Curso: MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

Unidade: IFUSP - Instituto de FÍsica da USP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Segundo Semestre de 2011

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS RESULTADOS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES / CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Capítulo 6

SOMAS NÃO ORDENADAS

Capítulo 7

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Capítulo 8

SÉRIES DE FOURIER

Capítulo 9

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 10

INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Capítulo 11

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Capítulo 12

SÉRIES DE LAURENT E RESÍDUOS

12.1 - A Expansão de Laurent e a Classificação das Singularidades

12.1 Definição. *Uma* Série de Laurent *com centro z_0 e coeficientes a_n, $n \in \mathbb{Z}$, é do tipo*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \;= +\cdots+ \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

em que as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}\,,$$

são ditas respectivamente: parte regular *e* parte principal *da série de Laurent, a qual é convergente no ponto z se as partes regular e principal convergem em z.*

12.2 Definição. *A* soma de uma série de Laurent *é*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{12.2.1}$$

nos pontos z em que suas partes regular e principal convergem.

12.3 Nota. *Dada uma série de Laurent como em (12.2.1), a parte regular é uma série de potências e indicamos seu raio de convergência por R_1. Por outro lado,* *a parte principal é a série de potências em* $w = \frac{1}{z-z_0}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n.$$

com raio de convergência indicado por $\frac{1}{R_2}$*; com a convenção* $R_2 = +\infty$ *se o raio de convergência é zero e* $R_2 = 0$ *se o raio de convergência é* $+\infty$*.*

Notemos que se $R_2 = +\infty$, a parte principal diverge para todo $z \in \mathbb{C}$.

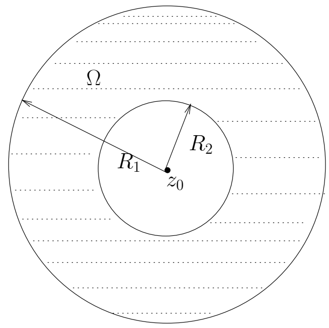

Figura 12.1: Anel de Convergência de uma Série de Laurent

12.4 Lema. *Mantida a notação em (12.3), se* $R_2 < R_1$ *temos as propriedades:*

(a) A série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ *converge uniformemente e absolutamente em todo subconjunto compacto no* anel de convergência*, ou* coroa circular*, (vide figura acima)*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z - z_0| < R_1\}.$$

(b) A série de Laurent é derivável termo a termo e sua derivada é uma série de Laurent:

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \right\}' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

(c) Se $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ *e* $\gamma = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *e* $R_2 < r < R_1$*, então*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Prova.

(a) Se K é um subconjunto compacto contido em Ω é claro que existem r_1 e r_2 tais que $K \subset \{z : R_2 < r_2 \le |z - z_0| \le r_1 < R_1\}$. Então, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente e absolutamente em $\{z : |z - z_0| \le r_1\}$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$ converge uniformemente e absolutamente em $\{|w| \le \frac{1}{r_2} < \frac{1}{R_2}\}$. Logo, na região $\{z : r_2 \le |z-z_0| \le r_1\}$ as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ convergem absoluta e uniformemente e assim, a série de Laurent também .

(b) Consequência de: a parte regular é uma série de potências, a parte principal é uma série de potências composta com a função holomorfa $\frac{1}{z-z_0}$, da regra da cadeia e, por fim, as séries de potências são deriváveis termo a termo.

(c) Dado $n \in \mathbb{Z}$ temos,

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-z_0)^{k-n-1},$$

e como Imagem(γ) é um círculo compacto na coroa $\{z : R_2 < |z| < R_1\}$, e a série de Laurent converge uniformemente sobre Imagem(γ), obtemos

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \oint_\gamma (z-z_0)^{k-n-1}\,dz,$$

e assim, como $\oint_\gamma (z-z_0)^m\,dz = 0$ se $m \ne -1$ já que $\frac{(z-z_0)^{m+1}}{m+1}$ é uma primitiva de $(z-z_0)^m$ na coroa $\{z : R_2 < |z| < R_1\}$, concluímos,

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = a_n \oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i a_n \blacksquare$$

12.5 Teorema (A Expansão de Laurent). *Consideremos a coroa circular* $\Omega = \{z : \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2\}$ *e* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Então, existem duas sequências de coeficientes complexos* $(b_m)_{m\ge1}$ *e* $(a_n)_{n\ge0}$, *tais que*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad, \forall z \in \Omega.$$

Ainda, a expansão em série de Laurent de f *é única.*

Prova. Pelo Lema 12.4, basta mostrar a existência de uma série de Laurent, para f, convergente em Ω. A unicidade segue do Lema 12.4 (c). Obteremos tal série ao representarmos f via Fórmula Integral de Cauchy e, a seguir, expandindo em séries o integrando nesta fórmula.

Fixado z na coroa $\{z : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$, sejam $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $\rho_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < \rho_2$. A fronteira da coroa $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ é formada por duas circunferências: γ_1 e γ_2, respectivamente, que orientamos no sentido anti-horário. Seja ainda γ uma circunferência centrada em z, orientada no sentido anti-horário e contida na coroa $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Vide figura abaixo.

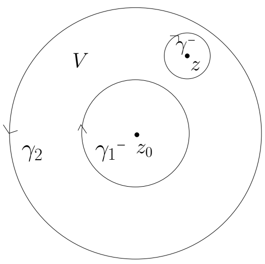

Figura 12.2: Ilustração ao Teorema: A Expansão de Laurent

Pela Fórmula Integral de Cauchy obtemos,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Se V é a região limitada pelas curvas γ, γ_1 e γ_2 [i.e., a região formada pelos pontos interiores a γ_2 mas exteriores a γ_1 e γ] temos $\partial V = \gamma_1^- \vee \gamma^- \vee \gamma_2$ (v. Fig. 12.2). Sendo $g(w) = \frac{f(w)}{w-z} \in \mathcal{H}(V)$, pelo Teorema 10.38, ou Corolário 10.39, obtemos,

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw + \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw + f(z) 2\pi i.$$

Logo,

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dz.$$

No Teorema 10.25 mostramos que a expansão em séries de potências

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z - z_0)^n,$$

é absolutamente convergente se $|z - z_0| < r_2$.

A prova de que temos o desenvolvimento $\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$, $b_m \in \mathbb{C}$, segue os passos da demonstração feita para o Teorema 10.25 (verifique) ■

12.6 Definição. *Seja Ω um aberto em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega \smallsetminus \{z_0\})$, f tem uma* singularidade isolada em z_0.

Se z_0 é singularidade isolada de f, pelo Teorema 12.5, em um disco "reduzido" $D^*(z_0;\rho) = D(z_0;\rho) \smallsetminus \{z_0\}$, ρ pequeno o suficiente, f é dada pela série de Laurent:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \;+\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

e classificamos as singularidades isoladas em três tipos distintos:

- z_0 é singularidade removível de f se $b_m = 0$, $\forall m \leq 1$.
- z_0 é um polo de ordem k se $b_k \neq 0$ e $b_m = 0$ para $m > k$.
- z_0 é singularidade essencial de f se $\{m \in \mathbb{N} : b_m \neq 0\}$ é infinito.

Se $b_m = 0$, $\forall m \geq 1$, dizemos que z_0 é singularidade removível pois definindo $f(z_0) = a_0$ temos uma extensão de f (que ainda denotamos f), holomorfa em Ω.

12.7 Proposição. *Seja z_0 uma singularidade isolada de $f \in \mathcal{H}(\Omega \smallsetminus \{z_0\})$. São equivalentes:*

(a) z_0 é singularidade removível.

(b) f é limitada em algum $D^*(z_0;r) = D(z_0;r) \smallsetminus \{z_0\}$, $r > 0$.

(c) Existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Prova.

(a) $\Rightarrow (b)$ e $(a) \Rightarrow (c)$

Seguem do comentário acima sobre singularidades removíveis.

(b) $\Rightarrow (a)$

Se $|f(z)| \leq M$ em $D^*(z_0;r)$ e $0 < \epsilon < r$, pondo $\gamma_\epsilon = z_0 + \epsilon e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, pela fórmula para os coeficientes de uma série de Laurent [Lema 12.4(c)] temos,

$$|b_m| \leq \frac{M\epsilon^{m-1}}{2\pi} L(\gamma_\epsilon) = \; M\epsilon^m \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{se } \epsilon \to 0 \;, \forall m \in \mathbb{N}.$$

(c) $\Rightarrow (b)$ Trivial ■

12.8 Corolário. *Mantendo as notações acima para uma série de Laurent, se $b_m \neq 0$ para algum $m \geq 1$ então $|f|$ é ilimitado em qualquer disco $D^*(z_0;r)$.*

Prova. Consequência imediata da Proposição 12.7 ■

12.9 Proposição. *Seja $f \in \mathcal{H}\big(D^*(z_0;r)\big)$. Então,*

(a) z_0 é um polo de ordem k de f se e só se $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(b) Se z_0 é um polo de f então $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$.

Prova.

(a) [⇒] Temos,

$$f(z) = \frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\,, \quad b_k \neq 0\,, \quad \text{e}$$

$$(z-z_0)^k f(z) = b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n+k}.$$

Logo, $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = b_k \neq 0$.

[⇐] Se $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = \beta \in \mathbb{C}^*$, pela Proposição 12.7(a) z_0 é singularidade removível de $(z-z_0)^k f(z)$ e $(z-z_0)^k f(z) = \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ em $D^*(z_0;r)$, para algum $r' > 0$. Portanto,

$$f(z) = \frac{\beta}{(z-z_0)^k} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{z-z_0} + \sum_{n=k}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n-k} \;\;, \beta \neq 0,$$

o que mostra que z_0 é um polo de ordem k.

(b) Se z_0 é um polo de ordem k, pelo item (a) temos $g(z) = (z-z_o)^k f(z) \in \mathcal{H}\big(D(z_0;r)\big)$, com $g(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) \neq 0$. Logo, $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, se $z \neq z_0$, e portanto,

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \lim_{z\to z_0}\frac{|g(z)|}{|z-z_0|^k} = \infty \;\blacksquare$$

12.10 Teorema de Casorati-Weierstrass. *Se* z_0 *é singularidade essencial de* $f \in \mathcal{H}\big(\, D^*(z_0; r)\,\big)$, $r > 0$, *então,*

$$f\big(\, D^*(z_0; \delta)\,\big) \ \ \textit{é denso em}\ \mathbb{C}\,, \quad \textit{se}\ \ 0 < \delta < r\,.$$

Prova.

Suponhamos, por contradição, que existe $D(w; \epsilon)$, $\epsilon > 0$, tal que

$$f\,\big(\, D^*(z_0; \rho)\,\big) \bigcap D(w; \epsilon) \ = \ \varnothing\ .$$

Então temos: $|f(z) - w| \geq \epsilon$ para todo $z \in D^*(z_0; \rho)$,

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \ \in\ \mathcal{H}\big(\, D^*(z_0; \rho)\,\big) \quad \text{e} \quad |g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}\,, \forall z \in \big(\, D^*(z_0; \rho)\,\big)\ .$$

Pela Proposição 12.7, z_0 é singularidade removível de g e existe $\lim\limits_{z \to z_0} g(z)$.

Se $g(z_0) = 0$, como $g(z) \neq 0$ se $z \neq z_0$, segue que z_0 é um zero de ordem $k \geq 1$ de g e, pela equação $f - w = \frac{1}{g}$, z_0 é um polo de f, contra a hipótese. Se $g(z_0) \neq 0$, $f(z) = w + \frac{1}{g}$ é holomorfa $\lightning$

12.2 - Resíduos

12.11 Definição. *Seja f holomorfa no anel $A(a;0;\rho)$. O resíduo de f em a é o coeficiente b_1 da série de Laurent de f com centro a. Indicamos b_1 =*$\mathbf{res}(f,a)$.

12.12 Teorema dos Resíduos. *Seja f holomorfa no domínio $U \smallsetminus \{a_1,...,a_m\}$. Seja γ contida em tal domínio, uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horáio, cuja região fechada e limitada por ela delimitada está contida em U e contém $\{a_1,...,a_m\}$. Então,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} res(f,a_j)\ .$$

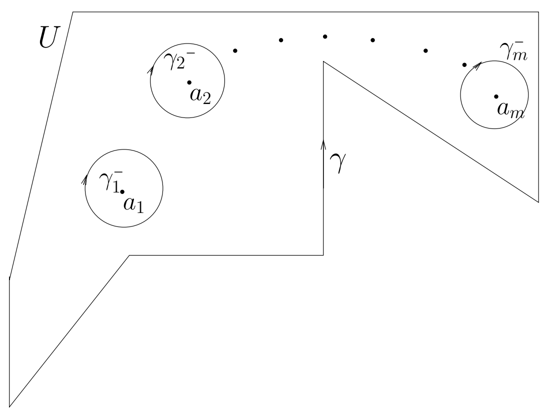

Figura 12.3: Ilustração ao Teorema dos Resíduos

Prova.

Orientemos γ_j, $1 \le j \le m$, positivamente (i.e., no sentido anti-horário). Pelo Teorema 10.38 temos,

$$\int_{\gamma\vee\gamma_1^-\vee\cdots\vee\gamma_m^-} f(z)dz = 0.$$

Logo,

$$\int_\gamma f(z)dz \ = \ \sum_{j=1}^{m}\int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Então, escrevendo para cada $j \in \{1,...,m\}$ a série de Laurent de f em torno a_j, $f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{b_m}{(z-a_j)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a_j)^n$ obtemos,

$$\int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \text{res}(f,a_j) \blacksquare$$

Uma função é holomorfa no ponto a se é holomorfa numa vizinhança de a.

12.13 Regras Operatórias.

- *Seja a uma singularidade isolada da função holomorfa f. Então,*

  (a) Se a é singularidade removível então res$(f,a) = 0$.

  (b) Se a é um polo de ordem 1 então, res$(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

  (c) Se a é um polo de ordem $k > 1$ então,

$$\mathit{res}(f,a) = \frac{g^{k-1}(a)}{(k-1)!}, \quad \mathit{onde}\ g(z) = (z-a)^k f(z).$$

- *Sejam f e g holomorfas em a, com a um zero simples de g. Então,*

  (d) res$\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

  (e) res$\left(\frac{1}{g}, a\right) = \frac{1}{g'(a)}$.

- *(*Resíduo Fracionário*) Se a é um polo simples de f e γ_ϵ^α é um arco de círculo de ângulo α contido no círculo de centro a e raio $\epsilon > 0$, $\{|z-a| = \epsilon\}$, então*

  (f) $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z)dz = \alpha\, i\, \mathit{res}(f,a)$.

Prova.

(a) Trivial.

(b) A série de Laurent de f em $A(a,0,\rho)$ é $f(z) = \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$. Logo,

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\left(b_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^{n+1}\right) = b_1 = \mathrm{res}(f,a).$$

(c) Neste caso temos, $f(z) = \frac{b_k}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$. Então,

$$g(z) = b_k + b_{k-1}(z-a) + \cdots + b_1(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^{n+k}$$

é uma série de potências. Logo, pela Fórmula de Taylor para os coeficientes,

$$b_1 = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

(d) Devido às hipótese temos, para $|z-a|<r$, com $0<r$ e $r<<$,

$$\begin{cases} f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots, \\ g(z) = g'(a)(z-a) + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots, \ g'(a) \neq 0. \end{cases}$$

Logo, para $0<|z-a|<r$ temos,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z-a}\frac{f(a)(z-a) + f'(a)(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots}{g'(a) + \frac{g''(a)}{2!}(z-a) + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1} + \cdots}.$$

Pelas regras operatórias para séries de potências, existe $\rho>0$, $\rho<r$, tal que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z-a}\left[\frac{f(a)}{g'(a)} + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\right], \text{ se } 0<|z-a|<\rho.$$

Donde segue, $\mathrm{res}(\frac{f}{g}, a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

Uma prova breve (e menos transparente) de (d), segue da Prop. 12.9 (a).

(e) Imediato de (d).

(f) Pondo $f(z) = \frac{b_1}{z-a} + g(z)$, com $g \in \mathcal{H}\Big(D(a;r)\Big)$, para algum $r>0$, temos

$$\int_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z)dz = b_1 \int_{\gamma_\epsilon^\alpha} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma_\epsilon^\alpha} g(z)dz.$$

Mas,

$$\int_{\gamma\epsilon^\alpha} \frac{dz}{z-a} = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} d\theta = \alpha i,$$

e, como g é contínua e portanto limitada por alguma constante $M>0$ numa vizinhança de a, pela Estimativa M-L segue,

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon^\alpha} g(z)dz\right| \leq M\alpha\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Assim,

$$\int_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z)dz \xrightarrow{\epsilon\to 0} i\alpha b_1 = \alpha\, i \,\mathrm{res}(f,a) \blacksquare$$

12.3 - Cálculo de Integrais

12.14 Definição. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável em todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

(A) Se existir o limite das integrais $\int_a^b f(x)dx$, quando $a \to -\infty$ e $b \to +\infty$, tal limite é a integral imprópria de f*, a qual indicamos:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ ,$$

e dizemos que a integral imprópria converge. Se tal limite não existir, dizemos que a integral imprópria diverge.

(B) Se existir o limite $\lim\limits_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx$, ele é dito o Valor Principal de Cauchy *(ou, brevemente, o* Valor Principal*) de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Indicamos então,*

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)dx.$$

É claro que se existir a integral imprópria de f então existe o valor principal de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ e eles são iguais. É fácil mostrar que o reverso não ocorre (verifique).

Vejamos como computar algumas integrais, via método dos resíduos.

Caso I: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Seja f holomorfa no semi plano aberto, exceto em um número finito de pontos,

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > -\epsilon\} \smallsetminus \{a_1, \ldots, a_k\}\,, \text{ com } \epsilon > 0,$$

e $a_1, ..., a_k$ polos de f tais que $\mathrm{Im}(a_1) > 0, \ldots, \mathrm{Im}(a_k) > 0$.

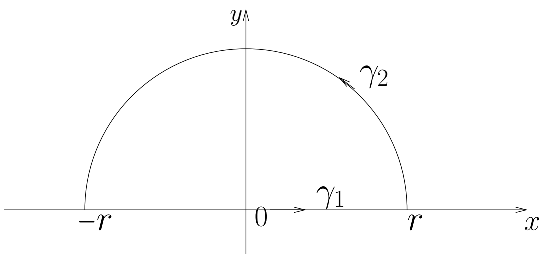

Figura 12.4: Ilustração ao Caso I

Consideremos o semi-círculo $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ definido por,

$$\gamma_1(t) = t, t \in [-r, r], \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = re^{it}, t \in [0, \pi],$$

com r tão grande que o interior do semi-círculo contém os polos de f. Então,

$$2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}(f, a_j) = \int_\gamma f(z)dz = \int_{-r}^{r} f(t)dt + \int_0^\pi f(re^{it})ire^{it}dt.$$

Desta forma obtemos a implicação:

$$\text{se} \lim_{r\to+\infty} \int_0^\pi f(re^{it})ire^{it}dt = 0\,, \text{ então } 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}(f, a_j) = VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Uma condição simples para que o limite à esquerda seja zero é dada por:

$$(12.14.1) \text{ existe } K > 0 \text{ tal que } |f(re^{it})| \le \frac{K}{r^2}, \forall t \in [0, \pi], \ \forall\, r \, \text{grande o suficiente.}$$

Pois, neste caso, para r suficientemente grande temos

$$\left| \int_0^\pi f(re^{it})ire^{it}dt \right| \le \int_0^\pi \frac{Kr}{r^2}dt = \frac{K\pi}{r} \xrightarrow{r\to+\infty} 0.$$

Ainda, a condição acima implica $|f(x)| \le \frac{K}{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ grande o suficiente, donde segue que existe a integral imprópria de f, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (cheque). Logo,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = VP \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}(f, a_j).$$

A condição (12.14.1) ocorre quando (cheque), por exemplo, f tem a forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ com } P \text{ e } Q \text{ polinômios com coeficientes reais,}$$

$$\operatorname{grau}(Q) \ge \operatorname{grau}(P) + 2 \quad \text{e} \quad Q \text{ sem raízes reais.}$$

Caso II: $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \mathrm{sen} t)dt$

Dada $F(z)$, $z = x+iy$, uma função racional, consideremos a curva $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ (orientada no sentido anti-horário). Notemos que se $z = e^{it}$ então temos

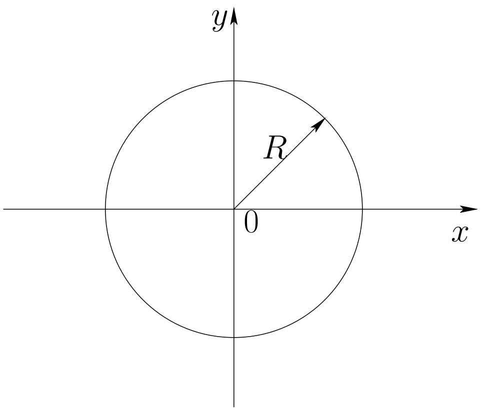

Figura 12.5: Ilustração ao Caso II

$|z| = 1$, $\overline{z} = \frac{1}{z}$, $\frac{dz}{dt} = ie^{it} = iz$ e

$$\cos t = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \quad , \quad \mathrm{sen} t = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big) \quad \text{e} \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Logo,

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \mathrm{sen} t)dt = \int_\gamma F\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right)\frac{dz}{iz}.$$

Se o integrando à direita não possui polos ao longo de γ, obtemos

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \mathrm{sen} t)dt = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}(f, a_j),$$

com $a_1, \ldots, a_n$ as singularidades de $f(z) = \frac{1}{iz} F\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right)$ em $D(0;1)$.

Caso III: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax)dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{sen}(ax)dx$

Analogamente a uma situação descrita no caso I, suponhamos:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ com } P \text{ e } Q \text{ polinômios com coeficientes reais,}$$

$$Q \text{ sem raízes reais e } \text{grau}(Q) \geq \text{grau}(P) + 2.$$

Se o integrando contiver a função cosseno, o uso imediato do contorno semi-circular visto no caso I não é fáctivel aqui. Pois, sobre o eixo imaginário temos:

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh(y)\,, y \in \mathbb{R},$$

e assim, a função $\cos z$ cresce exponencialmente sobre o eixo-imaginário. A idéia é então trocar $\cos z$ por e^{iz}, em seguida computar a integral usando o contorno semi-circular visto no caso I, notando que no semi-plano superior vale a desigualdade

$$|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1\,, \quad \text{pois } \text{Im}(z) = y \geq 0,$$

e, por fim, computar a parte real do valor obtido.

12.15 Exemplo. *Verifique*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \pi e^{-a}, \ \textit{se } a > 0.$$

Caso IV: $\mathrm{VP}\int_a^b f(x)dx$

12.16 Definição. *Dizemos que a integral* $\int_a^b f(x)dx$ *é* absolutamente convergente *se a integral (própria ou imprópria)*

$$\int_a^b |f(x)|dx\,,$$

é convergente (i.e., finita). A integral é dita absolutamente divergente *se*

$$\int_a^b |f(x)|dx = +\infty.$$

Lembrando o que ocorre com séries absolutamente convergentes e séries condicionalmente convergentes, para uma integral absolutamente convergente temos essencialmente uma única maneira de atribuir um valor para a integral, enquanto que para uma integral absolutamente divergente não temos uma forma óbvia para atribuir um valor a tal integral.

12.17 Definição. *Seja* $f = f(x)$ *contínua em* $[a, x_0) \cup (x_0, b]$*. O* valor principal *da integral* $\int_a^b f(x)dx$ *é, se existir, dado pela notação e pelo limite abaixo*

$$VP\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int\limits_{x_0+\epsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Notemos que o valor principal de uma integral coincide com o valor usual de uma integral (própria ou imprópria) se o integrando, f, é absolutamente integrável. A definição de valor principal, se ou a, ou b, ou a e b: são pontos de descontinuidade de f ou são infinitos ou não pertencem ao domínio de f, é análoga à definição já dada. Se f tem um número finito de descontinuidades no intervalo aberto (a, b), o valor principal da integral de f é computado dividindo (a, b) em sub-intervalos, cada um contendo um ponto de descontinuidade de f e então computando os valores principais de cada integral de f restrita a cada sub-intervalo e, finalmente, somando os valores principais obtidos.

12.18 Exemplo. $VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3-1}dx = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

O integrando, próximo de $x = 1$, é comparável com a função $\frac{1}{x-1}$. Assim, a integral acima é absolutamente divergente. A integral, nos intervalos $(-\infty, 1-\epsilon]$ e $[1+\epsilon, +\infty)$ é absolutamente convergente (verifique). Assim, o valor principal da integral acima é definido por:

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3-1}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{1-\epsilon}\frac{1}{x^3-1}dx + \int_{1+\epsilon}^{+\infty}\frac{1}{x^3-1}dx\right).$$

A função $f(z) = \frac{1}{z^3-1}$ têm três polos de ordem 1, as 3 raízes cúbicas de $z = 1$. Integremos f sobre um semi-círculo denteado superior C centrado na origem, de raio $R > 1$, contornando o polo simples $z = 1$ e orientado no sentido anti-horário. O interior de tal semi-círculo denteado contém o polo simples $e^{2\pi i/3}$ e pelas regras operatórias, 12.13 (e) e (f), obtemos

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^3-1}, e^{2\pi i/3}\right) = \frac{1}{3z^2}\Big|_{z=e^{2\pi i/3}} = \frac{e^{2\pi i/3}}{3}, \quad \operatorname{res}\left(\frac{1}{z^3-1}, 1\right) = \frac{1}{3} \quad \text{e}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon}\frac{1}{z^3-1}dz = -\pi\, i \operatorname{res}(\frac{1}{z^3-1}, 1) = -\frac{\pi}{3}i,$$

onde utilizamos $\gamma_\epsilon(t) = 1 + \epsilon e^{i\theta}$, com $\theta \in [-\pi, -2\pi]$. Assim temos, com Γ_R o semi-círculo superior centrado na origem e de raio R, orientado no sentido anti-horário,

$$(12.18.1) \quad 2\pi i\frac{e^{2\pi i/3}}{3} = \int_{\partial C} f(z)dz = \int_{-R}^{1-\epsilon}\frac{dx}{x^3-1} + \int_{\gamma_\epsilon}\frac{dz}{z^3-1} + \int_{1+\epsilon}^{R}\frac{dx}{x^3-1} + \int_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^3-1}.$$

Aplicando a Estimativa M-L temos:

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^3-1}\right| \le \frac{\pi R}{R^3-1} \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$$

Deta forma, computando o limite de (12.18.1) para $R \to +\infty$ obtemos

$$\frac{2\pi i}{3}\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \left(\int_{-\infty}^{1-\epsilon}\frac{dx}{x^3-1} + \int_{1+\epsilon}^{+\infty}\frac{dx}{x^3-1}\right) + \int_{\gamma_\epsilon}\frac{dz}{z^3-1},$$

donde, computando o limite para $\epsilon \to 0$ segue,

$$-\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}i = VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^3-1} - \frac{\pi}{3}i \blacksquare$$

Caso V: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x)dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{sen}(x)dx$

Suponhamos:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ com } P \text{ e } Q \text{ polinômios com coeficientes reais},$$

$$\text{grau}(Q) \geq \text{grau}(P) + 1.$$

Notemos que neste caso as integrais são absolutamente divergentes e, portanto, computaremos somente o valor principal.

12.19 Lema de Jordan. *Dado o semi-círculo* $\Gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$, *segue*

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}|\,|dz| < \pi.$$

Prova. É claro que

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}|\,|dz| = \int_0^\pi |e^{iRe^{i\theta}}|\,|iRe^{i\theta}|d\theta = R\int_0^\pi e^{-R\text{sen}\theta}d\theta.$$

No intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, a função senθ tem a concavidade voltada para baixo e seu gráfico está acima do reta conectando $(0,0)$ e $\frac{\pi}{2}, 1)$. Logo,

$$\text{sen}\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta, \text{ se } \theta \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big].$$

Assim,

$$\int_0^\pi e^{-R\text{sen}\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\text{sen}\theta}d\theta \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2R\theta}{\pi}}d\theta = \frac{\pi}{R}\int_0^R e^{-t}dt < \frac{\pi}{R}\blacksquare$$

12.20 Exemplo. *Verifiquemos*

$$\int_0^{+\infty} \frac{senx}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Como $(\text{sen}z)/z$ é analítica em $z = 0$, temos que $(\text{sen}x)/x$ é integrável em qualquer intervalo limitado. Solicitamos ao leitor verificar que $(\text{sen}x)/x$ não é absolutamente integrável em $[0, +\infty]$. Ainda, devido à paridade da função em questão temos,

$$\int_0^R \frac{\text{sen}x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{+R} \frac{\text{sen}x}{x}dx.$$

Logo, encontraremos o resultado desejado computando o valor principal,

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx.$$

Consideremos $f(z) = e^{iz}/z$, com um só polo (simples) em $z = 0$ e $\operatorname{res}(f,0) = 1$. Seja C o semi-círculo denteado no semi-plano superior, contornando tal polo. Analogamente ao exemplo anterior, definindo $\gamma_\epsilon(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$, com $\theta \in [0,\pi]$, temos

$$(12.20.1)\quad 0 = \int_{\partial C} f(z)dz = \int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz.$$

Pelas regras operatórias para resíduos temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}dz = -\pi\operatorname{res}(\frac{e^{iz}}{z},0) = -\pi i.$$

Computando o limite de (12.20.1) para $\epsilon \to 0$ encontramos

$$0 = VP\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx\ -\pi i + \int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz.$$

Destacando a parte imaginária da identidade acima obtemos

$$0 = \int_{-R}^{R}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx\ -\pi\ +\ \operatorname{Im}\Big[\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\Big].$$

Finalmente, pelo Lema de Jordan 12.19 segue

$$\Big|\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\Big| \le \frac{1}{R}\int_{\gamma_r}|e^{iz}||dz| < \frac{\pi}{R}\ \xrightarrow{R\to+\infty}\ 0.$$

Logo,

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \pi\blacksquare$$

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 12

1. Determine a expansão de Laurent da função dada em torno de cada uma de suas singularidades, especificando o anel no qual ela é válida.

   (a) $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}$

   (b) $f(z) = -1 - \frac{1}{z} + e^{1/z}$

   (c) $f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2(z-i)}$

   (d) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)}$

   (e) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$

   (f) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

   (g) $f(z) = \cos\frac{1}{z}$

   (h) $f(z) = \frac{z^5}{(z^2-2)^2}$

2. Uma função holomorfa num disco em torno de um polo é a soma de duas funções, uma racional e outra holomorfa.

3. Dê uma função com um polo de ordem 1 em $z = 2$ e um polo de ordem 7 em $z = \sqrt{2}i$.

4. Classifique a singularidade 0 de cada uma das funções:

   (a) $f(z) = \operatorname{sen}(\frac{1}{z})$

   (b) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$

   (c) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^3}$

   (d) $f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$

   (e) $f(z) = \frac{1}{z^8 - z}$

   (f) $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}$.

5. Determine a ordem do polo de f em a e calcule $\operatorname{res}(f;a)$.

   (a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$, $a = 0$

   (b) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^{n+1}}$, $a = 0$

   (c) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$, $a = 0$

   (d) $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^5}$, $a = 1$

   (e) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(1/z)}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

   (f) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$, $a = 0$.

   (g) $f(z) = \frac{1 - e^{3z}}{z^4}$, $a = 0$.

   (h) $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

6. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - cosx}{x^2} dx$.

7. Seja $\xi \in \mathbb{R}$.

   (a) Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx$.

   (b) Qual o valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx$?

   Obs: A integral em (a) é a transformada de Fourier, $\hat{f}(\xi)$, de $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

8. Mostre que $\forall \xi \in \mathbb{C}$ vale:

$$e^{-\pi \xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x \xi} dx \ .$$

9. Compute, utilizando resíduos, as Integrais de Fresnel:

$$(a) \quad \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \, .$$

Sugestão: Fixado $R > 0$, integre e^{-z^2} sobre a fronteira do setor circular

$$\left\{ z = re^{i\theta} : 0 \le r \le R \, , 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\} \ .$$

10. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

11. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

12. Compute, utilizando resíduos, $\int_0^{\pi} \frac{a}{a+\cos t} dx$, $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

13. Compute, utilizando resíduos,

    (a) V.P.$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$
    (b) V.P.$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ e V.P.$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$
    (c) O que pode ser dito de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$?
    (d) O que pode ser dito de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$?

14. Utilize resíduos para calcular

    (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+5)} dx$
    (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$
    (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$
    (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx$
    (e) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$
    (f) $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt$
    (g) $\int_0^{2\pi} (2\cos^3 t + 4\operatorname{sen}^5 t) dt$
    (h) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx$, onde $a > 0$.

15. Seja f holomorfa em $\Omega \ni 0$ e ainda:$f(0) = 0$ e 0 é o único zero de f em Ω. Seja g também holomorfa em Ω. Então, f divide g [i.e., temos $g = hf$, com h holomorfa] se e somente se:

$$\operatorname{res}\left(\varphi \frac{g}{f} \ 0\right) = 0 \quad \text{para toda função holomorfa } \varphi \text{ em } \Omega \ .$$

16. Suponha que f é derivável em Ω e com derivada contínua. Seja T um triângulo contido em Ω e com interior em Ω. Sem utilizar a Fórmula Integral de Cauchy (e a existência de f''), mostre, usando o Teorema de Green que

$$\int_T f(z)dz = 0 \ .$$

Atenção: Tal resultado prova o Teorema de Cauchy-Goursat, supondo que f' é contínua. **Sugestão:** Use as equações de Cauchy-Riemann.

17. Ache o número de zeros satisfazendo $|z| < 1$ dos seguintes polinômios:

$$(i) \quad z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 \quad ; \quad (ii) \quad z^4 - 5z + 1 \ .$$

18. Se $|a| > e$, a equação $e^z = az^n$ tem n raízes no disco $|z| < 1$.