

Curso: MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

Unidade: IFUSP - Instituto de Física da USP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Segundo Semestre de 2011

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS RESULTADOS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES / CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Capítulo 6

SOMAS NÃO ORDENADAS

Capítulo 7

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Capítulo 8

SÉRIES DE FOURIER

Capítulo 9

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 10

INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Capítulo 11

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Capítulo 12

SÉRIES DE LAURENT E RESÍDUOS

12.1 - A Expansão de Laurent e a Classificação das Singularidades

12.1 Definição. Uma Série de Laurent com centro z_0 e coeficientes a_n , $n \in \mathbb{Z}$, é do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = +\dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots ,$$

em que as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} ,$$

são ditas respectivamente: parte regular e parte principal da série de Laurent, a qual é convergente no ponto z se as partes regular e principal convergem em z .

12.2 Definição. A soma de uma série de Laurent é

$$(12.2.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n ,$$

nos pontos z em que suas partes regular e principal convergem.

12.3 Nota. Dada uma série de Laurent como em (12.2.1), a parte regular é uma série de potências e indicamos seu raio de convergência por R_1 . Por outro lado,

a parte principal é a série de potências em $w = \frac{1}{z-z_0}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n .$$

com raio de convergência indicado por $\frac{1}{R_2}$; com a convenção $R_2 = +\infty$ se o raio de convergência é zero e $R_2 = 0$ se o raio de convergência é $+\infty$.

Notemos que se $R_2 = +\infty$, a parte principal diverge para todo $z \in \mathbb{C}$.

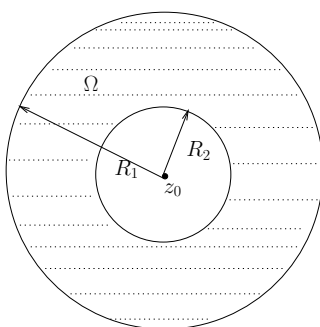


Figura 12.1: Anel de Convergência de uma Série de Laurent

12.4 Lema. Mantida a notação em (12.3), se $R_2 < R_1$ temos as propriedades:

- (a) A série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniformemente e absolutamente em todo subconjunto compacto no anel de convergência, ou coroa circular, (vide figura acima)

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z - z_0| < R_1\} .$$

- (b) A série de Laurent é derivável termo a termo e sua derivada é uma série de Laurent:

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \right\}' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} .$$

- (c) Se $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ e $\gamma = z_0 + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $R_2 < r < R_1$, então

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Prova.

- (a) Se K é um subconjunto compacto contido em Ω é claro que existem r_1 e r_2 tais que $K \subset \{z : R_2 < r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1 < R_1\}$. Então, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente e absolutamente em $\{z : |z - z_0| \leq r_1\}$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$ converge uniformemente e absolutamente em $\{|w| \leq \frac{1}{r_2} < \frac{1}{R_2}\}$. Logo, na região $\{z : r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1\}$ as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ convergem absoluta e uniformemente e assim, a série de Laurent também .
- (b) Consequência de: a parte regular é uma série de potências, a parte principal é uma série de potências composta com a função holomorfa $\frac{1}{z - z_0}$, da regra da cadeia e, por fim, as séries de potências são deriváveis termo a termo.
- (c) Dado $n \in \mathbb{Z}$ temos,

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^{k-n-1},$$

e como $\text{Imagem}(\gamma)$ é um círculo compacto na coroa $\{z : R_2 < |z| < R_1\}$, e a série de Laurent converge uniformemente sobre $\text{Imagem}(\gamma)$, obtemos

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \oint_{\gamma} (z - z_0)^{k-n-1} dz,$$

e assim, como $\oint_{\gamma} (z - z_0)^m dz = 0$ se $m \neq -1$ já que $\frac{(z - z_0)^{m+1}}{m+1}$ é uma primitiva de $(z - z_0)^m$ na coroa $\{z : R_2 < |z| < R_1\}$, concluímos,

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = a_n \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i a_n \quad \blacksquare$$

12.5 Teorema (A Expansão de Laurent). *Consideremos a coroa circular $\Omega = \{z : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Então, existem duas seqüências de coeficientes complexos $(b_m)_{m \geq 1}$ e $(a_n)_{n \geq 0}$, tais que*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \Omega.$$

Ainda, a expansão em série de Laurent de f é única.

Prova. Pelo Lema 12.4, basta mostrar a existência de uma série de Laurent, para f , convergente em Ω . A unicidade segue do Lema 12.4 (c). Obteremos tal série ao representarmos f via Fórmula Integral de Cauchy e, a seguir, expandindo em séries o integrando nesta fórmula.

Fixado z na coroa $\{z : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$, sejam $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $\rho_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < \rho_2$. A fronteira da coroa $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ é formada por duas circunferências: γ_1 e γ_2 , respectivamente, que orientamos no sentido anti-horário. Seja ainda γ uma circunferência centrada em z , orientada no sentido anti-horário e contida na coroa $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Vide figura abaixo.

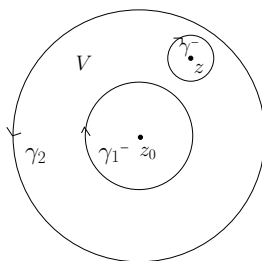


Figura 12.2: Ilustração ao Teorema: A Expansão de Laurent

Pela Fórmula Integral de Cauchy obtemos,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw .$$

Se V é a região limitada pelas curvas γ , γ_1 e γ_2 [i.e., a região formada pelos pontos interiores a γ_2 mas exteriores a γ_1 e γ] temos $\partial V = \gamma_1^- \vee \gamma^- \vee \gamma_2$ (v. Fig. 12.2).

Sendo $g(w) = \frac{f(w)}{w - z} \in \mathcal{H}(V)$, pelo Teorema 10.38, ou Corolário 10.39, obtemos,

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + f(z)2\pi i .$$

Logo,

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dz .$$

No Teorema 10.25 mostramos que a expansão em séries de potências

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n ,$$

é absolutamente convergente se $|z - z_0| < r_2$.

A prova de que temos o desenvolvimento $\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$, $b_m \in \mathbb{C}$, segue os passos da demonstração feita para o Teorema 10.25 (verifique) ■

12.6 Definição. *Seja Ω um aberto em \mathbb{C} e $z_0 \in \Omega$. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, f tem uma singularidade isolada em z_0 .*

Se z_0 é singularidade isolada de f , pelo Teorema 12.5, em um disco “reduzido” $D^*(z_0; \rho) = D(z_0; \rho) \setminus \{z_0\}$, ρ pequeno o suficiente, f é dada pela série de Laurent:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

e classificamos as singularidades isoladas em três tipos distintos:

- z_0 é singularidade removível de f se $b_m = 0$, $\forall m \leq 1$.
- z_0 é um polo de ordem k se $b_k \neq 0$ e $b_m = 0$ para $m > k$.
- z_0 é singularidade essencial de f se $\{m \in \mathbb{N} : b_m \neq 0\}$ é infinito.

Se $b_m = 0$, $\forall m \geq 1$, dizemos que z_0 é singularidade removível pois definindo $f(z_0) = a_0$ temos uma extensão de f (que ainda denotamos f), holomorfa em Ω .

12.7 Proposição. *Seja z_0 uma singularidade isolada de $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. São equivalentes:*

- (a) z_0 é singularidade removível.
- (b) f é limitada em algum $D^*(z_0; r) = D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$, $r > 0$.
- (c) Existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Prova.

- (a) \Rightarrow (b) e (a) \Rightarrow (c)

Seguem do comentário acima sobre singularidades removíveis.

- (b) \Rightarrow (a)

Se $|f(z)| \leq M$ em $D^*(z_0; r)$ e $0 < \epsilon < r$, pondo $\gamma_\epsilon = z_0 + \epsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, pela fórmula para os coeficientes de uma série de Laurent [Lema 12.4(c)] temos,

$$|b_m| \leq \frac{M\epsilon^{m-1}}{2\pi} L(\gamma_\epsilon) = M\epsilon^m \longrightarrow 0 \quad \text{se } \epsilon \rightarrow 0, \forall m \in \mathbb{N}.$$

- (c) \Rightarrow (b) Trivial ■

12.8 Corolário. Mantendo as notações acima para uma série de Laurent, se $b_m \neq 0$ para algum $m \geq 1$ então $|f|$ é ilimitado em qualquer disco $D^*(z_0; r)$.

Prova. Consequência imediata da Proposição 12.7 ■

12.9 Proposição. Seja $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0; r))$. Então,

(a) z_0 é um polo de ordem k de f se e só se $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Se z_0 é um polo de f então $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Prova.

(a) $[\Rightarrow]$ Temos,

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad b_k \neq 0, \quad e$$

$$(z - z_0)^k f(z) = b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+k}.$$

Logo, $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = b_k \neq 0$.

$[\Leftarrow]$ Se $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \beta \in \mathbb{C}^*$, pela Proposição 12.7(a) z_0 é singularidade removível de $(z - z_0)^k f(z)$ e $(z - z_0)^k f(z) = \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ em $D^*(z_0; r)$, para algum $r' > 0$. Portanto,

$$f(z) = \frac{\beta}{(z - z_0)^k} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{k-1}} \dots + \frac{c_{k-1}}{z - z_0} + \sum_{n=k}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n-k}, \quad \beta \neq 0,$$

o que mostra que z_0 é um polo de ordem k .

(b) Se z_0 é um polo de ordem k , pelo item (a) temos $g(z) = (z - z_0)^k f(z) \in \mathcal{H}(D(z_0; r))$, com $g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0$. Logo, $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, se $z \neq z_0$, e portanto,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^k} = \infty \quad \blacksquare$$

12.10 Teorema de Casorati-Weierstrass. *Se z_0 é singularidade essencial de $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0; r))$, $r > 0$, então,*

$$f(D^*(z_0; \delta)) \text{ é denso em } \mathbb{C}, \text{ se } 0 < \delta < r.$$

Prova.

Suponhamos, por contradição, que existe $D(w; \epsilon)$, $\epsilon > 0$, tal que

$$f(D^*(z_0; \rho)) \cap D(w; \epsilon) = \emptyset.$$

Então temos: $|f(z) - w| \geq \epsilon$ para todo $z \in D^*(z_0; \rho)$,

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \in \mathcal{H}(D^*(z_0; \rho)) \quad \text{e} \quad |g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}, \forall z \in (D^*(z_0; \rho)).$$

Pela Proposição 12.7, z_0 é singularidade removível de g e existe $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$.

Se $g(z_0) = 0$, como $g(z) \neq 0$ se $z \neq z_0$, segue que z_0 é um zero de ordem $k \geq 1$ de g e, pela equação $f - w = \frac{1}{g}$, z_0 é um polo de f , contra a hipótese. Se $g(z_0) \neq 0$, $f(z) = w + \frac{1}{g}$ é holomorfa ∇

12.2 - Resíduos

12.11 Definição. *Seja f holomorfa no anel $A(a; 0; \rho)$. O resíduo de f em a é o coeficiente b_1 da série de Laurent de f com centro a . Indicamos $b_1 = \mathbf{res}(f, a)$.*

12.12 Teorema dos Resíduos. *Seja f holomorfa no domínio $U \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$. Seja γ contida em tal domínio, uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, cuja região fechada e limitada por ela delimitada está contida em U e contém $\{a_1, \dots, a_m\}$. Então,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \mathbf{res}(f, a_j) .$$

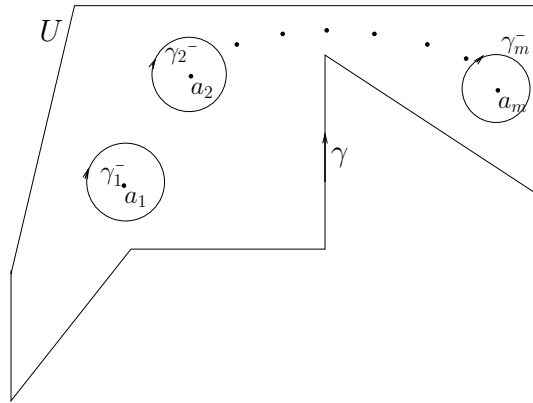


Figura 12.3: Ilustração ao Teorema dos Resíduos

Prova.

Orientemos γ_j , $1 \leq j \leq m$, positivamente (i.e., no sentido anti-horário). Pelo Teorema 10.38 temos,

$$\int_{\gamma \vee \gamma_1^- \vee \dots \vee \gamma_m^-} f(z) dz = 0 .$$

Logo,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z) dz .$$

Então, escrevendo para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ a série de Laurent de f em torno a_j , $f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-a_j)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a_j)^n$ obtemos,

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \mathbf{res}(f, a_j) \quad \blacksquare$$

Uma função é holomorfa no ponto a se é holomorfa numa vizinhança de a .

12.13 Regras Operatórias.

- Seja a uma singularidade isolada da função holomorfa f . Então,

(a) Se a é singularidade removível então $\text{res}(f, a) = 0$.

(b) Se a é um polo de ordem 1 então, $\text{res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$.

(c) Se a é um polo de ordem $k > 1$ então,

$$\text{res}(f, a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}, \quad \text{onde } g(z) = (z-a)^k f(z).$$

- Sejam f e g holomorfas em a , com a um zero simples de g . Então,

(d) $\text{res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

(e) $\text{res}\left(\frac{1}{g}, a\right) = \frac{1}{g'(a)}$.

- (Resíduo Fracionário) Se a é um polo simples de f e γ_ϵ^α é um arco de círculo de ângulo α contido no círculo de centro a e raio $\epsilon > 0$, com $\epsilon \ll 1$, então

(f) $\int_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z) dz = \alpha i \text{res}(f, a)$.

Prova.

(a) Trivial.

(b) A série de Laurent de f em $A(a, 0, \rho)$ é $f(z) = \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$. Logo,

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \left(b_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^{n+1} \right) = b_1 = \text{res}(f, a).$$

(c) Neste caso temos, $f(z) = \frac{b_k}{(z-a)^k} + \dots + \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$. Então,

$$g(z) = b_k + b_{k-1}(z-a) + \dots + b_1(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^{n+k}$$

é uma série de potências. Logo, pela Fórmula de Taylor para os coeficientes,

$$b_1 = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

(d), (e) e (f) Solicitamos ao leitor verificar ■

12.3 - Cálculo de Integrais

12.14 Definição. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(A) Se existir o limite das integrais $\int_a^b f(x)dx$, quando $a \rightarrow -\infty$ e $b \rightarrow +\infty$, tal limite é a integral imprópria de f , a qual indicamos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx ,$$

e dizemos que a integral imprópria converge. Se tal limite não existir, dizemos que a integral imprópria diverge.

(B) Se existir o limite $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x)dx$, ele é dito o Valor Principal de Cauchy (ou, brevemente, o Valor Principal) de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Indicamos então,

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)dx .$$

É claro que se existir a integral imprópria de f então existe o valor principal de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ e eles são iguais. É fácil mostrar que o reverso não ocorre (verifique).

Vejamos como computar algumas integrais, via método dos resíduos.

$$\text{Caso I: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Seja f holomorfa no semi plano aberto, exceto em um número finito de pontos,

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > -\epsilon\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, \text{ com } \epsilon > 0 ,$$

e a_1, \dots, a_k polos de f tais que $\text{Im}(a_1) > 0, \dots, \text{Im}(a_k) > 0$.

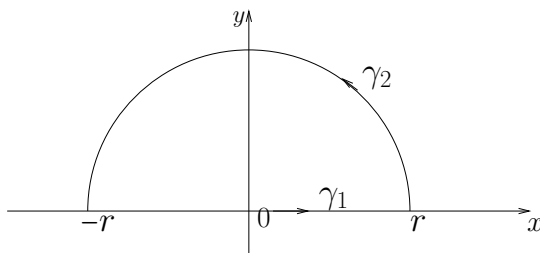


Figura 12.4: Ilustração ao Caso I

Consideremos o semi-círculo $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ definido por,

$$\gamma_1(t) = t, t \in [-r, r], \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = re^{it}, t \in [0, \pi],$$

com r tão grande que o interior do semi-círculo contém os polos de f . Então,

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \text{res}(f, a_j) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-r}^r f(t) dt + \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt .$$

Desta forma obtemos a implicação:

$$\text{se } \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt = 0, \text{ então } 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{res}(f, a_j) = VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx .$$

Uma condição simples para que o limite à esquerda seja zero é dada por:

$$(12.14.1) \text{ existe } K > 0 \text{ tal que } |f(re^{it})| \leq \frac{K}{r^2}, \forall t \in [0, \pi], \forall r \text{ grande o suficiente} .$$

Pois, neste caso, para r suficientemente grande temos

$$\left| \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{Kr}{r^2} dt = \frac{K\pi}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 .$$

Ainda, a condição acima implica $|f(x)| \leq \frac{K}{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ grande o suficiente, donde segue que existe a integral imprópria de f , $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ (cheque). Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{res}(f, a_j) .$$

A condição (12.14.1) ocorre quando (cheque), por exemplo, f tem a forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ com } P \text{ e } Q \text{ polinômios com coeficientes reais,}$$

$$\text{grau}(Q) \geq \text{grau}(P) + 2 \text{ e } Q \text{ sem raízes reais} .$$

Caso II: $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \text{sent} t) dt$

Dada $F(z)$, $z = x+iy$, uma função racional, consideremos a curva $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (orientada no sentido anti-horário). Notemos que se $z = e^{it}$ então temos

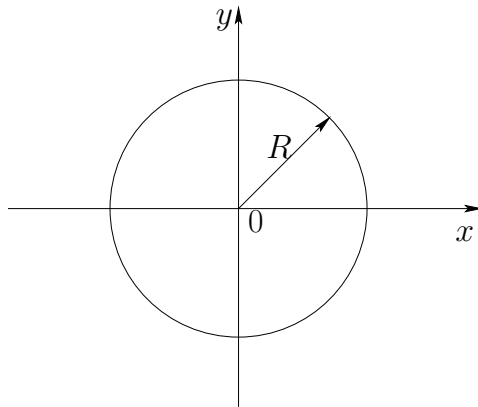


Figura 12.5: Ilustração ao Caso II

$$|z| = 1, \bar{z} = \frac{1}{z}, \frac{dz}{dt} = ie^{it} = iz \text{ e}$$

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \text{sent} t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad \text{e} \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Logo,

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \text{sent} t) dt = \int_{\gamma} F \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{iz}.$$

Se o integrando à direita não possui polos ao longo de γ , obtemos

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \text{sent} t) dt = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res}(f, a_j),$$

com a_1, \dots, a_n as singularidades de $f(z) = \frac{1}{iz} F \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)$ em $D(0; 1)$.

Caso III: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) dx$

Analogamente a uma situação descrita no caso I, suponhamos:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ com } P \text{ e } Q \text{ polinômios com coeficientes reais,}$$

$$Q \text{ sem raízes reais e } \text{grau}(Q) \geq \text{grau}(P) + 2.$$

Se o integrando contiver a função cosseno, o uso imediato do contorno semi-circular visto no caso I não é factível aqui. Pois, sobre o eixo imaginário temos:

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh(y), y \in \mathbb{R},$$

e assim, a função $\cos z$ cresce exponencialmente sobre o eixo-imaginário. A idéia é então trocar $\cos z$ por e^{iz} , em seguida computar a integral usando o contorno semi-circular visto no caso I, notando que no semi-plano superior vale a desigualdade

$$|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1, \text{ pois } \text{Im}(z) = y \geq 0,$$

e, por fim, computar a parte real do valor obtido.

12.15 Exemplo. *Verifique*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}, \text{ se } a > 0.$$

Caso IV: $\text{VP} \int_a^b f(x) dx$

12.16 Definição. Dizemos que a integral $\int_a^b f(x) dx$ é absolutamente convergente se a integral (própria ou imprópria)

$$\int_a^b |f(x)| dx,$$

é convergente (i.e., finita). A integral é dita absolutamente divergente se

$$\int_a^b |f(x)| dx = +\infty .$$

Lembrando o que ocorre com séries absolutamente convergentes e séries condicionalmente convergentes, para uma integral absolutamente convergente temos essencialmente uma única maneira de atribuir um valor para a integral, enquanto que para uma integral absolutamente divergente não temos uma forma óbvia para atribuir um valor a tal integral.

12.17 Definição. Seja $f = f(x)$ contínua em $[a, x_0) \cup (x_0, b]$. O valor principal da integral $\int_a^b f(x) dx$ é, se existir, dado pela notação e pelo limite abaixo

$$\text{VP} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x) dx \right) .$$

Notemos que o valor principal de uma integral coincide com o valor usual de uma integral (própria ou imprópria) se o integrando, f , é absolutamente integrável. A definição de valor principal, se ou a , ou b , ou a e b : são pontos de descontinuidade de f ou são infinitos ou não pertencem ao domínio de f , é análoga à definição já dada. Se f tem um número finito de descontinuidades no intervalo aberto (a, b) , o valor principal da integral de f é computado dividindo (a, b) em sub-intervalos, cada um contendo um ponto de descontinuidade de f e então computando os valores principais de cada integral de f restrita a cada sub-intervalo e, finalmente, somando os valores principais obtidos.

12.18 Exemplo. $VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

O integrando, próximo de $x = 1$, é comparável com a função $\frac{1}{x-1}$. Assim, a integral acima é absolutamente divergente. A integral, nos intervalos $(-\infty, 1-\epsilon]$ e $[1+\epsilon, +\infty)$ é absolutamente convergente (verifique). Assim, o valor principal da integral acima é definido por:

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{1-\epsilon} \frac{1}{x^3-1} dx + \int_{1+\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx \right).$$

A função $f(z) = \frac{1}{z^3-1}$ têm três polos de ordem 1, as 3 raízes cúbicas de $z = 1$. Integremos f sobre um semi-círculo denteado superior C centrado na origem, de raio $R > 1$, contornando o polo simples $z = 1$ e orientado no sentido anti-horário. O interior de tal semi-círculo denteado contém o polo simples $e^{2\pi i/3}$ e pelas regras operatórias, 12.13 (e) e (f), obtemos

$$res\left(\frac{1}{z^3-1}, e^{2\pi i/3}\right) = \frac{1}{3z^2}\Big|_{z=e^{2\pi i/3}} = \frac{e^{2\pi i/3}}{3}, \quad res\left(\frac{1}{z^3-1}, 1\right) = \frac{1}{3} \text{ e}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z^3-1} dz = -\pi i res\left(\frac{1}{z^3-1}, 1\right) = -\frac{\pi}{3}i,$$

onde utilizamos $\gamma_\epsilon(t) = 1+\epsilon e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, \pi]$. Assim temos, com Γ_R o semi-círculo superior centrado na origem e de raio R , orientado no sentido anti-horário,

$$(12.18.1) \quad 2\pi i \frac{e^{2\pi i/3}}{3} = \int_{\partial C} f(z) dz = \int_{-R}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^3-1} + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z^3-1} + \int_{1+\epsilon}^R \frac{dx}{x^3-1} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^3-1}.$$

Aplicando a Estimativa M-L temos:

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^3-1} \right| \leq \frac{\pi R}{R^3-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Desta forma, computando o limite de (12.18.1) para $R \rightarrow +\infty$ obtemos

$$\frac{2\pi i}{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\int_{-\infty}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^3-1} + \int_{1+\epsilon}^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1} \right) + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z^3-1},$$

donde, computando o limite para $\epsilon \rightarrow 0$ segue,

$$-\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}i = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1} - \frac{\pi}{3}i \quad \blacksquare$$

Caso V: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x) dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(x) dx$

Suponhamos:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ com } P \text{ e } Q \text{ polinômios com coeficientes reais,}$$

$$\operatorname{grau}(Q) \geq \operatorname{grau}(P) + 1.$$

Notemos que neste caso as integrais são absolutamente divergentes e, portanto, computaremos somente o valor principal.

12.19 Lema de Jordan. *Dado o semi-círculo $\Gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, segue*

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}| |dz| < \pi.$$

Prova. É claro que

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}| |dz| = \int_0^\pi |e^{iRe^{i\theta}}| |iRe^{i\theta}| d\theta = R \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta.$$

No intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, a função $\operatorname{sen}\theta$ tem a concavidade voltada para baixo e seu gráfico está acima do reta conectando $(0, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Logo,

$$\operatorname{sen}\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta, \text{ se } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Assim,

$$\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} \int_0^R e^{-t} dt < \frac{\pi}{R} \quad \blacksquare$$

12.20 Exemplo. *Verifiquemos*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

Como $(\operatorname{sen}z)/z$ é analítica em $z = 0$, temos que $(\operatorname{sen}x)/x$ é integrável em todo intervalo limitado. Solicitamos ao leitor verificar que $(\operatorname{sen}x)/x$ não é absolutamente integrável em $[0, +\infty]$. Ainda, devido à paridade de $(\operatorname{sen}x)/x$ temos,

$$\int_0^R \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^{+R} \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx .$$

Logo, encontraremos o resultado desejado computando o valor principal,

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx .$$

Consideremos $f(z) = e^{iz}/z$, com um só polo (simples) em $z = 0$ e $\operatorname{res}(f, 0) = 1$. Seja C o semi-círculo denteado no semi-plano superior, contornando tal polo. Analogamente ao exemplo anterior, definindo $\gamma_\epsilon(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, \pi]$.

$$(12.20.1) \quad 0 = \int_{\partial C} f(z) dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz .$$

Pelas regras operatórias para resíduos temos

$$\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i \operatorname{res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = -\pi i .$$

Computando o limite de (12.20.1) para $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos,

$$0 = VP \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz .$$

Destacando a parte imaginária da identidade acima encontramos,

$$0 = \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx - \pi + \operatorname{Im} \left[\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right] .$$

Finalmente, pelo Lema de Jordan 12.19 segue,

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{1}{R} \int_{\gamma_r} |e^{iz}| |dz| < \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 .$$

Logo,

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx = \pi \quad \blacksquare$$

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 12

1. Determine a expansão de Laurent da função dada em torno de cada uma de suas singularidades, especificando o anel no qual ela é válida.

(a) $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}$

(e) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$

(b) $f(z) = -1 - \frac{1}{z} + e^{1/z}$

(f) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

(c) $f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2(z-i)}$

(g) $f(z) = \cos \frac{1}{z}$

(d) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)}$

(h) $f(z) = \frac{z^5}{(z^2-2)^2}$

2. Uma função holomorfa num disco em torno de um polo é a soma de duas funções, uma racional e outra holomorfa.

3. Dê uma função com um polo de ordem 1 em $z = 2$ e um polo de ordem 7 em $z = \sqrt{2}i$.

4. Classifique a singularidade 0 de cada uma das funções:

(a) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

(b) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$

(c) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3}$

(d) $f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$

(e) $f(z) = \frac{1}{z^8 - z}$

(f) $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}$.

5. Determine a ordem do polo de f em a e calcule $\text{res}(f; a)$.

(a) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, $a = 0$

(e) $f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

(b) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^{n+1}}$, $a = 0$

(f) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$, $a = 0$.

(c) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$, $a = 0$

(g) $f(z) = \frac{1 - e^{3z}}{z^4}$, $a = 0$.

(d) $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^5}$, $a = 1$

(h) $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

6. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.

7. Seja $\xi \in \mathbb{R}$.

(a) Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx$.

(b) Qual o valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx$?

Obs: A integral em (a) é a transformada de Fourier, $\hat{f}(\xi)$, de $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

8. Mostre que $\forall \xi \in \mathbb{C}$ vale:

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x \xi} dx .$$

9. Compute, utilizando resíduos, as **Integrais de Fresnel**:

$$(a) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \qquad (b) \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx .$$

Sugestão: Fixado $R > 0$, integre e^{-z^2} sobre a fronteira do setor circular

$$\left\{ z = r e^{i\theta} : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\} .$$

10. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

11. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

12. Compute, utilizando resíduos, $\int_0^\pi \frac{a}{a+\cos t} dx$, $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

13. Compute, utilizando resíduos,

(a) V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$

(b) V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ e V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(c) O que pode ser dito de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$?

(d) O que pode ser dito de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$?

14. Utilize resíduos para calcular

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+5)} dx$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$

(f) $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

(g) $\int_0^{2\pi} (2 \cos^3 t + 4 \sin^5 t) dt$

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx$

(h) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx$, onde $a > 0$.

15. Seja f holomorfa em $\Omega \ni 0$ e ainda: $f(0) = 0$ e 0 é o único zero de f em Ω .
Seja g também holomorfa em Ω . Então, f divide g [i.e., temos $g = hf$, com h holomorfa] se e somente se:

$$\operatorname{res} \left(\varphi \frac{g}{f} 0 \right) = 0 \quad \text{para toda função holomorfa } \varphi \text{ em } \Omega .$$

16. Suponha que f é derivável em Ω e com derivada contínua. Seja T um triângulo contido em Ω e com interior em Ω . Sem utilizar a Fórmula Integral de Cauchy (e a existência de f''), mostre, usando o Teorema de Green que

$$\int_T f(z)dz = 0 .$$

Atenção: Tal resultado prova o Teorema de Cauchy-Goursat, supondo que f' é contínua. **Sugestão:** Use as equações de Cauchy-Riemann.

17. Ache o número de zeros satisfazendo $|z| < 1$ dos seguintes polinômios:

$$(i) \quad z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 \quad ; \quad (ii) \quad z^4 - 5z + 1 .$$

18. Se $|a| > e$, a equação $e^z = az^n$ tem n raízes no disco $|z| < 1$.