto O é uma união enumerável de conjuntos da coleção enumerável $\mathcal{C} = \{D_1, D_2, ..., D_n, ...\}$ de discos abertos centrados em pontos de coordenadas racionais e de raio racional.

Desta forma dada $\bigcup_{j \in J} O_j$ uma cobertura de K por conjuntos abertos, podemos extrair dela uma subcobertura enumerável de K, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Ainda, trocando O_n por $O_1 \cup ... \cup O_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perder a generalidade, que (O_n) é uma sequência crescente de abertos.

Suponhamos que $\bigcup_n O_n$ não admite uma subcobertura finita. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K \setminus O_n$. Por hipótese, a sequência (z_n) tem subsequência (z_{n_k}) convergente a $z \in K$. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z \in O_N$. Logo, existe $n_k > N$ tal que $z_{n_k} \in O_N$. Mas, por construção, $z_{n_k} \notin O_{n_k} \supset O_N$ $\lightning$

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 3

1. Determine $\sup X$, $\inf X$, $\max X$ e $\min X$ em cada um dos seguintes casos:

   a) $X =]a,b[\,,\ \ ]a,b]\,,\ \ [a,b[$ ou $[a,b]$; com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

   b) $X =]-\infty, a]\,,\ \ [a, +\infty[\,,\ \ ]-\infty, a[$ ou $X =]a, +\infty[$; com $a \in \mathbb{R}$.

   c) $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

2. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, com $X \subset Y$. Prove que

$$\inf\, Y \leq \inf\, X \leq \sup\, X \leq \sup\, Y \ .$$

3. Seja X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}$. Definamos o conjunto $X + Y = \{x + y : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Verifique as afirmações:

   (a) $X + Y$ é limitado

   (b) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$

   (c) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

4. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios e arbitrários em $\mathbb{R}$. Então vale,

$$\sup X + \sup Y = \sup(X + Y) \ ,$$

   com a convenção $\sup X = +\infty$ se X não é majorado superiormente.

Atenção: este resultado é importante no capítulo 6.

5. Sejam X e Y subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que: $x \leq y$, $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$. Mostre que:

   a) $\sup X \leq \inf Y$.

   b) $\sup X = \inf Y$ se e só se, $\forall \epsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \epsilon$.
   Sugestão: No ítem (b), use a Propriedade de Aproximação.

6. Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Suponha que X é limitado inferiormente e defina $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Verifique que o conjunto $-X$ é limitado superiormente e que $\sup\,(-X) = -\inf\, X$.

7. Seja X um subconjunto não vazio e limitado em $\mathbb{R}$. Dado $c \in \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, mostre que o conjunto $cX = \{cx \mid x \in X\}$ é limitado e

$$\sup(cX) = c \sup X \quad \text{e} \quad \inf(cX) = c \inf X \ .$$

Enuncie e verifique o que ocorre se $c < 0$.

8. Sejam X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$. Defina $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X \ \text{ e } \ y \in Y\}$. Mostre que $X \cdot Y$ é limitado e que

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \sup Y \ \text{ e } \ \inf(X \cdot Y) = \inf X \inf Y \ .$$

9. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ para

(a) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(c) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx \,, \alpha \geq 1$.

(d) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

(e) $a_n = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n+1}}$.

(f) $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

(g) $a_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

(h) $a_n = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n)$.

10. Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Mostre que

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$

(b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

(c) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ e $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

Ainda mais, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

(d) $(\liminf x_n)(\liminf y_n) \leq \liminf(x_n y_n)$

(e) $\limsup(x_n y_n) \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$.

11. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots..$ é convergente a 2.

12. Calcule:

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$

(c) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$

13. Suponha que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Verifique que:

$$(a) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n}{n} = a\ .$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n} = a\,, \qquad \text{se } a > 0 \text{ e } a_n > 0\,, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Sugestão: Em (b) utilize (a).

14. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ para

$$(a) \qquad a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}}{n}\ .$$

$$(b) \qquad a_n = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \ldots\ldots + \sqrt[n]{2}}{n}\ .$$

Sugestão: Utilize o exercício 13.

15. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para $a_n = \frac{1}{(n\log^2 n)^p}\ , n \geq 2\,, p \in \mathbb{R}$.

16. Sejam $a > 0$ e $b > 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)\ .$$

17. Calcule os limites da razão, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, e da raíz, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, ou pelo menos um deles, em cada um dos casos abaixo.

   (a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

   (b) $a_n = n$.

   (c) $a_n = \frac{1}{n^p}\ , p \in \mathbb{R}$.

   (d) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^p}$.

18. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}\,, a_n > 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L\ .$$

Retorne ao exercício 17 e, se necessário, complete-o.

19. Mostre que se $\lim z_n = 0$ e (w_n) é limitada então, $\lim z_n w_n = 0$.

20. Prove que todo polinômio com coeficientes reais e de grau ímpar admite ao menos uma raíz real.

21. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, ..., n$. Seja z_0 arbitrário em $\mathbb{C}$. Mostre que existem coeficientes $b_0, ..., b_n$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + ... + b_n(z - z_0)^n \ , \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.

22. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ um polinômio complexo, $n \geq 1$. Mostre:

   (a) $|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - ... - |a_1||z| - |a_0|, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

   (b) $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$.

   (c) Existe um raio $R > 0$ tal que $|p(z)| > |p(0)| + 1000$ se $|z| > R$.

   (d) A função $|p(z)|$, com $z \in \overline{D}(0; R)$, tem valor mínimo num ponto z_0.

   (e) O ponto z_0 é o ponto de mínimo absoluto da função $|p(z)|$, $z \in \mathbb{C}$.

23. Mostre que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (parte do Teorema 3.11).

24. Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (parte do Teorema 3.11).

25. Mostre que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$ (Proposição 3.22).

26. Seja $a > 0$. Mostre que existe um único $b > 0$ tal que $b^2 = a$. Dizemos que b é a raíz quadrada de a: $b = \sqrt{a}$.

    Sugestão: Adapte a prova da Proposição 3.9. Considere $X = \{x > 0 : x^2 < a\}$ e $Y = \{y > 0 : y^2 > a\}$. Moste que X não tem máximo e Y não tem mínimo.

27. Seja $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mostre que existe um único número real $y \geq 0$ tal que $y^n = x$. Dizemos que y é a raíz n-ésima de x: $y = \sqrt[n]{x}$.

28. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que X é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ se e somente se X é um subconjunto conexo de $\mathbb{C}$.

29. Mostre, a partir da definição, que o intervalo $[0,1]$ é compacto.

Sugestão: Seja $\mathcal{C} = \{O_j : j \in J\}$ uma coleção de abertos em $\mathbb{R}$ tal que $[0,1] \subset \bigcup_{j\in J} O_j$. Considere o conjunto

$$A = \{\ x \in [0,1] :\ [0,x] \text{ é uma união finita de abertos na cobertura } \mathcal{C}\ \}\ .$$

Mostre que A é não vazio e limitado superiormente, $\sup A = 1$ e $\sup A \in A$.

30. Seja (f_n) a *sequência de Fibonacci*, definida por $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = 1$ e

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,, \quad \text{para todo } \ n\ \geq 0\ .$$

(i) Prove que existe $\varphi = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Compute φ, denominada razão áurea.

(ii) Mostre que

$$\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ se } n \geq 0\ .$$

(iii) Mostre que

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \text{ se } n \geq 1\ .$$

(iv) Determine uma fórmula para f_n.

Sugestão: Suponha válida a fórmula $f_n = \alpha A^n + \beta B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para específicos A, B, α e β. Então, ache A e B tais que a fórmula seja válida para quaisquer α e β. Por fim, determine α e β tais que $f_1 = f_2 = 1$.

30. Definamos $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$ para $m \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{m}{n} x^n = 0\,, \quad \forall x \in (-1,1)\,, \forall m \in \mathbb{R}\ .$$