

# Números Complexos

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

## Capítulo 1 - NÚMEROS COMPLEXOS

- 1 - Sobre a origem dos números complexos.
- 2 - O corpo dos números complexos,  $\mathbb{C}$ . O plano de Argand-Gauss.
- 3 - O corpo  $\mathbb{C}$  não é ordenável.
- 4 - O conjugado e o módulo de um número complexo.
- 5 - O argumento e a representação polar em  $\mathbb{C}$ .  
A representação geométrica para o produto em  $\mathbb{C}$ .
- 6 - Potenciação e radiciação. Fórmula de Moivre.
- 7 - A orientação de um paralelogramo.  
Uma interpretação geométrica do produto interno em  $\mathbb{C}$ .

## Capítulo 2 - POLINÔMIOS

- 1 - Polinômios com Coeficientes Complexos
- 2 - Resolução Elementar de Equações por Radicais.
- 3 - Equações Redutíveis a Quadráticas.
- Apêndice - Teorema da Decomposição em Frações Simples (ou Parciais).

## Capítulo 3 - SEQUÊNCIAS, TOPOLOGIA E CONTINUIDADE

- 1 - Introdução.
- 2 - Axioma do Supremo.
- 3 - Topologia essencial de  $\mathbb{C}$ .
- 4 - Sequências, Limite de uma Sequência e Propriedades Operatórias.
- 5 - Subsequências e Valor de Aderência.
- 6 - Compacidade.
- 7 - Sequências de Cauchy.
- 8 - O  $\limsup$  e o  $\liminf$ .
- 9 - Exemplos Clássicos de Sequências.
- 10 - Continuidade em  $\mathbb{C}$ .
- 11 - Conexidade.
- 12 - As Funções Logaritmo e Exponencial Reais.
- Apêndice 1 - Comentários Sobre os Números  $e$  e  $\pi$ .
- Apêndice 2 - Compacidade.



# Capítulo 1

## NÚMEROS COMPLEXOS

### 1.1 - Sobre a Origem dos Números Complexos

Os breves comentários a seguir apóiam-se nas notas do Prof. César Polcino, “A emergência dos Números complexos” (15 páginas), cuja leitura é recomendada.

Tais números surgiram naturalmente, ao menos, desde a ocorrência das equações do segundo grau nas tabuletas de argila da Suméria, c. 1700 a.C. Até sua total formalização em 1833 pelo irlandês W. R. Hamilton (1805 – 1865) foi um árduo processo.

O fato de um número negativo não ter raiz quadrada parece ter sido sempre conhecido pelos matemáticos que se depararam com a questão. Contrariamente ao bom senso, não foram as equações do segundo grau que motivaram a aceitação de tal campo numérico mas sim as de terceiro grau. As equações de segundo grau eram vistas como a formulação matemática de um problema concreto ou geométrico e se no processo de resolução surgia uma raiz quadrada de um número negativo, isto era interpretado como prova de que tal problema não tinha solução. Exemplificamos abaixo com um problema na *Arithmetica* de Diofanto (275 d.C.).

**Problema:** Determinar os lados de um triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 unidades.

Solução: indicando por  $x$  e  $y$  os comprimentos dos catetos temos

$$\frac{xy}{2} = 7 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2 .$$

Desenvolvendo a segunda equação temos  $12x + 12y = 72 + xy$  e nesta pondo  $y = \frac{14}{x}$ ,

$$6x^2 - 43x + 84 = 0 \implies x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Aqui, Diofanto observa que só poderia haver solução se  $(\frac{172}{2})^2 > \frac{24}{336}$ . Neste contexto é supérfluo procurar um sentido para a expressão  $\sqrt{-167}$ .

O primeiro matemático a perceber a premência dos números complexos (ainda que, naturalmente, de modo vago e confuso) foi o italiano R. Bombelli (c. 1526-1573), autor da obra em três volumes *l'Algebra* (1572, Veneza). Na página 294 deste Bombelli aplica à equação  $x^3 = 15x + 4$ , a fórmula de Tartaglia-Cardano <sup>1</sup> para o cálculo das raízes, obtendo:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Notando que  $x = 4$  é uma raiz da equação Bombelli cogita que tal valor está implícito na expressão para as raízes e que é possível dar um sentido à expressão  $2 \pm \sqrt{-121}$  e definir operações entre expressões análogas, tais como adição, multiplicação, radiciação, etc. de modo que  $x = 4$  seja apenas um dos valores obtidos através destas. Assim, nasce uma situação em que apesar da presença de radicais de números negativos, existe uma solução da equação dada. É um fenômeno novo, difícil de entender mas relevante e é necessário compreendê-lo com profundidade.

A partir do trabalho de Bombelli os números complexos começam a ser utilizados como um “algoritmo que funciona” para resolver equações de terceiro grau mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir. Uma das grandes dificuldades em admitir a existência dos complexos era a ausência de uma representação geométrica ou de uma interpretação física destes números. A obtenção da representação geométrica, que lhes deu a “cidadania” definitiva na matemática foi também árdua. Principiou em 1673 com o inglês J. Wallis (1616-1703) e continuou com os franceses A. de Moivre (1667-1754) e J. D’Alembert (1717-1783), o inglês R. Cotes (1682-1716), o suíço L. Euler (1707-1783), etc. e pode-se dizer que estabelecida pelo norueguês C. Wessel (1745-1818) em 1799, pelo francês J. R. Argand (1768-1822) em 1806 e o alemão C. F. Gauss (1777-1855) em 1831, que cunhou a expressão um tanto inapropriada “números complexos”. A formalização completa deve-se, como já mencionamos a W. Hamilton.

---

<sup>1</sup>Os italianos Nicollo Tartaglia (c. 1500-1557) e G. Cardano (1501-1576).

## 1.2 - O Corpo dos Números Complexos. O plano de Argand-Gauss.

No que segue  $\mathbb{R}$  é o corpo ordenado completo dos números reais com métrica

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty), \quad d(x, y) = |x - y|,$$

e  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  é o espaço vetorial real dado pelas operações: se  $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$ ,

- adição:  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ,
- multiplicação por escalar:  $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ .

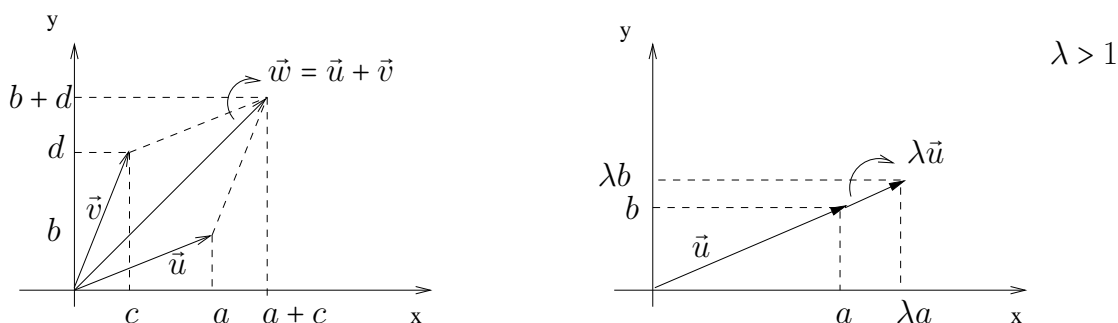


Figura 1.1: adição e multiplicação por escalar real

A operação de adição tem as propriedades: dados  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$ ,

- associativa:  $(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)$
- comutativa:  $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$
- existência do neutro:  $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$
- existência do oposto:  $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$ ;

e a operação multiplicação por escalar: dados  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ ,

- $\lambda_1[\lambda_2(a, b)] = (\lambda_1\lambda_2)(a, b)$
- $1.(a, b) = (a, b)$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)(a, b) = \lambda_1(a, b) + \lambda_2(a, b)$
- $\lambda[(a, b) + (c, d)] = \lambda(a, b) + \lambda(c, d)$ .

Com tais operações  $\mathbb{R}^2$  é um espaço vetorial real de dimensão dois.

Definiremos uma multiplicação em  $\mathbb{R}^2$  adaptada às regras operatórias esperadas para a multiplicação de números complexos. Informalmente introduzindo os “números”  $i$ ,  $i^2 = -1$ , e  $a + bi$  e  $c + di$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , e desejando manter as propriedades comutativas, associativas e distributivas para os números reais devemos esperar que

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i .$$

Desta forma, dados  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$  definimos a operação

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc) .$$

**1.1 Proposição** *O conjunto  $\mathbb{R}^2$  munido das operações  $+$  e  $*$ , indicado  $(\mathbb{R}^2, +, *)$ , é um corpo.*

**Prova.** As propriedades da adição para  $(\mathbb{R}^2, +, *)$  decorrem das propriedades da adição para  $\mathbb{R}^2$  como um espaço vetorial (enunciadas à página anterior) .

Dados  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$  temos, verifiquemos as propriedades abaixo para a operação  $*$ :

- associativa:  $(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = [(a, b) * (c, d)] * (e, f)$
- comutativa:  $(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$
- existência do ele/o neutro:  $(a, b) * (1, 0) = (a, b)$
- existência do ele/o inverso:  $\forall (a, b) \neq (0, 0)$ , existe  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  tal que  
 $(a, b) * (u, v) = (1, 0)$
- distributiva:  $(a, b) * [(c, d) + (e, f)] = (a, b) * (c, d) + (a, b) * (e, f)$ .

Verificação da associatividade:

$$\begin{aligned} (a, b) * [(c, d) * (e, f)] &= (a, b) * (ce - df, cf + de) = \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ac - bd, ad + bc) * (e, f) = [(a, c) * (b, d)] * (e, f) . \end{aligned}$$

A propriedade comutativa e a existência do elemento neutro seguem trivialmente da definição da operação  $*$ .

Para verificarmos à existência do inverso, resolvamos o sistema linear real nas variáveis  $u$  e  $v$ ,

$$au - bv = 1, \quad bu + av = 0.$$

Tal sistema têm determinante  $a^2 + b^2 \neq 0$  e solução única dada por,

$$u = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad v = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Por fim, verifiquemos a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} (a, b) * [(c, d) + (e, f)] &= (a, b) * (c + e, d + f) = \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= ((ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) * (c, d) + (a, b) * (e, f) \blacksquare \end{aligned}$$

**1.2 Definição.**  $(\mathbb{R}^2, +, *)$  é o corpo dos números complexos, indicado por  $\mathbb{C}$ .

Nos referiremos a  $\mathbb{C}$  como corpo dos números complexos ou **plano complexo**. Por esta construção,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$  são conjuntos iguais e o mesmo espaço vetorial. Ao enfatizarmos as estruturas de espaço vetorial ou corpo escreveremos  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{C}$ , respectivamente. Mostramos abaixo que  $\mathbb{C}$  contém um subcorpo isomorfo a  $\mathbb{R}$ , justificando a notação  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Consideremos a aplicação, evidentemente injetora,

$$j : a \in \mathbb{R} \mapsto (a, 0) \in \mathbb{C}.$$

É claro que  $j$  preserva as operações de adição e multiplicação, isto é,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} j(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = j(a) + j(b), \\ j(ab) = (ab, 0) = (a, 0) * (b, 0) = j(a)j(b). \end{cases}$$

Assim,  $j$  é um isomorfismo de corpos e  $\text{Im}(j) = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$  é subcorpo de  $\mathbb{C}$  isomorfo a  $\mathbb{R}$  (vide Figura 1.2, a seguir).

Por tal isomorfismo não há diferença algébrica entre  $\mathbb{R}$  e  $\text{Im}(j)$  e passamos a identificá-los, não distinguindo entre um número real  $a$  e  $j(a) = (a, 0)$ .



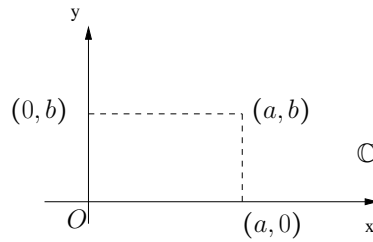


Figura 1.2: Eixo  $x$  isomorfo a  $\mathbb{R}$  por  $j$

A multiplicação por escalar real herdada de  $\mathbb{R}^2$  não conflita com  $*$ . De fato, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  temos,

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b) \quad \text{e} \quad \lambda * (a, b) = (\lambda, 0) * (a, b) = (\lambda a - 0 \cdot b, \lambda b + 0 \cdot a) = (\lambda a, \lambda b) .$$

Doravante, omitimos o símbolo  $*$  e escrevemos  $(a, b)(c, d)$  para  $(a, b) * (c, d)$ .

O corpo  $\mathbb{C}$  tem três elementos distinguidos, a saber,

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1) .$$

Os elementos  $0 = (0, 0)$  e  $1 = (1, 0)$  são, respectivamente, os elementos neutros da adição e da multiplicação em  $\mathbb{C}$ . O par ordenado  $(0, 1)$  satisfaz a identidade  $(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$  e é indicado por  $i$ . Logo, temos  $i^2 = -1$  e portanto  $\mathbb{C}$  é uma extensão do corpo  $\mathbb{R}$  na qual o elemento  $-1 = (-1, 0)$  tem raiz quadrada  $i \in \mathbb{C}$  e escrevemos  $i = \sqrt{-1}$ . Segue que todo número real  $a$  admite raiz quadrada complexa. De fato, se  $a \geq 0$  já o sabemos e se  $a < 0$  temos  $(i\sqrt{|a|})^2 = -|a| = a$ . Mais adiante veremos que todo número complexo possui  $m$  raízes  $m$ -ésimas em  $\mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , mostrando que o problema da radiciação, com muitas particularidades em  $\mathbb{R}$ , é simplesmente e completamente solúvel em  $\mathbb{C}$ .

Pelas identificações acima citadas podemos escrever,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b(0, 1) = a + bi .$$

Com esta notação temos,

$$(a + ib)(c + id) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i .$$

É usual indicar um número complexo por  $z$ ,  $w$  e pela letra grega  $\zeta$  (lê-se zéta). Se  $z = (a, b) = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $a$  é a parte real de  $z$  e  $b$  é a parte imaginária de  $z$ , denotadas

por  $\operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$ , respectivamente, isto é,

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

A representação geométrica de  $z \in \mathbb{C}$  é igual a de  $\mathbb{R}^2$ , seja pelo ponto do plano cujas coordenadas são, respectivamente, as partes real e imaginária de  $z$ , dito afixo de  $z$ , seja pelo vetor com origem coincidente com a origem do sistema de coordenadas e extremidade o afixo de  $z$ .

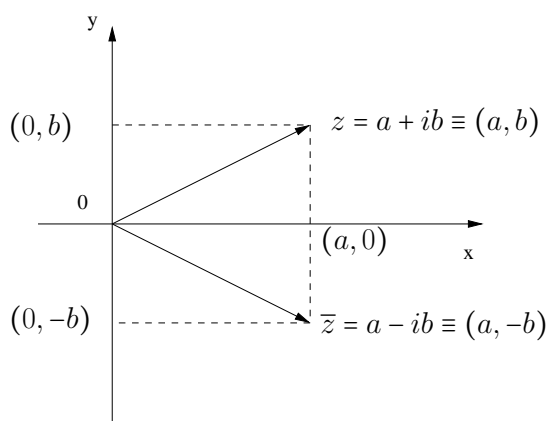


Figura 1.3: Representação geométrica de  $z$  e de  $\bar{z} = a - ib$

O eixo das abscissas,  $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ , é dito eixo real e o das ordenadas,  $\{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$ , é denominado eixo imaginário. A representação de  $\mathbb{C}$  como pontos em  $\mathbb{R}^2$  é chamada plano de Argand-Gauss.

### 1.3 - O corpo $\mathbb{C}$ não é ordenável.

Intuitivamente, um corpo  $K$  é ordenado se existe um subconjunto de  $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$  que pode ser chamado de conjunto dos “números positivos de  $\mathbb{K}$ ”.

**1.3 Definição.** O corpo  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  é dito ordenado se houver  $P \subset \mathbb{K}^*$  tal que,

- (a)  $\forall x \in \mathbb{K}$ , apenas uma das três condições ocorre: ou  $x = 0$  ou  $x \in P$  ou  $-x \in P$ ;
- (b)  $\forall x, y \in P$  temos,  $x + y \in P$  e  $xy = x \cdot y \in P$ .

Indicamos  $x \in P$  por  $x > 0$  e  $x > y$  por  $x - y > 0$ .

#### 1.4 Teorema *O corpo $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado.*

##### **Prova.**

Suponhamos que exista um conjunto  $P$ ,  $P \subset K^*$ , satisfazendo as condições (a) e (b) dadas na Definição 1.3.

Se  $1 < 0$  (isto é,  $-1 \in P$ ), por (b) temos  $(-1)(-1) = 1 \in P$ , contradizendo a condição (a). Portanto, concluímos  $1 > 0$ .

Se  $z \in \mathbb{C}^*$  temos: se  $z \in P$  então  $z \cdot z = z^2 \in P$ ; por outro lado, se  $z \notin P$  então  $-z \in P$  e  $(-z)(-z) = z^2 \in P$ . Logo,  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ , obtemos  $z^2 > 0$  e, como  $1 > 0$ , por (b) segue que  $z^2 + 1 > 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ , e portanto,

$$i^2 + 1 = 0 \in P \quad \text{!}$$

#### 1.4 - O conjugado e o módulo<sup>2</sup> de um número complexo.

##### 1.5 Definição. *O conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ é: $\bar{z} = a - bi$ .*

Valem então as relações,

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) \text{ e } \operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z}) .$$

Geométricamente (vide figura 1.3)  $\bar{z}$  é o simétrico de  $z$  em relação ao eixo real. É claro que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} .$$

A aplicação  $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ , dita **conjugação**, é um automorfismo de corpo que mantém o corpo  $\mathbb{R}$  fixo.

##### 1.6 Propriedades da conjugação:

(a) *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  temos,*

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{\bar{z}} = z \quad \text{e}, \quad \bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} .$$

(b) *Dado  $z \in \mathbb{C}^*$  temos,*

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} .$$

---

<sup>2</sup>O módulo de um número complexo foi introduzido por Argand.

**Prova.**

(a) Segue trivialmente da definição de conjugado.

(b) Como  $z \frac{1}{z} = 1$ , por (a) temos  $\overline{z \left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1$ . Logo,  $\overline{z}^{-1} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$  ■

Os números complexos da forma  $bi$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , são ditos imaginários puros e  $z \in \mathbb{C}$  é um tal número se, e só se,  $z = -\overline{z}$ .

**1.7 Definição.** O módulo de  $z = a + ib$ , com  $a$  e  $b$  reais, é:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Geometricamente, o módulo de  $z \in \mathbb{C}$  é a distância do afixo de  $z$  à origem.

**1.8 Proposição.** Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ . Valem as propriedades:

(a)  $|z| = |\overline{z}|$  e  $z\overline{z} = |z|^2$ .

(b)  $|zw| = |z||w|$  e, se  $z \neq 0$ ,  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ .

(c)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ ,  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$  e  $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ .

**Prova.** Seja  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(a) Segue imediatamente das identidades

$$|a + ib| = |a - ib| \quad \text{e} \quad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

(b) Por (a) e pela Proposição 1.6(a) temos,  $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$ ; donde segue a primeira afirmação do item (b) e desta afirmação, se  $z \neq 0$ , segue claramente que  $1 = \left|z \frac{1}{z}\right| = |z| \left|\frac{1}{z}\right|$  e portanto,  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ .

(c) É fácil ver que  $\max\{|a|, |b|\} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$  ■

Doravante indicaremos o máximo entre dois números  $a$  e  $b$  por  $\max(a, b)$ .

**1.9 Corolário** Seja  $z \in \mathbb{C}^*$ . Temos,

(a)  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$  e  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ .

(b) Se  $|z| = 1$  então  $z^{-1} = \overline{z}$ .

**Prova.**

(a) A primeira afirmação segue da Proposição 1.8(a) pois,  $z \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$ . Quanto à segunda, pelas Proposições 1.8(a) e 1.8(b) temos  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|}$ .

(b) Consequência de (a) ■

Pela identificação  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ , como espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ , destacamos:

**1.10 Proposição.** A função módulo,  $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty)$ , é uma norma sobre  $\mathbb{C}$ :

(a)  $|z| = 0$  se, e só se,  $z = 0$ .

(b)  $|\lambda z| = |\lambda| |z|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$ .

(c)  $|z + w| \leq |z| + |w|, \forall z, w \in \mathbb{C}$  (desigualdade triangular).

**Prova.**

(a) Evidentemente,  $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$ .

(b) Um caso particular da proposição 1.3(b).

(c) Não é difícil ver que,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Donde,  $|z + w| \leq |z| + |w|$  ■

**1.11 Corolário.**  $|z - w| \geq ||z| - |w||, \forall z, w \in \mathbb{C}$ .

**Prova.**

Pela desigualdade triangular temos  $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$  e então,  $|z - w| \geq |z| - |w|$ . Analogamente,  $|w - z| \geq |w| - |z|$  e assim,  $|z - w| = |w - z| \geq |w| - |z|$  ■

A Proposição 1.10 (c) e seu corolário são, respectivamente, a primeira e a segunda desigualdade triangular e expressam as propriedades geométricas:

- o comprimento de um dos lados de um triângulo é menor que soma dos comprimentos dos outros dois lados.
- o comprimento de um dos lados de um triângulo é maior que o módulo da diferença dos outros dois lados.

## 1.5 - O argumento e a representação polar de um número complexo.

### A interpretação geométrica para o produto em $\mathbb{C}$ .

Neste capítulo utilizamos de forma intuitiva conceitos geométricos e trigonométricos para a apresentação do argumento de um número em  $\mathbb{C}$ . No Capítulo 5, *Séries Absolutamente Convergentes e Somas Não Ordenadas*, provaremos a existência das funções trigonométricas (e as Fórmulas de Moivre e de Euler).

Um número  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $z = a + ib$ , tem afixo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  que projetado sobre o círculo unitário  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  determina um único  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que (vide figura 1.4)

$$\frac{z}{|z|} = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = (\cos \theta, \sin \theta) .$$

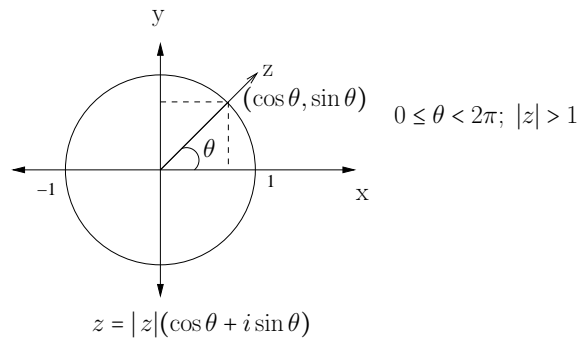


Figura 1.4: O argumento de  $z$

Notemos que  $\theta$  corresponde à medida em radianos do ângulo determinado pelo semi-eixo positivo dos  $x$ 's,  $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$ , e o segmento de reta unindo a origem  $O$  ao afixo de  $z$ , medido a partir do semi-eixo e no sentido anti-horário. Claramente,

$$\begin{cases} z = |z| \frac{z}{|z|} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta, \\ a = \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \theta \quad , \quad b = \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \theta . \end{cases}$$

Todo número  $\varphi = \theta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , satisfaz  $z = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi$  e é dito um **argumento**, ou **amplitude**, de  $z$  e é indicado por  $\arg(z)$ . Inversamente, para  $\varphi$  arbitrário satisfazendo  $z = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi$  temos  $\cos \varphi = \cos \theta$ ,  $\sin \varphi = \sin \theta$  e  $\cos(\varphi - \theta) = \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ . Portanto, vale a identidade  $\varphi - \theta = 2k\pi$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

**1.12 Definição.** Seja  $z \in \mathbb{C}^*$ .

- O par  $(|z|, \arg(z))$  é uma representação (ou forma) polar de  $z$ .
- O argumento principal de  $z$ ,  $\text{Arg}(z)$ , é o único argumento de  $z$  em  $(-\pi, \pi]$ .

**Observações:**

- (a) Se  $z$  tem forma polar  $(r, \theta)$  escrevemos  $z = (r, \theta)_o$ .
- (b) Por convenção e praticidade a forma polar de  $z = 0$  é  $(0, \theta)_o$ , com  $\theta \in \mathbb{R}$  e arbitrário.
- (c) A escolha da função argumento principal varia segundo as conveniências e autores. Em outros textos é utilizado o domínio  $[-\pi, \pi)$  ou  $[0, 2\pi)$ .

Abaixo mostramos que a forma polar simplifica a efetuação do produto de números complexos e permite uma representação geométrica de tal cálculo.

**1.13 Proposição.** Sejam  $z_i = (r_i, \varphi_i)_o$ ,  $i = 1, 2$ . Então,

- (a)  $z_1 z_2 = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)_o$ .
- (b)  $\overline{z_1} = (r_1, -\varphi_1)_o$ .
- (c) Se  $z_1 \neq 0$ ,  $\frac{1}{z_1} = (\frac{1}{r_1}, -\varphi_1)_o$ .

**Prova.** Vide também Figura 1.5, a seguir, e comentário.

- (a) Temos,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

- (b) Como  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  então,

$$\overline{z_1} = r_1(\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) = r_1 [\cos(-\varphi_1) + i \sin(-\varphi_1)].$$

- (c) Pelas Proposições 1.8 (a) e 1.13 (b) temos,

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{z_1 \overline{z_1}} = \frac{r_1 \cos(-\varphi_1) + i r_1 \sin(-\varphi_1)}{r_1^2} = \frac{1}{r_1} [\cos(-\varphi_1) + i \sin(-\varphi_1)] \blacksquare$$

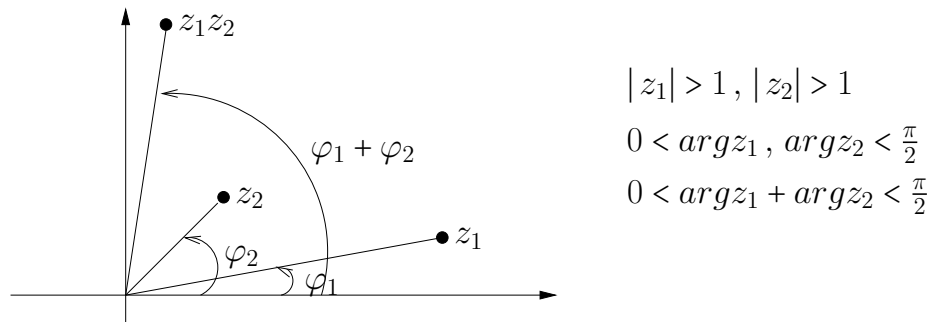


Figura 1.5: Representação geométrica do produto em  $\mathbb{C}$

**Comentário:** o vetor  $z_1$  é obtido aplicando ao vetor  $z_2$ , ambos representados com extremidade inicial a origem, uma rotação de ângulo  $\varphi_1$  e uma homotetia de razão  $r_1$ , não importando a ordem em que efetuamos estas operações.

## 1.6 - Potenciação e Radiciação em $\mathbb{C}$ . Fórmula de Moivre

**1.14 Definição.** Se  $z \in \mathbb{C}^*$  e  $m \in \mathbb{Z}$ , a potência  $m$ -ésima de  $z$ , denotada  $z^m$ , é definida por:

$$(a) \ z^0 = 1 \text{ e } z^{m+1} = z^m \cdot z, \text{ se } m \in \mathbb{N} \qquad (b) \ z^m = (z^{-1})^{-m}, \text{ se } m \in \mathbb{Z} \text{ e } m < 0.$$

Convencionamos  $0^m = 0$ , se  $m \in \mathbb{N}^*$ . Valem as regras operatórias usuais para potências de expoentes inteiros e base complexas.

**1.15 Proposição.** Sejam  $z, w \in \mathbb{C}^*$  e  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Então,

$$(a) \ z^m z^n = z^{m+n} \qquad (b) \ (zw)^m = z^m w^m \qquad (c) \ (z^m)^n = z^{mn}$$

$$(d) \ z^{-m} = \frac{1}{z^m} \qquad (e) \ \frac{z^m}{z^n} = z^{m-n} \qquad (f) \ \left(\frac{z}{w}\right)^m = \frac{z^m}{w^m}.$$

**Prova.**

Segue, por indução, da Definição 1.14 e a deixamos ao leitor ■

A seguir, mostramos que com a representação polar simplificamos e interpretamos geometricamente a operação potenciação, o que nos permitirá descrever completamente as raízes  $m$ -ésimas,  $m \in \mathbb{N}$ , de um número complexo arbitrário.



**1.16 Proposição (Fórmula de Moivre).** *Temos,*

$$z = (r, \varphi)_o \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z^m = (r^m, m\varphi)_o, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

*Isto é,*

$$(r \cos \varphi + ir \sin \varphi)^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) .$$

**Prova.** Analizemos os casos  $m = 0$ ,  $m > 0$  e  $m < 0$ , nesta ordem.

( $m = 0$ ) Trivial pois  $z^0 = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = r^0(\cos 0 + i \sin 0)$ .

( $m > 0$ ) Segue, por indução, da Proposição 1.13.

( $m < 0$ ) Pela Proposição 1.15(d) temos  $z^m = \frac{1}{z^{-m}}$  e, pelo caso anterior, temos  $z^{-m} = (r^{-m}, -m\varphi)_o$ . Consequentemente, pela Proposição 1.13(b) segue

$$\frac{1}{z^{-m}} = \left( \frac{1}{r^{-m}}, m\varphi \right)_o = (r^m, m\varphi)_o \quad \blacksquare$$

**1.17 Teorema.** *Se  $z \in \mathbb{C}^*$ , com forma polar  $(r, \varphi)_o$ , e  $m \in \mathbb{N}^*$ , então  $z$  tem exatamente as distintas  $m$  raízes  $m$ -ésimas:*

$$\sqrt[m]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) \right), k = 0, 1, \dots, m-1 .$$

**Prova.**

Inicialmente notemos que pela fórmula de Moivre temos, para qualquer  $k' \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt[m]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} \right) \right) \right]^m &= \\ &= r \left( \cos m \left( \frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} \right) + i \sin m \left( \frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} \right) \right) = \\ &= r \left( \cos(\varphi + 2k'\pi) + i \sin(\varphi + 2k'\pi) \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z . \end{aligned}$$

Ainda, se  $w = (\rho, \psi)_o$ , é raiz  $m$ -ésima de  $z$  então  $(r, \varphi)_o = z = w^m = (\rho^m, m\psi)_o$ .

Logo,  $\rho^m = r$  e  $m\psi - \varphi = 2k'\pi$ , para algum  $k' \in \mathbb{Z}$ . Isto é,  $(\rho, \psi) = \left( \sqrt[m]{r}, \frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} \right)$ .

Escrevendo  $k' = pm + k$ , com  $p \in \mathbb{Z}$  e  $k = 0, 1, \dots, m-1$  obtemos,

$$\psi = \frac{\varphi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} = \frac{\varphi}{m} + \frac{2pm\pi + 2k\pi}{m} = \left( \frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) + 2p\pi ;$$

logo,  $\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m} = \arg(w)$  e  $w$  tem a forma no enunciado. Por fim, os números descritos no enunciado são distintos: de fato, dados dois deles com argumentos distintos, a diferença dos argumentos é  $\frac{2(k_1 - k_2)\pi}{m}$  (onde  $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ), que não pertence a  $2\pi\mathbb{Z}$  pois  $\frac{k_1 - k_2}{m}$  não é inteiro já que  $0 < \frac{|k_1 - k_2|}{m} \leq \frac{m-1}{m} < 1 \quad \blacksquare$

**Exemplos:** Vide também figura 1.6 que segue.

- (a) As raízes cúbicas de  $i$  tem forma polar  $(1, \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})_o$ ,  $k = 0, 1, 2$ .
- (b) As raízes sextas de 1 tem forma polar  $(1, \frac{2k\pi}{6}) = (1, \frac{k\pi}{3})_o$ ,  $0 \leq k \leq 5$ .
- (c) Os afixos das  $m$  raízes de  $z \neq 0$  formam um polígono regular.

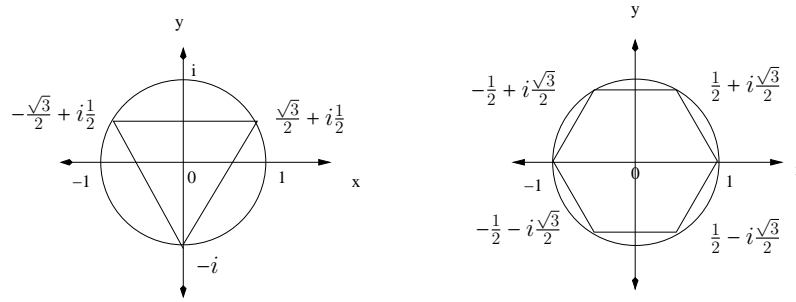


Figura 1.6: Representação geométrica das raízes nos exemplos (a) e (b)

### 1.7 - Área orientada de um paralelogramo. O produto interno em $\mathbb{C}$ .

Nesta seção,  $\vec{u}$  denota um vetor<sup>3</sup> em  $\mathbb{R}^2$ . Dado  $(a, b)$  no plano cartesiano, indicamos o vetor representado pelo segmento com extremidade inicial a origem deste plano e final  $(a, b)$  por  $\langle a, b \rangle$ .

Dois vetores  $\vec{u} = \langle a, b \rangle$  e  $\vec{v} = \langle c, d \rangle$ , não paralelos e em  $\mathbb{R}^2$ , determinam um paralelogramo  $\Omega$  que supomos, inicialmente, no primeiro quadrante. Seja  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \langle a + b, c + d \rangle$ . Consideremos a representação de  $\Omega$  [numa segunda e última representação as posições de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são trocadas],

Considerando os pontos  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq 7$ , a área delimitada por  $\Omega$ ,  $A(\Omega)$ , é dada por,

$$\begin{aligned}
 A(\Omega) &= A(OP_2P_3P_4) - A(OP_1P_7) - A(P_1P_2P_3P_7) - A(P_3P_4P_5P_6) - A(P_5OP_6), \\
 A(P_1P_2P_3P_7) &= \frac{(b + b + d)c}{2} = bc + \frac{cd}{2}, \quad A(P_3P_4P_5P_6) = \frac{(c + a + c)b}{2} = bc + \frac{ab}{2}, \\
 A(OP_2P_3P_4) &= (a + c)(b + d) = ab + ad + bc + cd, \\
 A(OP_1P_7) &= \frac{ab}{2} \quad \text{e} \quad A(P_5OP_6) = \frac{cd}{2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$A(\Omega) = ab + ad + bc + cd - \frac{ab}{2} - bc - \frac{cd}{2} - bc - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} = ad - bc = D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

<sup>3</sup>O uso de uma flecha para indicar um vetor,  $\vec{u}$ , se deve a Argand.

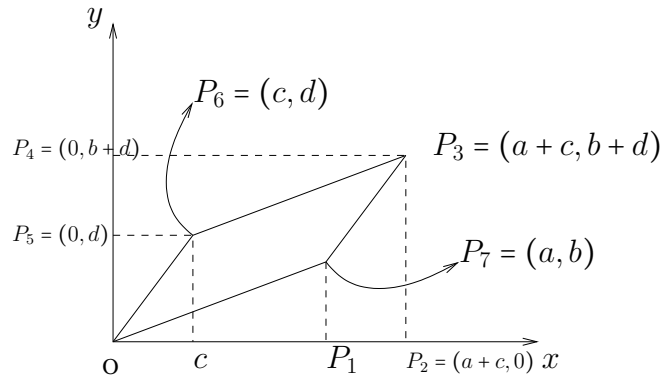


Figura 1.7: Determinante/Área

A seguir, associamos uma área ou ao determinante  $D$  se seu valor (também dito determinante) é positivo ou a  $D'$ , obtido trocando as colunas de  $D$  uma pela outra, se  $D$  é negativo.

**1.18 Definição.** O ângulo entre dois segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  no plano é o menor ângulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , unindo  $B$  e  $C$ .

**1.19 Definição.** O ângulo entre dois vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  é o ângulo entre dois segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , representantes de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente. Fixas tais representações, o (menor) ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , orientado de  $\vec{u}$  para  $\vec{v}$ , é o ângulo entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , orientado de  $B$  para  $C$ .

Mantendo a notação acima temos então o importante resultado abaixo.

**1.20 Proposição.** Se  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$  corresponde à 1ª coluna de um determinante  $2 \times 2$ ,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  à 2ª coluna deste determinante, com  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não paralelos, e  $\theta$ , o menor ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , orientado de  $\vec{u}$  para  $\vec{v}$ , tem sentido anti-horário então,

$$D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0.$$

Caso contrário, se a orientação de  $\theta$  é no sentido horário, temos  $ad - bc < 0$ .

**Prova.** Lembremos que medimos ângulos em  $\mathbb{R}^2$  no sentido anti-horário e a partir do eixo  $Ox$ . Suponhamos, primeiro, que  $\theta$  esteja orientado no senti anti-horário.

No que segue consideramos os representantes de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  com extremidade inicial na origem:  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ . Se  $\alpha$  é o ângulo de  $Ox$  a  $\vec{u}$  e  $\beta$  o ângulo de  $Ox$  a  $\vec{v}$ ,  $a, c \neq 0$ , temos  $\tan \alpha = \frac{b}{a}$  e  $\tan \beta = \tan \frac{d}{c}$ .

Caso 1:  $\vec{u}$  no primeiro quadrante.

(1a) Para  $\vec{v}$  no primeiro quadrante temos (vide figura anterior),

$$0 < \tan \alpha = \frac{b}{a} < \frac{d}{c} = \tan \beta, \quad bc < ad, \quad ad - bc > 0,$$

onde na segunda afirmação utilizamos  $ac > 0$ .

(1b) Para  $\vec{v}$  no segundo quadrante temos  $c < 0, d > 0, ac < 0$  e,

$$\tan \beta = \frac{d}{c} < 0 < \frac{b}{a} = \tan \alpha, \quad ad > bc.$$

(1c) Para  $\vec{v}$  no terceiro quadrante, com  $0 < \beta - \alpha < \pi$ , temos  $c < 0, d < 0, ac < 0$  e observando o valor da tangente no círculo trigonométrico (faça um esboço),

$$0 < \tan \beta = \frac{d}{c} < \frac{b}{a} = \tan \alpha, \quad ad > bc.$$

Caso 2:  $\vec{u}$  no segundo quadrante logo,  $a < 0$  e  $b > 0$ .

(2a) Para  $\vec{v}$  no segundo quadrante temos,  $c < 0, d > 0, ac > 0$  e (faça um esboço),

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} < \frac{d}{c} = \tan \beta < 0, \quad bc < ad.$$

(2b) Para  $\vec{v}$  no terceiro quadrante então  $c < 0, d < 0, ac > 0$  e,

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} < 0 < \frac{d}{c} = \tan \beta, \quad bc < ad.$$

(2c) Para  $\vec{v}$  no quarto quadrante, com  $0 < \beta - \alpha < \pi$ , temos  $c > 0, d > 0, ac < 0$  e observando o valor da tangente no círculo trigonométrico (faça um esboço),

$$\tan \beta = \frac{d}{c} < \frac{b}{a} = \tan \alpha < 0, \quad ad > bc.$$

Casos 3 e 4: Para  $\vec{u}$  no 3 [4] quadrante, os sub-casos com  $\vec{v}$  no 3, 4 e 1 [4, 1 e 2] quadrantes são análogos a (1a), (1b) e (1c) [(2a), (2b) e (2c)], respectivamente.

Po fim, se  $\theta$  tem o sentido horário, trocando as colunas de  $D$  recaímos na suposição anterior e obtemos um determinante  $D' > 0$ . Logo,  $D = -D' < 0$  ■

**1.21 Definição.** O par ordenado de vetores  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  é positivamente (negativamente) orientado se o menor ângulo entre eles, orientado de  $\vec{u}$  para  $\vec{v}$ , tem sentido anti-horário (horário).

**1.22 Definição.** O paralelogramo determinado pelo par ordenado  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  é positivamente orientado ou negativamente orientado segundo a orientação do par (ordenado)  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ .

**1.23 Corolário.** Na Proposição 1.20, se  $\theta$  tem sentido anti-horário [horário] então  $D$  é a área [o oposto da área] do paralelogramo positivamente [negativamente] orientado determinado pelo par ordenado  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ .

**Prova.** É deixada ao leitor ■

**1.24 Corolário.** Sejam  $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$ , e  $\theta$  o menor ângulo do vetor  $\langle x_1, y_1 \rangle$  para o vetor  $\langle x_2, y_2 \rangle$ . Então temos,

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \pm |z_1| |z_2| \operatorname{sen} \theta;$$

convencionando que o sinal adotado acima é positivo se  $\theta$  tem sentido anti-horário e negativo caso contrário.

**Prova.** Pela Proposição 1.20 e Corolário 1.23, o valor absoluto de  $D$  é a área do paralelogramo determinado pelo par ordenado  $\{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle\}$ . Por geometria elementar tal área é  $l_1 l_2 \sin \theta$ , sendo  $l_j = |\langle x_j, y_j \rangle| = |z_j|$ ,  $j = 1, 2$ . Isto é, temos  $|D| = |z_1| |z_2| \sin \theta$ ; donde, a tese ■

Solicitamos ao leitor verificar que  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ . Isto é,  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial complexo. Mostremos que analogamente ao espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  temos o importante resultado abaixo.

**1.25 Proposição.** A função  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z, w) \mapsto (z|w) = z\bar{w} \in \mathbb{C}$  satisfaz, para  $z's, w's$  e  $\lambda$  em  $\mathbb{C}$ ,

(a)  $(z_1 + z_2|w) = (z_1|w) + (z_2|w)$  e  $(\lambda z|w) = \lambda(z|w)$  [linearidade na 1 variável].

(b)  $(z|w_1 + w_2) = (z|w_1) + (z|w_2)$  e  $(z|\lambda w) = \bar{\lambda}(z|w)$  [linear-conjugada na 2 variável].

(c)  $(z|w) = \overline{(w|z)}$  [hermitiana simétrica ou conjugada-simétrica].

(d)  $(z|z) \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$  [positiva] e  $(z|z) = 0 \Rightarrow z = 0$  [definida].

**Prova.** Segue, é claro, das propriedades da adição, multiplicação e conjugação ■

A função acima é o **produto interno** canônico em  $\mathbb{C}$  ou **produto interno hermitiano**. Abaixo, expressamos o produto interno de dois números complexos em termos de suas coordenadas cartesianas e também utilizando suas representações polares.

**1.26 Proposição.** Sejam  $z_j = x_j + iy_j = (|z_j|, \theta_j)_o, x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2$ . Temos,

$$(z_1|z_2) = z_1\bar{z}_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) - i \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = |z_1||z_2| \cos(\theta_1 - \theta_2) + i|z_1||z_2| \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2).$$

**Prova.** Trivial pois  $\bar{z}_2 = (|z_2|, -\theta_2)_o$  e  $z_1\bar{z}_2 = (|z_1||z_2|, \theta_1 - \theta_2)_o$  ■

Na figura que segue representamos  $z_1, z_2$  e os ângulos envolvidos.

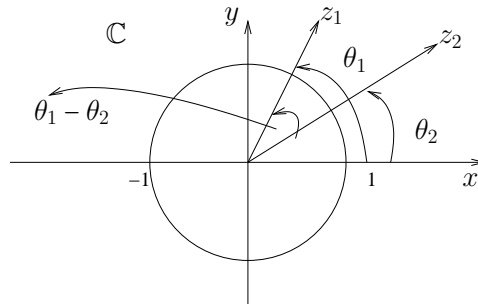


Figura 1.8:  $\theta_1 - \theta_2 = \operatorname{arg}((z_1|z_2))$

**Corolário 1.27** Se  $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$ , e  $\gamma = \arg(z_1) - \arg(z_2)$  então,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = -|z_1||z_2| \sin \gamma.$$

**Prova:** Como  $\arg(z_j) = \theta_j + 2k_j\pi$ ,  $k_j \in \mathbb{Z}$ , segue que  $\sin \gamma = \sin(\theta_1 - \theta_2)$  ■

**1.28 Corolário.** Mantendo a notação, seja  $\theta$  o menor ângulo entre  $\langle x_1, y_1 \rangle$  e  $\langle x_2, y_2 \rangle$ , orientado de  $\langle x_1, y_1 \rangle$  para  $\langle x_2, y_2 \rangle$  [notemos,  $\theta_1 - \theta_2 \in [-2\pi, 2\pi]$ ]. Temos,

$$(a) \theta_1 - \theta_2 \in [0, \pi] \Rightarrow \theta = \theta_1 - \theta_2 \quad (b) \theta_1 - \theta_2 \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow \theta = 2\pi - (\theta_1 - \theta_2).$$

$$(c) \theta_1 - \theta_2 \in [-\pi, 0] \Rightarrow \theta = -(\theta_1 - \theta_2) \quad (d) \theta_1 - \theta_2 \in [-2\pi, -\pi] \Rightarrow \theta = 2\pi + (\theta_1 - \theta_2).$$

**Prova.** Elementar e a deixamos ao leitor como exercício ■

**Comentários:** vide também Figura 1.8.

Quanto ao Corolário 1.28, sugerimos verificar: Nos casos (b) e (c),  $\theta$  tem sentido anti-horário, com  $-\theta = \arg z_1 - \arg z_2$  para determinados  $\arg z_1$  e  $\arg z_2$ ; ainda,  $-\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta$ . Nos casos (a) e (d),  $\theta$  tem sentido horário,  $\theta = \arg z_1 - \arg z_2$ , para determinados  $\arg z_1$  e  $\arg z_2$ , e  $-\sin(\theta_1 - \theta_2) = -\sin \theta$ .

Pelo Corolário 1.24 e Proposição 1.26, se  $\vec{u} = \langle x_1, y_1 \rangle$  e  $\vec{v} = \langle x_2, y_2 \rangle$  correspondem a  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente, e  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  indica o produto interno em  $\mathbb{R}^2$  de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(z_1|z_2) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm \text{comprimento da projeção de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} \\ -\operatorname{Im}(z_1|z_2) = \pm (\text{área do paralelogramo determinado pelo par } \{\vec{u}, \vec{v}\}), \\ \quad \text{o sinal + ou - segundo } \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ é positivamente} \\ \quad \text{ou negativamente orientado.} \end{array} \right.$$

## EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 1

1. (Fórmula Binomial) Mostre que dados  $z, w \in \mathbb{C}$  então

$$(z + w)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} z^p w^{n-p}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

Sugestão: Por indução. Lembrete:  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  e  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ ,  $p = 0, 1, \dots, n$ .

2. Escreva na forma binômica ( $z = x + iy$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ ) os números complexos:

$$\begin{array}{lll} (a) (4-i) + i - (6+3i)i & (b) \frac{5}{-3+4i} & (c) \frac{3-i}{4+5i} . \\ (d) (1+2i)^3 & (e) (3+2i)(\overline{1-4i}) & (f) \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 \\ (g) \overline{(4-i)} \cdot \overline{(1-4i)} & (h) (7+4i)(2-3i) + (6-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{5}) . \end{array}$$

3. Se  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), determine as partes real e imaginária de:

$$(a) z^4 \qquad (b) \frac{1}{z} \qquad (c) \frac{z-1}{z+1} \qquad (d) \frac{1}{z^2} .$$

4. Mostre que  $\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$  e  $\left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = -1$ .

5. Seja  $M_2(\mathbb{R})$  o anel das matrizes quadradas de ordem 2 com coeficientes reais, munido das operações usuais de adição e multiplicação.

Considere  $\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Mostre que a função

$$\varphi : a + ib = z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$$

é isomorfismo de corpos. Isto é,  $\varphi$  é bijetora

$$\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w) \qquad \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w) .$$

Dizemos que  $\varphi$  é uma bijeção que preserva adição e multiplicação.

6. Compute  $|z|$  nos seguintes casos:

$$(a) z = -2i(3+i)(2+4i)(1+i) \qquad (b) z = \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)} .$$



7. Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  mostre que:

(a)  $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$

(b)  $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$

(c)  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$  (lei do paralelogramo)

Sugestão:  $|z \pm w|^2 = (z \pm w)\overline{(z \pm w)} = (z \pm w)(\bar{z} \pm \bar{w}) = \dots$  etc.

8. (A desigualdade de Cauchy) Dadas duas seqüências de  $n$  números complexos  $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$  e  $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ , prove:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k \right|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right).$$

Sugestão: Faça primeiro o caso  $n = 2$  (o caso  $n = 1$  é trivial).

9. (A desigualdade de Cauchy) Dadas duas seqüências de  $m$  números complexos  $(a_k)_{1 \leq k \leq m}$  e  $(b_k)_{1 \leq k \leq m}$ , prove a desigualdade

$$\left( \sum_{k=1}^m |a_k b_k| \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^m |b_k|^2 \right).$$

Sugestão: Aplique o Exercício 8 com  $z_k = |a_k|$  e  $w_k = |b_k|$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

10. Calcule  $i^2, i^3, i^4, i^5$ . Mostre que se  $m \in \mathbb{N}^*$  e  $q$  e  $r$  são o quociente e o resto da divisão inteira de  $m$  por 4 (isto é,  $m = 4q + r$ ,  $0 \leq r \leq 3$ ), então  $i^m = i^r$ . Compute também:

(a)  $i^{20}$       (b)  $i^{1041}$       (c)  $i^{72}$       (d)  $(1+i)^{12}$       (e)  $1+i+i^2+\dots+i^{2011}$ .

11. Determine  $z$  sabendo que  $|z| = |1 - z| = \left| \frac{1}{z} \right|$ .

12. Desenhe a região do plano determinada por

(a)  $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \leq 1$       (b)  $\operatorname{Re} \left( \frac{z+1}{z-1} \right) = 0$       (c)  $|z+1| = 2|z|$ .

13. Se  $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  calcule:

(a)  $z^6$       (b)  $1 + z + z^2 + \dots + z^{47}$ .

14. Determine e represente graficamente:
- (a) as raízes quadradas de 1.
  - (b) as raízes cúbicas de 1.
  - (c) as raízes quartas de 1.
15. Ache todos os valores de:
- (a)  $(2+2i)^{3/2}$
  - (b)  $(-1+i\sqrt{3})^{1/3}$
  - (c)  $(-1)^{-3/4}$ .
16. Sob que condições se tem  $|z+w| = |z-w|$ ? Interprete geometricamente.
17. Sendo  $m \in \mathbb{Z}$ , que valores pode ter  $i^m + i^{-m}$ ?
18. Determine os valores máximo e mínimo de:
- (a)  $\left| \frac{z-i}{z+i} \right|$ , onde  $|z| = 3$
  - (b)  $|z+i|$ , onde  $|z-2| = 1$ .
19. Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$  tais que  $|z| = 1$  ou  $|w| = 1$ . Mostere que  $\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$ .
20. Determine os valores  $a \in \mathbb{R}$  tais que  $\frac{a+i}{1+ai} \in \mathbb{R}$ .
21. Determine os valores  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que  $\frac{2+\alpha i}{1+i}$  é imaginário puro.
22. Mostre que  $|z| = 1$  se e só se  $\frac{1}{z} = \bar{z}$ .
23. Se  $z + \frac{1}{z} = 1$ , calcule  $|z|$ .
24. Sendo  $a \in \mathbb{R}$ , determine  $\left| \frac{1-ai}{1+ai} \right|$ .
25. Prove e interprete geometricamente a chamada “Lei do Paralelogramo”:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

26. Desenhe a região do plano determinado pelas relações:

(a)  $\operatorname{Re}(z) = 1$                       (b)  $\operatorname{Im}(z) = -1$                       (c)  $1 \leq \operatorname{Im}(z) < 3$  .

(d)  $-1 < \operatorname{Re}(z) \leq 2$                       (e)  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$                       (f)  $\operatorname{Re}(z^2) = 1$  .

27. (a) Mostre que  $\frac{\bar{1}}{z} = \frac{z}{|z|^2}$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ .

(b) Utilize (a) e a observação “ $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \bar{w}$ ” para desenhar o conjunto,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\}.$$

28. Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 \neq z_2$  e  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , desenhe os subconjuntos:

(a)  $\{z : |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}$ , com a condição  $2a > |z_1 - z_2|$ .

(b)  $\{z : |z - z_1| - |z - z_2| = 2a\}$ , com a condição  $2a < |z_1 - z_2|$ .

(c)  $\{z : |z - z_1| = a\}$ .

29. Dado  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , desenhe o conjunto  $P := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z - z_1|}{\operatorname{Im}(z)} = 1 \right\}$  .

30. Dados  $z_1$  e  $z_2$  e  $a$  como no Exercício 28 considere o conjunto

$$X := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_1| + |z - z_2| \leq r\}, \text{ onde } r = 2a .$$

(a) Mostre que se  $r = |z_1 - z_2|$ ,  $X$  é um segmento fechado e determine  $X$ .

(b) Desenhe o conjunto  $X$  nos casos  $r > |z_1 - z_2|$  e  $r < |z_1 - z_2|$ .

(c) Como ficam as questões (a) e (b) acima (e suas respostas) se trocarmos na definição de  $X$  o símbolo  $\leq$  por  $<$ ?

31. Compute  $\frac{(\alpha+i)^4 + \alpha i(1+i)}{(1+i)^4 + 3i}$ , onde  $\alpha$  é a determinação de  $\sqrt[3]{-8i}$  cujo afixo pertence ao quarto (4) quadrante.

32. Dado  $m \in \mathbb{N}^*$ , calcule o produto de todas as determinações de  $I := \left( \sum_{k=0}^m i^k \right)^{\frac{1}{m}}$ .  
Discuta o resultado segundo  $m$ .

33. Fixada a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e utilizando o isomorfismo  $\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$  definido no Exercício 5, mostre que um número complexo  $z$  é identificado com o produto da matriz que representa a homotetia de coeficiente  $|z|$  sobre  $\mathbb{R}^2$ ,

$$T_{|z|} = \begin{bmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{bmatrix} = |z|I, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pela matriz representante da rotação pelo ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \theta = \arg(z).$$

Isto é,

$$z \equiv T_{|z|} \circ R_\theta = |z| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \theta = \arg(z).$$

34. Seja  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Verifique:

- Existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $\{z : z^m = 1\} = \{1, w, w^2, \dots, w^{m-1}\}$ . Dizemos que  $w$  é um gerador do conjunto das  $m$  raízes  $m$ -ésimas da unidade.
- Se  $z_1$  é uma raiz  $m$ -ésima qualquer de  $z \in \mathbb{C}^*$  e  $w$  é como no ítem (a) então  $\{z_1, z_1w, \dots, z_1w^{m-1}\}$  é o conjunto das  $m$  raízes  $m$ -ésimas de  $z$ .
- O complexo  $w$  no ítem (a) não é único.

35. Resolva a equação  $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$ .

36. Resolva os sistemas lineares em  $z$  e  $w$ :

$$a) \begin{cases} z + iw = 1 \\ iz + w = 2i - 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} iz + (1+i)w = 1 \\ (1+i)\bar{z} - (6+i)\bar{w} = -4 - 8i \end{cases}$$

37. Resolva as equações:

$$(a) x^6 + ix^3 = 0 \quad (b) x^{10} + 64x^2 = 0 \quad (c) 2x^6 + \frac{i}{2}x^2 = 0 \quad (d) x^6 + 3x^3 + 2 = 0.$$

38. Dados  $a, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$  e  $m \in \mathbb{N}^*$ , prove que as raízes da equação em  $z$ ,

$$(z - b_1)^m + a(z - b_2)^m = 0$$

estão sobre uma circunferência ou uma reta e resolva a equação.

39. (a) Determine a relação entre  $a, b \in \mathbb{R}$  para que sejam todas reais as raízes de

$$(*) \quad \left( \frac{i-z}{i+z} \right)^m = a + ib \quad (m \in \mathbb{N}^*).$$

- (b) Supondo verificada a relação encontrada em (a), resolva a equação (\*) admitindo conhecido o argumento  $\theta$  do número complexo  $a + bi$ .

40. (a) Mostre que são reais todas as raízes da equação

$$\left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)^m = \frac{1+ai}{1-ai}, \quad (a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*).$$

- (b) Compute as raízes da equação no item acima no caso  $a = 1$  e  $m = 3$ .

41. Compute as somas (supondo  $a, r \in \mathbb{R}$ ):

$$C_m := \sum_{n=0}^{m-1} \cos(a + rn) \quad \text{e} \quad S_m := \sum_{n=0}^{m-1} \sin(a + rn),$$

- (a) Multiplicando as dadas expressões por  $2 \sin\left(\frac{r}{2}\right)$ .

- (b) Considerando o número complexo  $C_m + iS_m$ .

42. Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ , com  $|z| \leq 1$ ,  $|w| \leq 1$  e  $z + w = 1$ . Mostre que  $|z + w^2| \leq 1$ .

43. Dados  $a \in (0, +\infty)$ ,  $c \in [0, +\infty)$  e  $b \in \mathbb{C}$  mostre que a equação

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0,$$

representa uma circunferência se  $ac < \bar{b}b$ .

44. Mostre que a hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  pode ser escrita na forma

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2.$$

45. Seja  $z = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^2$  e  $k$  um número natural par,  $k \geq 2$ . Mostre,

$$(Estermann 1956) \quad \operatorname{Re}[z^k] < 0 < \operatorname{Im}[z^k].$$

Atenção: A desigualdade acima é também válida se  $k$  é ímpar.

46. (Raízes Quadradas) Determine as soluções  $z \in \mathbb{C}$  da equação

$$z^2 = a + ib, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dica: Determine as partes real e imaginária de  $z$  e uma fórmula para  $z$ .

## BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL

1. Ahlfors, Lars V., *Complex Analysis - An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., 1979.
2. Apostol, T. M., *Calculus*, 2nd. ed., Ed. Waltham/Blaisdell, 1967-1969.
3. Aragona, J. *Números Reais*, 1 ed., Editora da Física, 2010.
4. Bak, J., Ding, P., and Newman, D. J., “Extremal Points, Critical Points, and Saddle Points of Analytic Functions”, *American Mathematical Monthly* **114** (2007), pp. 540-546.
5. Bak, Joseph and Newman, Donald J., *Complex Analysis*, 3rd. ed., UTM, Springer, 2010.
6. Beardon, Alan F., *Complex Analysis - The Argument Principle in Analysis and Topology*, A Wiley-Interscience Publication, 1979.
7. Beardon, Alan F., *Limits - A New Approach to Real Analysis*, UTM, Springer, 1991.
8. Boas, H. P., “Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma”, *American Mathematical Monthly* **117** (2010), pp. 770-785.
9. Boas, R. P., *Invitation to Complex Analysis*, Mathematical Association of America, 2nd. ed., 2010.
10. Boulos, P., *Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries*
11. Burckel, Robert B., *An Introduction to Classical Complex Analysis - Vol 1*, Mathematische Reihe, Birkhäuser, 1979.
12. Busam, R. and Freitag, E. , *Complex Analysis*, 2nd edition, Universitext, Springer (2008).
13. Carathéodory, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vol. 1, 2nd english edition, Chelsea Publishing Company (1964).
14. Cater, F. S., “An Elementary proof that analytic functions are open mappings”, *Real Analysis Exchange*, Vol **27**(1), 2001/2002, pp. 389-392.
15. Connell, E. H. and Porcelli, P., “Power Series Development without Cauchy’s Formula”, *Bulletin of the American Mathematical Society* **67** (1961), pp. 177-181.
16. Connell, E. H. and Porcelli, P., “An Algorithm of J. Schur and the Taylor

Series”, *Proceedings of the American Mathematical Society* **13** (1962), pp. 232-235.

**17.** Conway, John B., *Functions of One Complex Variable I*, 2nd ed., GTM, Springer, 2000.

**18.** Gamelin, Theodore W., *Complex Analysis*, UTM, Springer, 2000.

**19.** Guidorizzi, Hamilton L., *Um Curso de Cálculo - Volume 4, 5 ed.*, LTC Editora, 2002.

**20.** Hairer, E. and Wanner, G., *Analysis by Its History*, UTM, Springer, 1991.

**21.** Hurwitz, A. and Courant, R., “Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen”, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **3**, Springer-Verlag (4th ed. 1964), Berlin.

**22.** Jack, I. S., “Functions starlike and convex of order  $\alpha$ ”, *Journal of the London Mathematical Society* (2) **3** (1971), pp. 469-474.

**23.** Jahnke, Hans Niels, editor, *A History of Analysis*, History of Mathematics Vol 24, AMS and LMS, 2003.

**24.** Jensen, J. L. W. V., “Recherches sur la Théorie des Équations”, *Acta Mathematica*, Vol **36** (1912), pp. 181-195 .

**25.** Kakutani, S., and Nagamo, M., “About the functional equation  $\sum_{\nu=0}^{n-1} f(z + e^{(2\nu\pi/n)i}\xi) = nf(z)$ .”, *Zenkoku Shijō Danwakai* **66** (1935), pp. 10-12 (in japanese).

**26.** Knopp, Konrad, *Theory and Application of Infinite Series*, reprint of the 2nd. English ed. 1951, Dover Publications Inc., 1990.

**27.** Lang, Serge, *Complex Analysis*, 4th ed., GTM, Springer, 2000.

**28.** Leland, K. O., “A polynomial approach to topological analysis”, *Compositio Mathematica*, tome **17** (1965), pp. 291-298.

**29.** Lima, E. L., *Curso de Análise*, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1976.

**30.** Narasimhan, Raghavan and Nievergelt, Yves, *Complex Analysis in One Variable*, 2nd ed., Birkhäuser, 2001.

**31.** Oliveira, O. R. B., “The Fundamental Theorem of Algebra: an elementary and direct proof”, *Mathematical Intelligencer*. To appear. DOI: 10.1007/s00283-011-9199-2.

**32.** Osserman, R., “From Schwarz to Pick to Ahlfors and Beyond”, *Notices of the AMS*, Vol. **46**, number **8** (1999), pp. 868-873.

- 33.** Pólya, G. and Szegő, G., *Problems and Theorems in Analysis I*, Classics in Mathematics, Reprint of the 1978 edition, Springer, 1991.
- 34.** Porcelli, P. and Weiner, L. M., “A derivation of Cauchy’s Inequality for Polynomials”, *Revista de Matemática y Física Teórica*, vol **11** (1957), pp. 25-28.
- 35.** Read, A. H., “Higher Derivatives of Analytic Functions from the Standpoint of Topological Analysis”, *Journal of the London Mathematical Society* **36** (1961), pp. 345-352.
- 36.** Remmert, R., *Theory of Complex Functions*, GTM, v. 122., Springer, 1991.
- 37.** Remmert, R., in *Numbers*, by H.-D. Ebbinghaus, H.-D. et al, GTM, Springer, 1991.
- 38.** Rudin, W., *Princípios de Análise Matemática*, Ao Livro Técnico e Editora Universidade de Brasília, 1971.
- 39.** Simmons, George F., *Cálculo com Geometria Analítica - Vol 2*, Pearson Makron Books, 1988.
- 40.** Shilov, G. E., *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover Public. Inc., 1973.
- 41.** Soares, Marcio G., *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 4. ed., 2007.
- 42.** Spivak, M., *Calculus Infinitesimal*, vol 2, Ed. Reverté, Barcelona, 1978.
- 43.** Walsh, J. L., “A mean value theorem for polynomials and harmonic polynomials”, *Bulletin of the American Mathematical Society* Vol. 42 (1936), pp. 923-936.
- 44.** Whyburn, G. T., “The Cauchy Inequality in Topological Analysis”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **48** (1962), pp. 1335-1336.
- 45.** Whyburn, G. T., *Topological Analysis*, Revised Ed., Princeton University Press, 1964.



## BIBLIOGRAFIA SUPLEMENTAR

46. Boyer, Carl B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blucher, 1974.
47. Bressoud, David, *A Radical Approach to Real Analysis*, 2nd ed., The Mathematical Association of America, 2006.
48. Churchill, R. V., *Variáveis Complexas e Aplicações*, EDUSP/McGraw-Hill, 1975.
49. Knapp, Anthony W., *Basic Real Analysis*, Cornestones, Birkhäuser, 2005.
50. Neto, Alcides Lins, *Funções de Uma Variável Complexa*, IMPA, 2005.