A TRIANGULAÇÃO DA DINAMARCA E UMA GRANDE DESCOBERTA MATEMÁTICA

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Outubro de 2015

`http://www.ime.usp.br/~oliveira`

Figura 1: O país Dinamarca [membro sênior do Reino da Dinamarca (*Kongeriget Danmark*)] consiste da península Jutlândia (*Jylland*) e das grandes ilhas de Funen (*Fyn*), Zelândia (*Sjælland* ou *Jaelland*, Zealand em inglês), Ilha Jutlândia do Norte (*Vendissel-Thy*), Falster, Lolland e Bornholm e 443 ilhas menores (Arquipélago da Dinamarca). A Dinamarca é banhada pelo Mar Báltico ao leste e pelo Mar do Norte a oeste.

Figura 2: *Kongeriget Danmark*, ou Reino da Dinamarca, é formado pelo país Dinamarca (*Danmark*) e mais dois países, as Ilhas Faeroe (*Færøerne*, dita Faroe Islands em inglês) e a vasta Groenlândia (*Grønland*, dita Greenland em inglês). Em vários períodos históricos o Reino da Dinamarca incluiu Islândia (*Island*, dita Iceland em inglês), grandes partes da Noruega, Sul da Suécia e a província Schleswig-Holstein no norte da Alemanha.

Figura 3: As cinco (5) regiões do país Dinamarca. As três (3) regiões que compõem a Jutlândia (*Jylland*, dita Jutland em inglês) são Dinamarca do Norte (*Nordjylland*), Dinamarca Central (*Midtjylland*) e Dinamarca do Sul (*Syddanmark*). As outras duas (2) regiões são Zelândia (*Sjælland* ou *Jaelland*, dita Sealand ou Sealand em inglês) e a Região Capital (*Hovedstadene*), que inclui a capital (*hovedstad*) da Dinamarca, na cidade Copenhague (*København*, dita Copenhagen em inglês).

Figura 4: As cinco regiões tradicionais da Península Jutlândia (*Jylland*), terra dos Jutos (que com os Anglos e os Saxões formavam os três povos germânicos), nomeadas de cima para baixo. Talvez Jutos signifique “gigantes” e Jutlândia “terra de gigantes”. A Ilha Jutlândia do Norte (*Vendissel-Thy*) - na cor lilás e na Dinamarca - é historicamente parte da Jutlândia embora separada dela em 1825 por uma enchente. A Jutlândia do Norte (*Norre-Jylland*) - na cor vermelho-fosco e na Dinamarca - é continental. Schleswig do Norte (*Nord-Slesvig*, Northern Schleswig em inglês) - em vermelho-vivo e na Dinamarca. Já fazendo parte da atual Alemanha, temos Schleswig do Sul (*Syd-Slesvig*), em cor mostarda, e por fim Holstein - em amarelo.

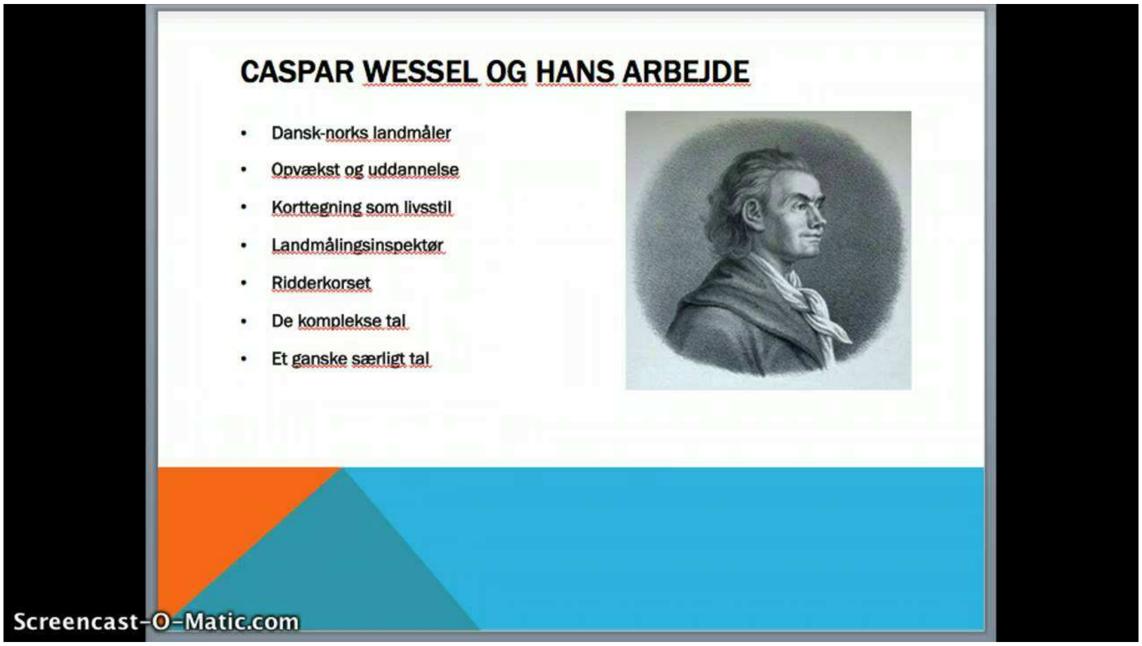


Figura 5: Caspar Wessel, agrimensor, cartógrafo e matemático dinamarquês-norueguês. Nascido em 1745 em Vestby [sudeste de Christiania (a atual capital da Noruega, Oslo)] na Noruega (então no Reino da Dinamarca) e falecido em 1818, em Copenhague, capital da Dinamarca. [Cortesia de Kai Borre, Danish GPS Center, Aalborg University).

Índice.

Agradeço a Kai Borre (Danish GPS Center, Aalborg University), por gentilmente disponibilizar os mapas apresentados em figura 15, figura 16, figura 17 e figura 19 e por indicar a figura 5 (imagem de C. Wessel). Agradeço a Ricardo Bianconi pela referência em francês da obra matemática de Caspar Wessel (em Gallica - Bibliotèque Nationale de France - `http://gallica.bnf.fr/?lang=EN`).

1. TOPOGRAFIA

A Topografia, (do grego *topos* (lugar) + *grafia* (descrição)) ocupava-se tradicionalmente da representação plana de regiões pequenas da superfície terrestre e neste caso coordenadas (cartesianas) no plano são muito empregadas. Contudo a representação de um país, deve considerar a curvatura da Terra. A representação da superfície pode ser planimétrica e altimétrica. A planimetria é relativa à representação bidimensional da posição dos pontos no plano da carta. A altimetria é relativa à representação da distância vertical dos pontos a uma superfície de referência, o que permite fazer a representação do relevo.

O termo topografia só se aplica a áreas relativamente pequenas, sendo utilizado o termo geodésia com referência a áreas com grandes dimensões.

Seguem alguns dos métodos utilizados em levantamentos topográficos.

- Medição de ângulos e distâncias recorrendo a instrumentos tais como teodolitos, níveis e distanciometros.
- Fotogrametria. Sendo a informação obtida a partir de fotografias aéreas métricas, ou imagens numéricas multiespectrais recolhidas por sensores instalados em satélites artificiais da Terra.
- Sistema de Posicionamento Global (GPS). Utiliza receptores dos sinais emitidos pelos 31 satélites da constelação GPS e determina as coordenadas dos locais onde as antenas dos receptores são colocadas.

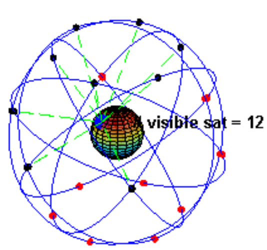


Figura 6: Ilustração à constelação GPS. Vide exemplo animado em `https://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System`

2. TRIANGULAÇÃO GEODÉSICA

A triangulação geodésica consiste numa rede de triângulos (chamada **rede geodésica**) construídos sobre um determinado elipsóide, e a sua utilização permite a obtenção das coordenadas dos pontos que formam os vértices (ditos **marcos geodésicos** ou **vértices geodésicos**) dos triângulos com elevada precisão. Esses marcos geodésicos são utilizados para os mais variados trabalhos, como levantamentos topográficos, através do transporte de coordenadas a partir desses pontos conhecidos. Um topógrafo experiente pode obter a partir da observação dos marcos geodésicos coordenadas com precisões muito superiores às obtidas por GPS.

As redes geodésicas podem ser classificadas em três ordens.

- Primeira ordem, com distância entre os vértices entre 30 e 60 Km (em condições excepcionais até 100 ou 200 Km).
- Segunda ordem, com vértices afastados entre si de 20 a 30 Km.
- Terceira ordem, com vértices afastados entre si de 5 a 10 Km.

3. MEDIÇÃO DE DISTÂNCIAS

Temos quatro principais possibilidades para a medição de distâncias.

- Direta.
- Trigonométrica.
- Aerofotogrametria (modernamente).
- Electromagnética (modernamente).

Os equipamentos utilizados em agrimensura no século XVIII eram vários e pesados e por um decreto real os camponeses tinham o dever de ajudar os agrimensores a transportá-los.

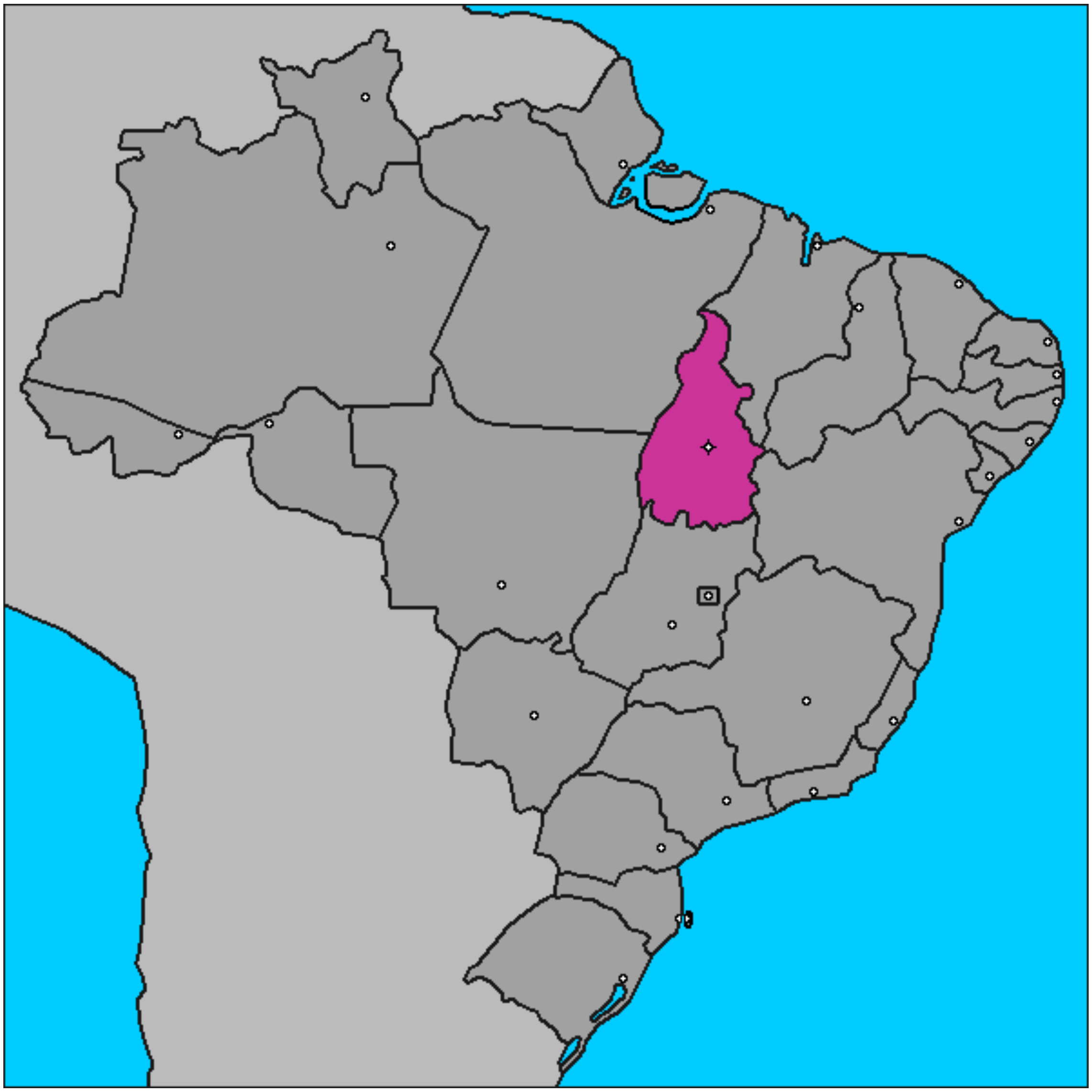


Figura 7: O centro geodésico do Brasil fica em Palmas, capital do Tocantins.

Figura 8: Centro geodésico do Brasil - Praça Girassóis, em Palmas (Tocantins).

Figura 9: Centro geodésico do America do Sul - Cuiabá, capital do Mato Grosso. Em 1909, o Marechal Rondon começou a mapear a América do Sul a partir deste ponto.

Referência.

1. Fonte, C. Costa e Vicente, M. A. F., *Texto de apoio de Topografia*, 135pp., 2006/2007, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra,

   `http://www.mat.uc.pt/~vicente/Textos_de_apoio_de_Topografia_2006_2007.pdf`.

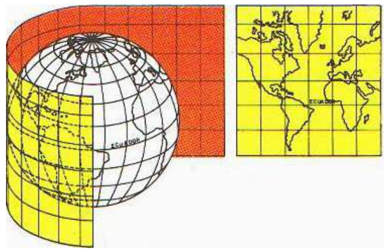


Figura 10: Projeção Cartográfica (Cilíndrica) Sistema Mercator. Proposto pelo belga Gerhard Kremer (1512-1594), conhecido por seu nome latinizado Mercator.

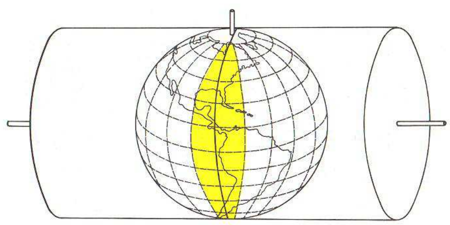


Figura 11: Fusos e Zonas de Projeção UTM. O Sistema UTM (Sistema de Projeção (Cilíndrica) Universal Transverso de Mercator - proposto em 1950 pelos EUA) tem o objetivo de abranger todas as longitudes.

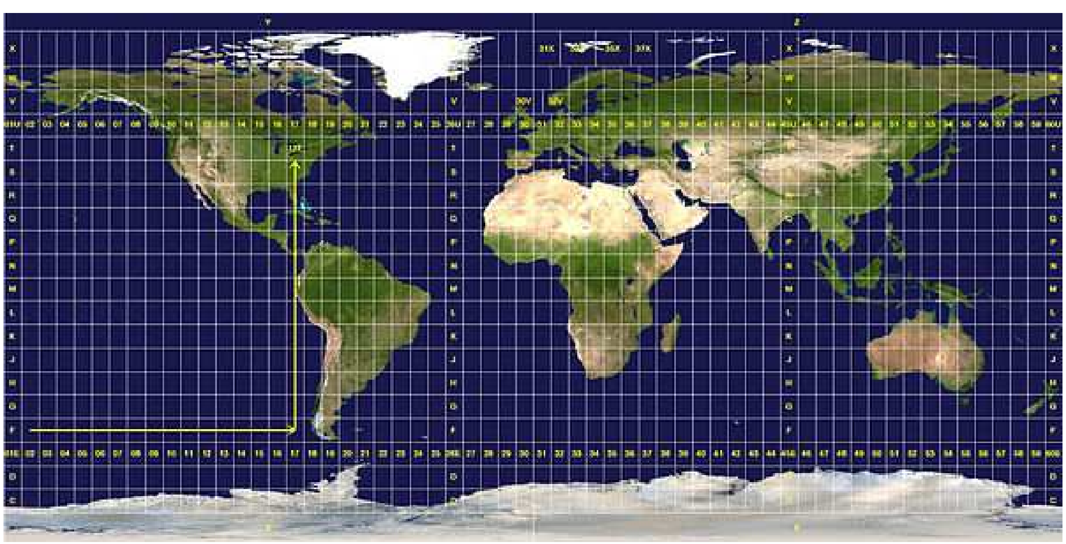


Figura 12: Projeção Cartográfica da Terra (Sistema UTM).

4. TYCHO BRAHE E A PRIMEIRA TRIANGULAÇÃO NA DINAMARCA

Figura 13: Ilha Hven (atualmente na Suécia).

Tycho Brahe (1546-1601) foi um nobre dinamarquês (dono de boa parte da ilha Hven) e astrônomo. Na ilha Hven (Sund), Tycho construiu o famoso Observatório Uraniborg e obteve as mais precisas observações astronômicas até a época (anterior ao advento do telescópio). Nos anos 1600-1601, Johannes Kepler foi assistente de Tycho e mais tarde Kepler utilizou as medições de Tycho sobre Marte para sua teoria do movimento dos planetas.

Para utilizar os dados de outros observatórios, Tycho precisava localizar com precisão Uraniborg. Tycho foi também um pioneiro em cartografia e com seus instrumentos mediu Hven (de 1578 a 1579), com uma triangulação com vértices em várias cidades e centrada no observatório Uraniborg.

Figura 14: Localização (moderna) de Hven.

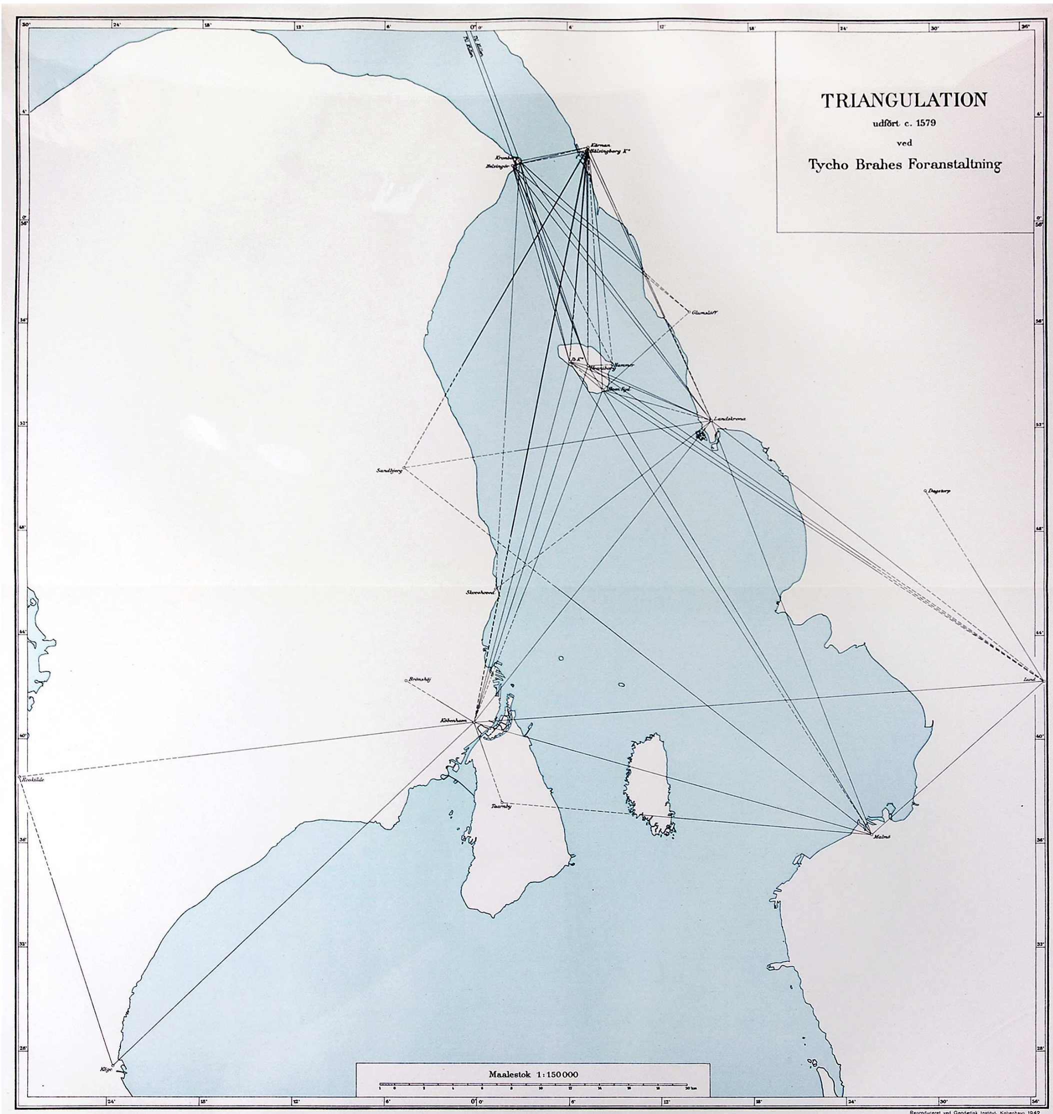


Figura 15: Triangulação localizando a ilha Hven ($7,5\ \mathrm{km}^2$) no Estreito de Oresund, entre Dinamarca (à esquerda) e Suécia. Com vértices em Helsingør, Køge, Copenhague, Helsingborg, Landskrona, Malmö, e outros. Autor Tycho Brahe (em 1578 – 1579). [Cortesia de Kai Borre, Danish GPS Center, Aalborg University.]

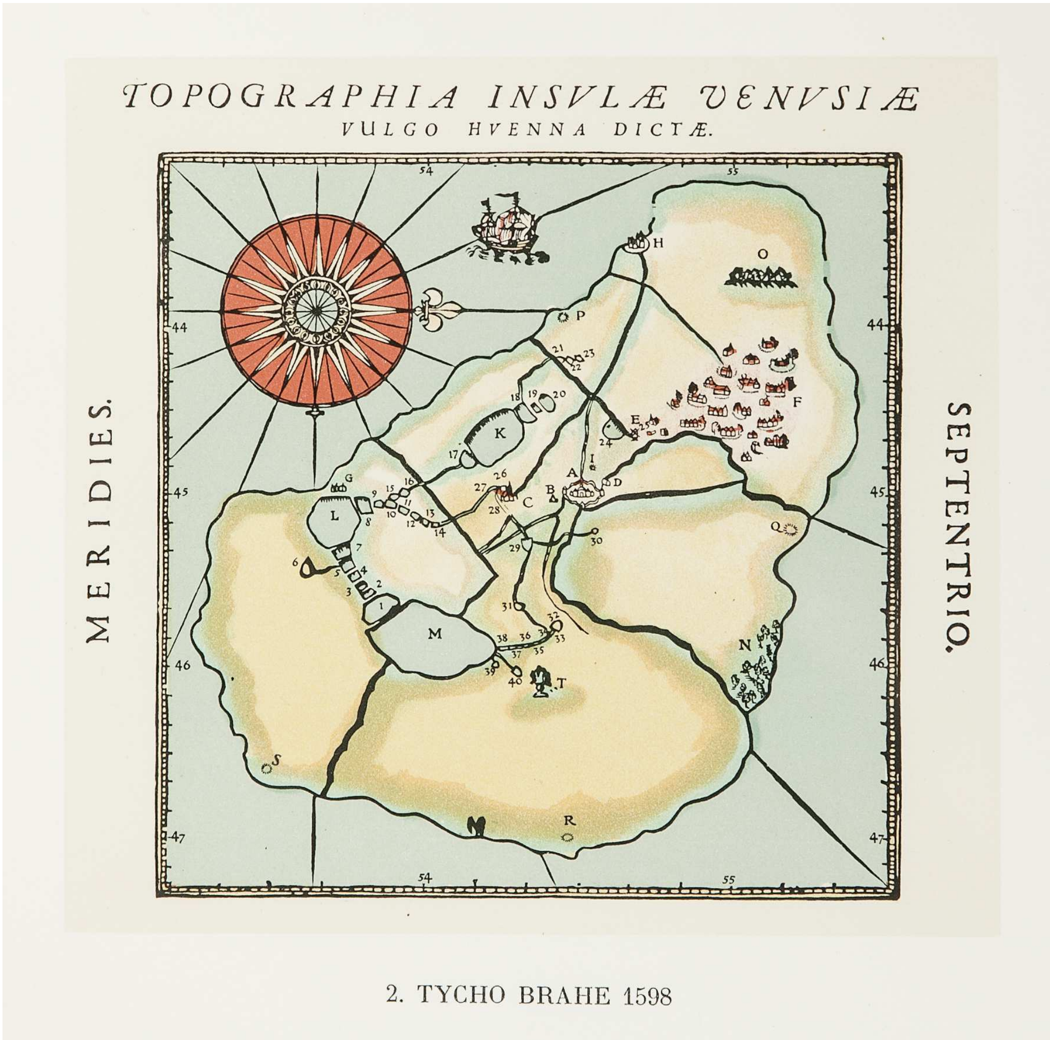


Figura 16: Mapa de Hven, por Tycho Brahe (1598). O primeiro mapa na Dinamarca baseado em triangulação. O castelo de Tycho ficava no centro da ilha. O norte está à direita. [Cortesia de Kai Borre, Danish GPS Center, Aalborg University.]

5. A (Primeira) Triangulação da Dinamarca (1761–1796) e a Academia Real de Ciências e Letras da Dinamarca.

O primeiro projeto para a cartografia da Dinamarca e Schleswig [região dividida em 1920 entre Dinamarca e Alemanha] foi proposto ao Rei Frederick V no ano 1757, mas o proponente e responsável pelo projeto faleceu três anos depois e sem avançar muito o projeto .

Em 1761, Christen Hee (professor de matemática), Thomas Bugge Heinrich e Christian Schumacher apresentaram à Academia Real de Ciências e Letras da Dinamarca (fundada em 1742) um projeto (de longa duração) para a mensuração topográfica da Dinamarca baseada no método de triangulação para determinar as coordenadas geográficas. O projeto era de grande interesse nacional (e internacional).

Durante boa parte da realização do projeto, o reinado coube ao sucessor de Frederick V, seu filho Christian VII, o qual ocupou o trono no período 1766-1808 como Rei da Dinamarca-Noruega [e Duque de Schleswig e Holstein]. No entanto, Christian VII foi um rei apenas nominal devido a uma aparente doença mental.

Os trabalhos começaram em 1762 e a Bugge e Schumacher se juntou Ole Christopher Wessel.

Durante o projeto, 24 mapas foram impressos. O último mapa foi gravado em 1842. A triangulação se encerrara em 1796.

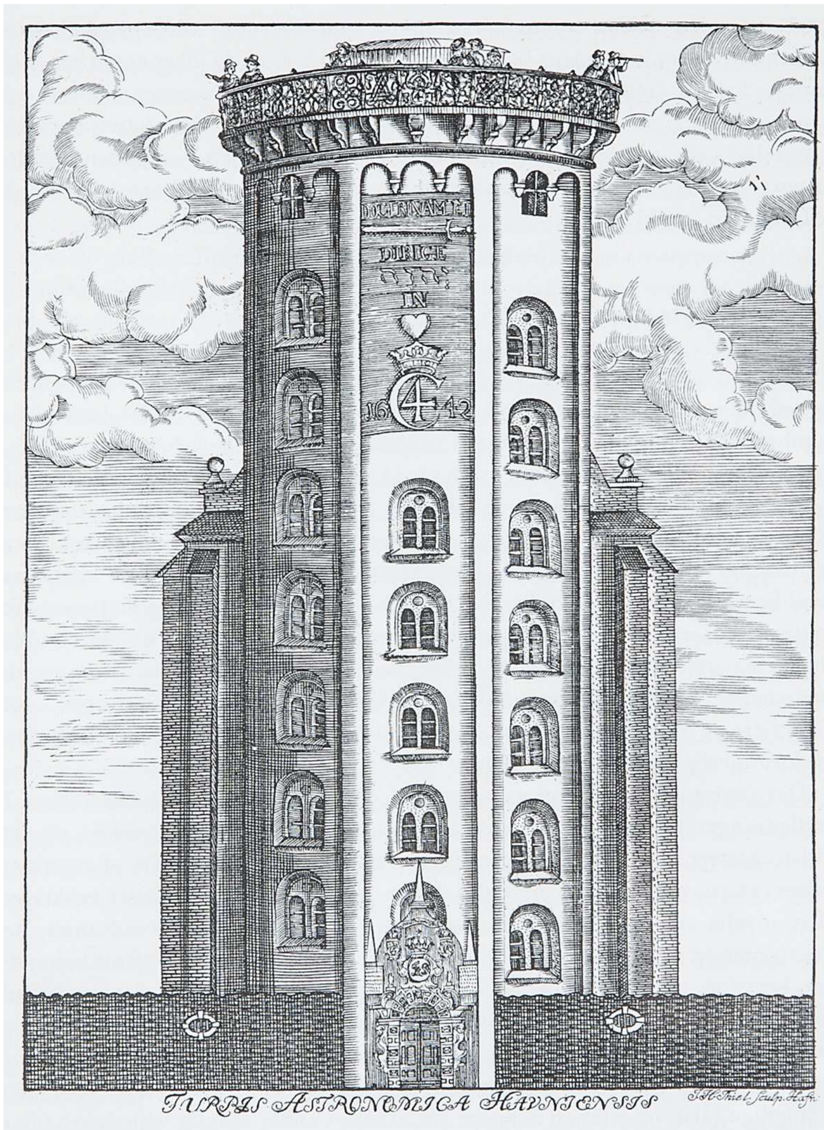


Figura 17: A Torre Circular (*Runde Tårn*, dita Round Tower em inglês), completada em 1642. No topo do torre havia um observatório ativo até 1861. A *Runde Tårn* foi escolhida como origem do sistema de coordenadas, o eixo das ordenadas coincidia com o meridiano pela *Runde Tårn* e o eixo das abscissas coincidia com a perpendicular passando pela *Runde Tårn*. Até 1861 as longitudes domésticas eram computadas relativamente ao observatório na *Runde Tårn*. [Cortesia de Kai Borre, Danish GPS Center, Aalborg University.]

Figura 18: A Torre Circular (*Runde Tårn*), modernamente. Situada no centro da capital, Copenhague.

Dica para leitura.

Borre, Kai *Fundamental Triangulations in Denmark*, Journal of Geodetic Science, Vol 4., nr. 1, s. 74–86, `http://dx.doi.org/10.2478/jogs-2014-0010` – Danish GPS Center, Aalborg University, Aalborg O, Denmark –

Disponível (gratuitamente) em

`http://cct.gfy.ku.dk/publ_others/JGS-S-13-00034.pdf`

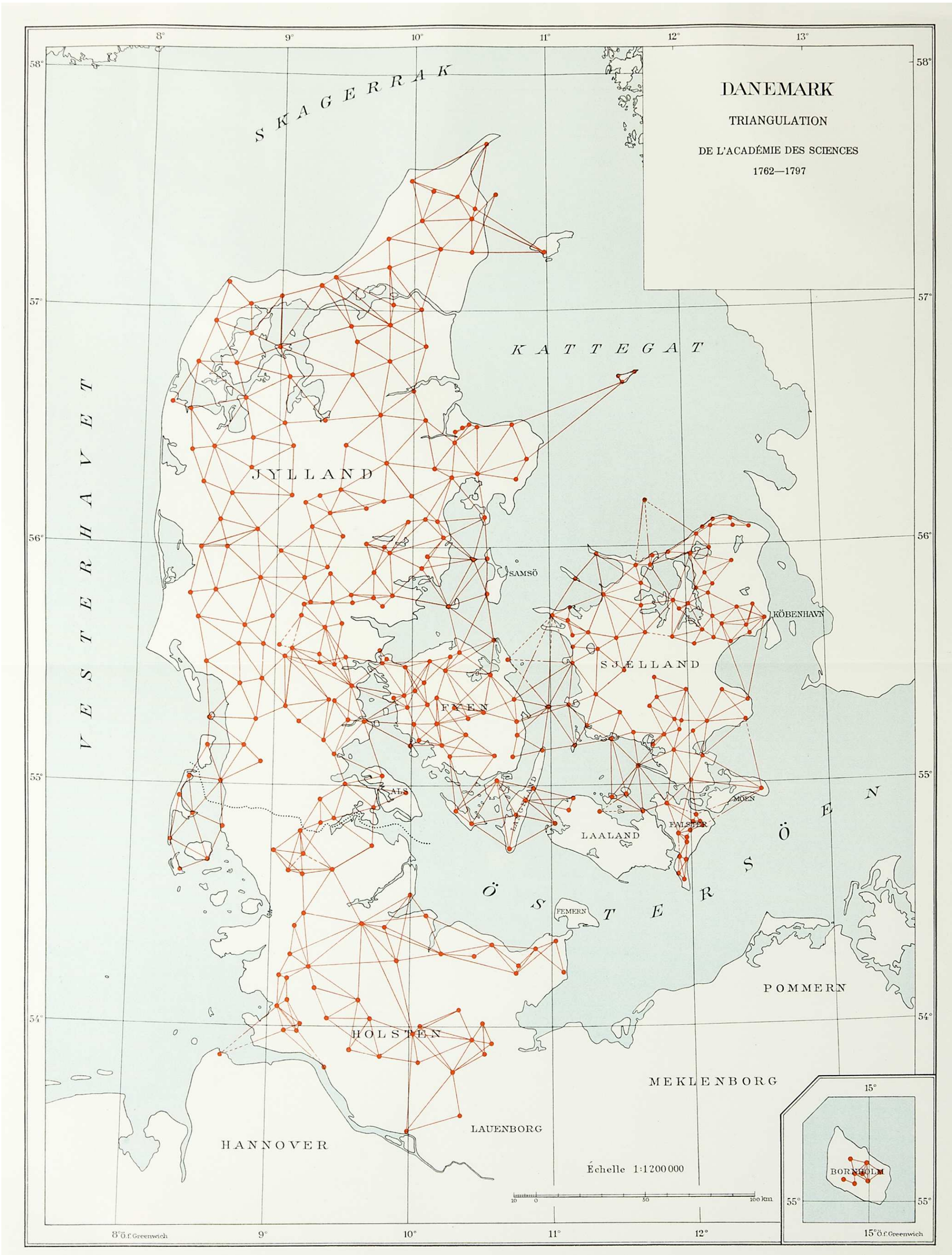


Figura 19: Triangulação da Dinamarca (Academia de Ciências 1762-1797). [Cortesia de Kai Borre, Danish GPS Center, Aalborg University.]

6. O AGRIMENSOR CASPAR WESSEL (1745–1818)

Caspar Wessel (irmão de Ole Christopher Wessel) nasceu em 1745, em Vestby (sudeste de Christiania - atual Oslo) na Noruega (então parte do reino da Dinamarca). Aos 12 anos de idade, Caspar foi enviado a estudar na Cathedral School em Christiania (mesma escola que posteriormente estudou Niels Henrik Abel). Aos 18 anos de idade, como não havia universidade na Noruega, ele e três de seus irmãos mais velhos se mudaram para Copenhague então capital da monarquia dupla Dinamarca-Noruega.

Em 1763 Wessel inicia estudos em Direito e, a convite de Christopher, se junta à equipe de agrimensores e cartógrafos responsável pela primeira triangulação da Dinamarca e Schleswig. Apesar de Caspar concluir seus estudos em Direito em 1770, exerceu o ofício de agrimensor até aposentar em 1805 (e mesmo após).

Durante a execução do projeto, Caspar também atuou como cartógrafo e com os anos tornou-se responsável pela construção, redução e desenho de mapas baseados em medições geográficas e trigonométricas e então apresentando o modelo para o confeccionador das placas de metal.

De maio a setembro. o trabalho corria no campo desde a alvorada até a noite (condições climáticas permitindo), todo dia exceto domingos. Uma cópia do diário de trabalho era enviada à Academia, junto com os mapas topográficos elaborados no verão (do hemisfério norte), marcando a localização das cidades, igrejas, castelos, moinhos e floresta, traçado das estradas, cursos dos rios, posições da costa marinha e ilhas. No inverno Caspar trabalhava na redução dos mapas.

Como agrimensor trigonométrico, Caspar passava o inverno ocupado com cálculos trigonométricos baseados nos dados coletados, julgando a validade dos dados coletados e construindo e desenhando mapas triangulares. O trabalho requeria habilidade prática e conhecimento teórico assim como precisão e paciência.

O Observatório Real de Copenhague, na Round Tower, foi escolhido para origem da rede triangular. A construção da Tower começara em 1637, o observatório foi estabelecido por Longomontanus, discípulo e assistente de Tycho Brahe.

Wessel se aposentou em 1805, devido a recomendações médicas, mas ainda assim realizou mais alguns trabalhos e por tais trabalhos recebeu a Medalha de Prata da Academia e o conjunto completo de suas memórias impresso. Recebeu também o título de "Knight of Danebrog" em 1815.

Dicas para leitura.

1. B. Branner, *Caspar Wessel on representing complex numbers (1799)*. Vide European Mathematical Society, Newsletter 33, September 1999, pp.13–16 `https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/1999-09-33.pdf`

2. Midonick, H., *On the analytical representation of Direction - an attempt, by Caspar Wessel*, tradução para o inglês dos primeiros 10 parágrafos da obra original de C. Wessel, em *The Treasury of Mathematics*, volume 2 (Penguin Books 1968) pp.321–329. Vide Biblioteca IME-USP.

3. Brun, Viggo, *Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 1959, Tome 12 no. 1, pp. 19–24. Disponível em

   `http://www.persee.fr/doc/rhs_0048-7996_1959_num_12_1_3697`

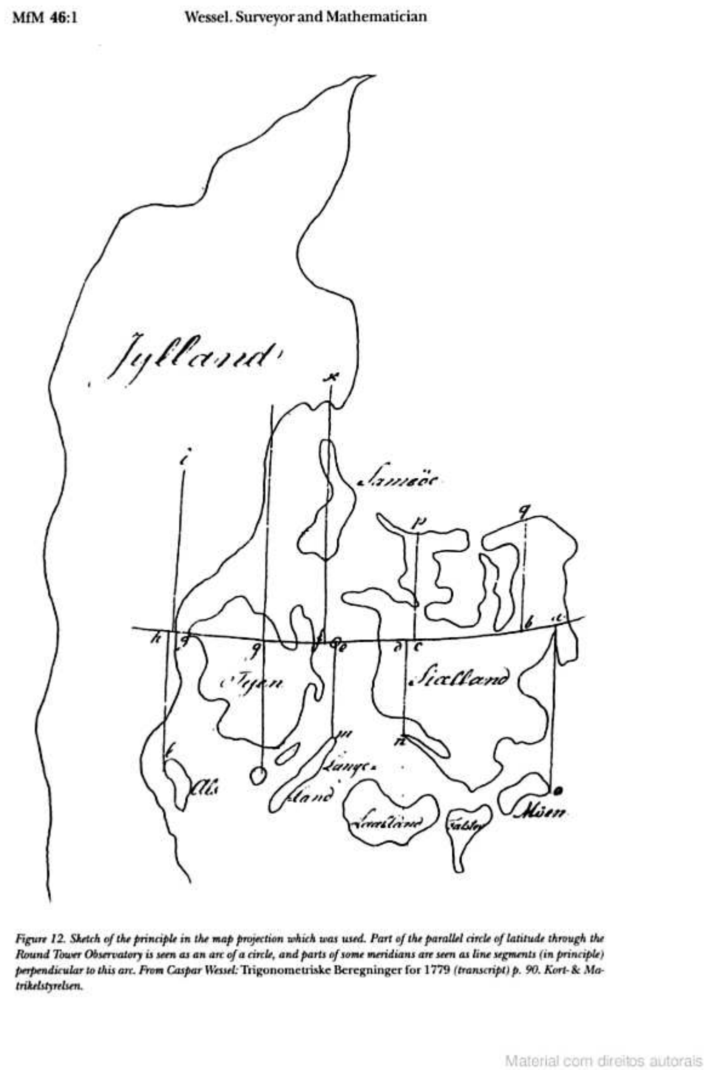


Figura 20: Esboço do princípio de projeção cartográfica utilizada por C. Wessel. Parte do círculo paralelo de latitude pelo Observatório na Round Tower é visto como um arco de círculo e partes de alguns meridianos são vistos como segmentos retilíneos (em princípio) perpendiculares a este arco. Da obra *Cálculos Trigonométricos*, por C. Wessel (1779). [Extraída de *On the analytical representation of direction - an attempt applied chiefly to the solution of plane and spherical polygons*. Bodil Branner and J. Lützen (editors). The Royal Danish Academy of Sciences and Letters (1999).]

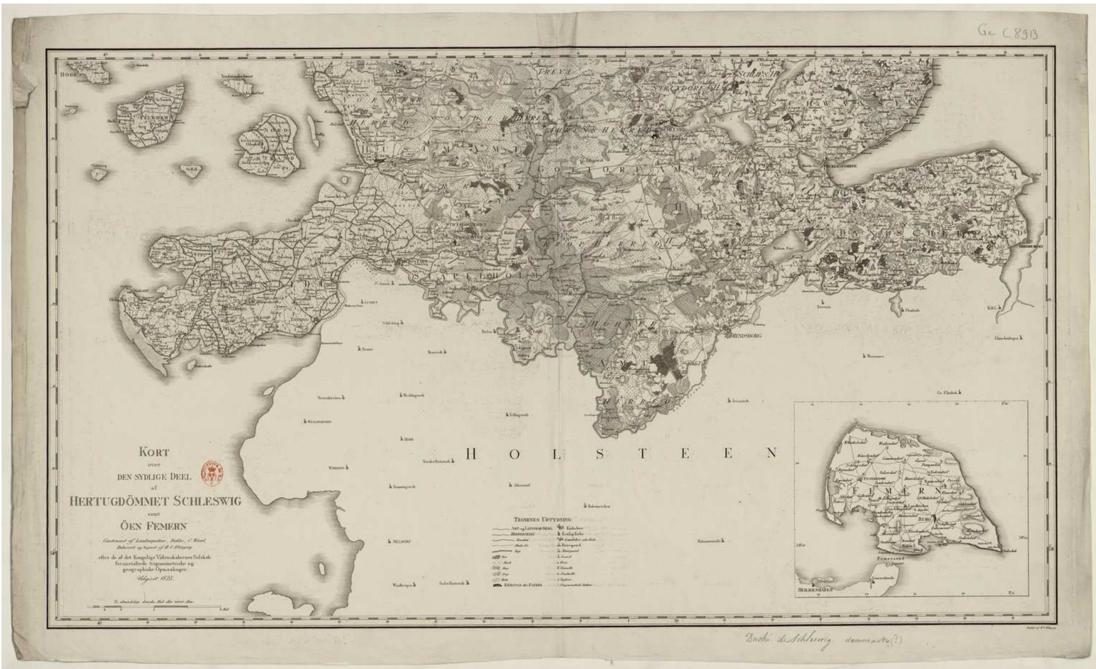


Figura 21: Mapa do sul do ducado Schleswig e da ilha Femern. Construído pelo agrimensor, Knight, C. Wessel. Reduzido e desenhado por H. C. Klingsey de acordo com as observações trigonométricas e geográficas da Academia Real. Publicado em 1825. [Gallica, Bibliotèque Nationale de France.]

Figura 22: Mapa do Sudeste da Zelândia (*Siaelland*) baseado em agrimensura e cálculos trigonométricos e astronômicos, sob direção da Sociedade Real de Ciências e Letras da Dinamarca. Desenhado por C. Wessel. Gravado a óleo (1770). [Gallica, Bibliotèque National de France.]

7. A DESCOBERTA MATEMÁTICA DE WESSEL.

Já em **1781**, o conhecimento teórico de Caspar Wessel era reconhecido por seus superiores como atesta trecho da carta de recomendação escrita por Bugge (indicando Caspar para efetuar os trabalhos de agrimensura trigonométrica do ducado Oldenburg West of Bremen):

> "*Ele possui muito conhecimento teórico de álgebra, trigonometria e geometria matemática e, com respeito a este último tópico, ele conseguiu soluções belas e novas para os mais difíceis problemas de medição geográfica*".

Em **1787** e em um de seus trabalhos, Wessel apresenta uma proposta para efetuar as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com segmentos (orientados) no plano.

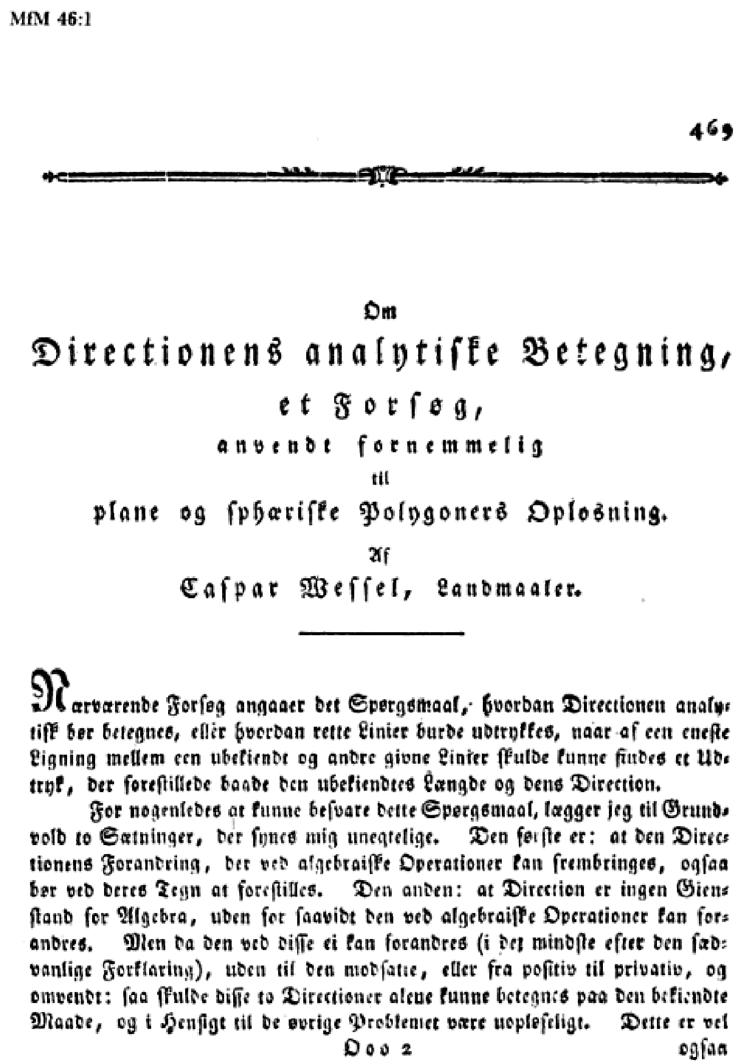
Em **1796** Wessel (e outros) completam a triangulação da Dinamarca e Schleswig que com as observações astronômicas são a base da primeira cartografia geral da Dinamarca. No mesmo ano, Wessel escreve

> *Directionens analytiske Betegning, et Forsϕg anvendt fornemmelig til plane og sphoeriske Polygoners Oplϕsnin.*

No dia 10 de março de 1797, *Directionens* é lido (pelo líder da área Matemática) em um encontro da Academia (Wessel ausente!) e submetido para publicação na Academia Real Dinamarquesa. Wessel torna-se então o primeiro a apresentar (sem revelar tal intenção no artigo) uma representação geométrica dos números complexos (imaginários).

O artigo, escrito em dinamarquês, foi publicado em 1799 mas não notado pela comunidade matemática.

Com *Directionens*, Wessel torna-se o primeiro a apresentar o conceito do que hoje chamamos vetor. Antes de Wessel (desde a antiga Grécia e passando por Galileu e Newton), forças decomponíveis e velocidade eram analisadas isoladamente, não como um caso particular de um panorama mais geral.



MfM 46:1

469

Om

Directionens analytiske Betegning,

et Forsøg,

anvendt fornemmelig

til

plane og sphæriske Polygoners Opløsning.

Af

Caspar Wessel, Landmaaler.

Nærværende Forsøg angaaer det Spørgsmaal, hvordan Directionen analytisk bør betegnes, eller hvordan rette Linier burde udtrykkes, naar af een eneste Ligning mellem een ubekiendt og andre givne Linier skulde kunne findes et Udtryk, der forestillede baade den ubekiendtes Længde og dens Direction.

For nogenledes at kunne besvare dette Spørgsmaal, lægger jeg til Grundvold to Sætninger, der synes mig uneqtelige. Den første er: at den Directionens Forandring, der ved algebraiske Operationer kan frembringes, ogsaa bør ved deres Tegn at forestilles. Den anden: at Direction er ingen Gienstand for Algebra, uden for saavidt den ved algebraiske Operationer kan forandres. Men da den ved disse ei kan forandres (i det mindste efter den sædvanlige Forklaring), uden til den modsatte, eller fra positiv til privativ, og omvendt: saa skulde disse to Directioner alene kunne betegnes paa den bekiendte Maade, og i Henſigt til de øvrige Problemet være uopløseligt. Dette er vel

Ooo 2 ogsaa

The first page of Wessel's paper as it appeared in Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Nye Samling, V, *1799.*

Figura 23: Primeira página do artigo *Directionens*, como apareceu em *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Nye Samling, V*, 1799.

8. RECONHECIMENTO MATEMÁTICO PÓSTUMO.

Em **1895**, o artigo de Wessel (o único que ele escreveu) foi redescoberto quando Christian Juel (professor na Universidade Técnica) chamou a atençao para o artigo. No mesmo ano Sophus Lie, famoso matemático (norueguês), republicou o trabalho de Wessel em *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*.

No ano **1897**, a Academia homenageou Wessel publicando uma tradução para o francês (tradutor, H.-G. Zeuthen) de seu artigo.

O bicentenário de *Directionens*, organizado pela Academia Real de Ciências da Dinamarca e a Sociedade Européia de Matemática.

- Em 1998, a Academia organizou o Wessel Symposium.
- Em 1999, foi publicada a primeira tradução para o inglês do artigo completo de Wessel (*editor J. Lützen et al*) junto com a biografia de Wessel e um artigo sobre a história dos números complexos.

É importante notar que Wessel pensou em representar *segmentos (orientados)* como *números imaginários* mas não o inverso.

Dicas para leitura.

1. A principal obra de Wessel (traduzida e comentada). C. Wessel, *On the Analytical Representation of Direction - An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons*, 1999, vide google.

2. B. Branner, *Caspar Wessel on representing complex numbers (1799)*. Vide European Mathematical Society, Newsletter 33, September 1999, pp.13–16 `https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/1999-09-33.pdf`

9. SOMA E MULTIPLICAÇÃO DE SEGMENTOS NO PLANO

Dados pontos A e B quaisquer no plano euclidiano, consideremos o segmento orientado com ponto inicial A e ponto final B. Indicamos por $\overline{AB}$ todos os segmentos orientados que são paralelos ao segmento determinado pelos pontos A e B, tem o mesmo comprimento que o segmento determinado pelos pontos A e B, e que tem o mesmo sentido que o segmento orientado $\overline{AB}$. Dizemos que $\overline{AB}$ é um vetor representado pelo segmento orientado de ponto inicial A e final em B.

A figura seguinte apresenta (somente) um único vetor no plano.

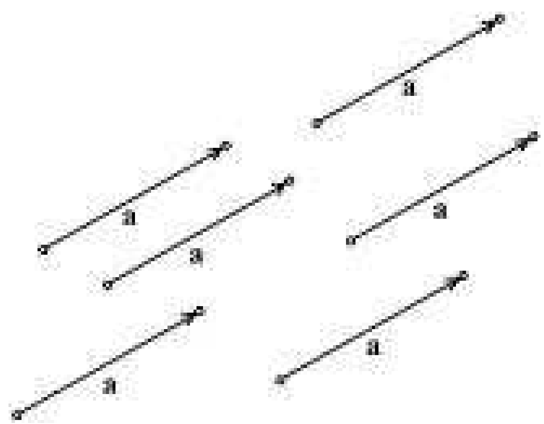


Figura 24: Os segmentos desenhados tem mesmo comprimento, são paralelos e tem mesmo sentido

Adição de segmentos (orientados), segundo Wessel.

Duas linhas retas (segmentos de reta) são somadas se as unimos de forma tal que a segunda linha começa onde a primeira termina e então passamos uma linha reta do ponto inicial ao ponto final das linhas reunidas. Esta linha é a soma das linhas reunidas.

Dados o segmento $\overline{OA}$ (com ponto inicial O e ponto final A) e o segmento $\overline{AP}$ (ponto inicial A e ponto final P), a figura abaixo mostra a Regra do Triângulo

$$\overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OP}.$$

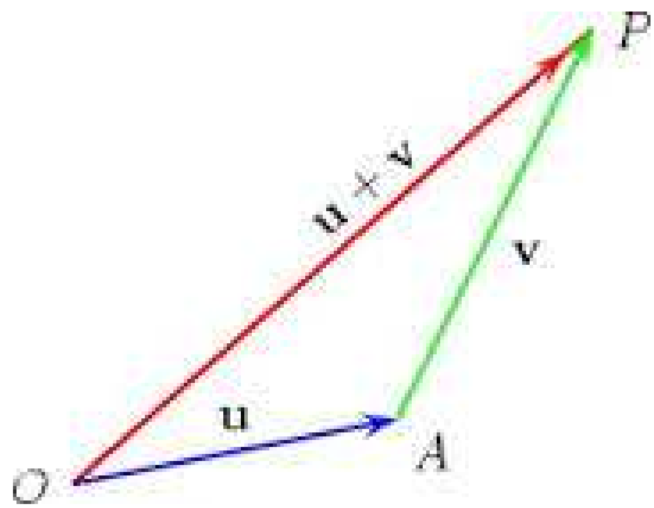


Figura 25: A soma $\overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OP}$ (**regra do triângulo**), com a notação $\overline{OA} = u$, $\overline{AP} = v$ e $\overline{OP} = u + v$.

[A soma de segmentos (orientados) no plano estende o conceito de soma de números reais, considerando um número real x como o segmento (orientado) na reta real e com ponto inicial 0 e ponto final x. Por exemplo, $3 + 5 = \overline{03} + \overline{38} = \overline{08} = 8$.]

Omitindo pontos iniciais e finais, representamos uma soma de dois segmentos (orientados) indicando apenas os segmentos e respectivas direções.

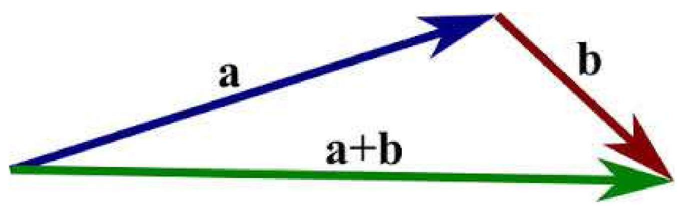


Figura 26: A soma $a + b$ dos segmentos (orientados) a e b.

A regra do paralelogramo [para a soma de segmentos (orientados)] foi primeiro enunciada por Wessel. Vide figura abaixo.

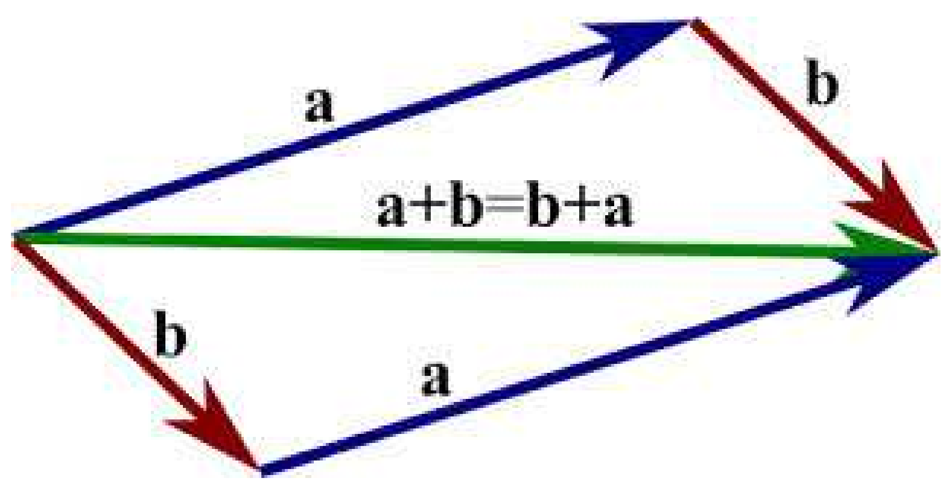


Figura 27: A **regra do paralelogramo** sintetiza a propriedade $a + b = b + a$

Subtração de segmentos (orientados). Vide figuras abaixo.

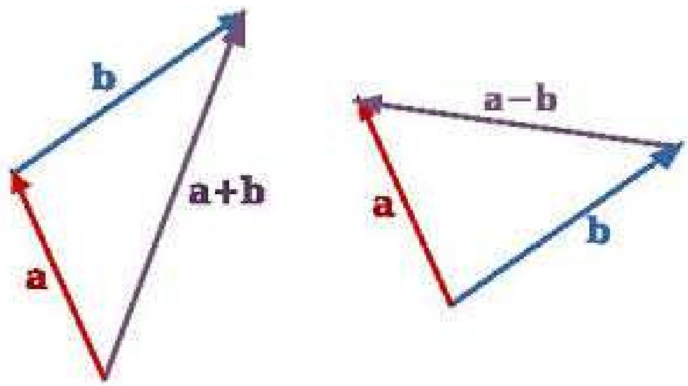


Figura 28: Soma e subtração e respectivas Regras do Triângulo.

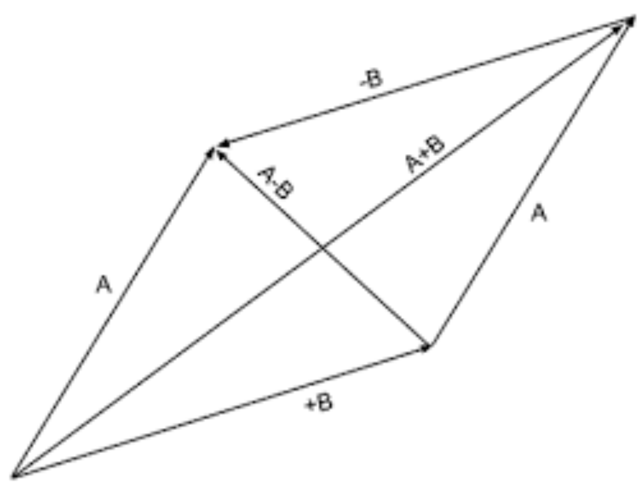


Figura 29: Soma e subtração e as Diagonais de um Paralelogramo.

Adição de três (ou mais) segmentos (orientados). Vide figuras abaixo.

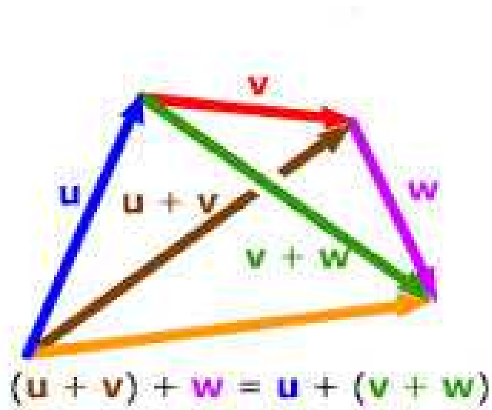


Figura 30: A propriedade $(u+v)+w = u+(v+w)$.

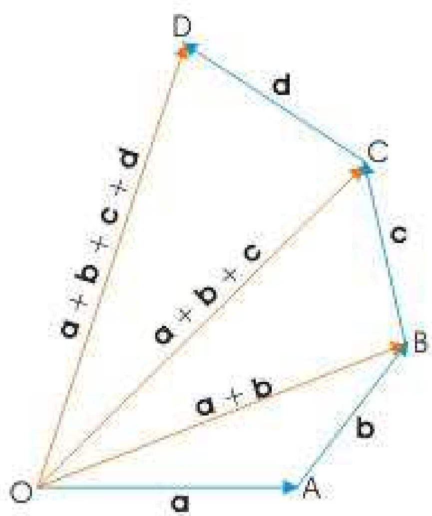


Figura 31: A soma $\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{OD}$.

Multiplicação de segmentos (orientados).

Dados dois números reais $x \neq 0$ e $y \neq 0$, o produto xy é o número real tal que

xy está para x assim como y está para 1.

Isto é,

$$\frac{xy}{x} = \frac{y}{1}.$$

Inspirado nessa relação, definiremos o produto de segmentos (orientados).

Fixemos (no plano) um ponto O e um segmento (orientado) $\overline{Ou} = u$ [unidade].

Consideremos dois segmentos (orientados) $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. O produto

$$\overline{OA} \times \overline{OB}$$

é o segmento (orientado) $\overline{OC}\,[= \overline{OA} \times \overline{OB}]$ que satisfaz as duas condições abaixo.

- A inclinação do segmento $\overline{OC}$ em relação ao segmento $\overline{OB}$ é a mesma que a inclinação de $\overline{OA}$ em relação à unidade $u = \overline{Ou}$.
- O comprimento de $\overline{OC}$ está para o comprimento de $\overline{OB}$ assim como o comprimento de $\overline{OA}$ está para a unidade $u = \overline{Ou}$.

A inclinação (ângulo) e comprimento, estão resumidas em uma única equação

$$\frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{u}.$$

Vide figura na próxima página.

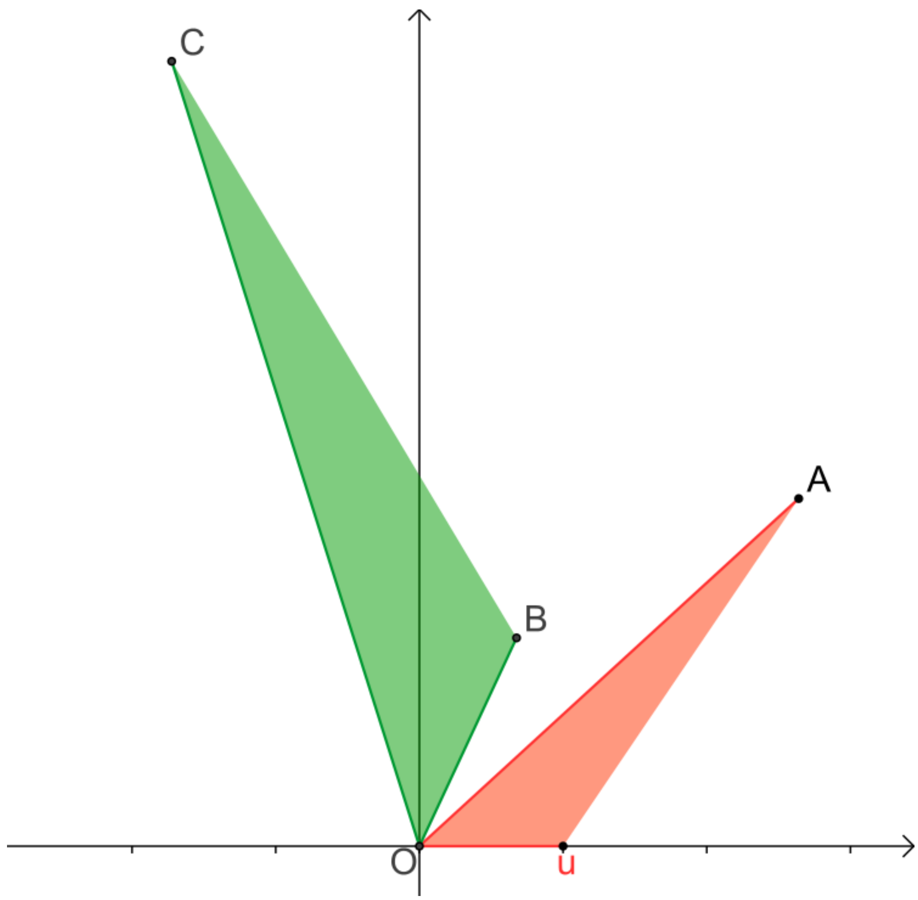


Figura 32: A proporcionalidade $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{u}$ e o produto $\overline{OC} = \overline{OA} \times \overline{OB}$.

- Os triângulos desenhados são semelhantes.
- O ângulo que o produto $\overline{OC} = \overline{OA} \times \overline{OB}$ forma com a unidade $\overline{Ou}$ é dado pela soma do ângulo que $\overline{OA}$ forma com a unidade $\overline{Ou}$ com o ângulo que $\overline{OB}$ forma com a unidade [medidos no sentido anti-horário a partir de $\overline{Ou}$].

Na figura abaixo introduzimos a notação $u = 1$. Sejam $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$.

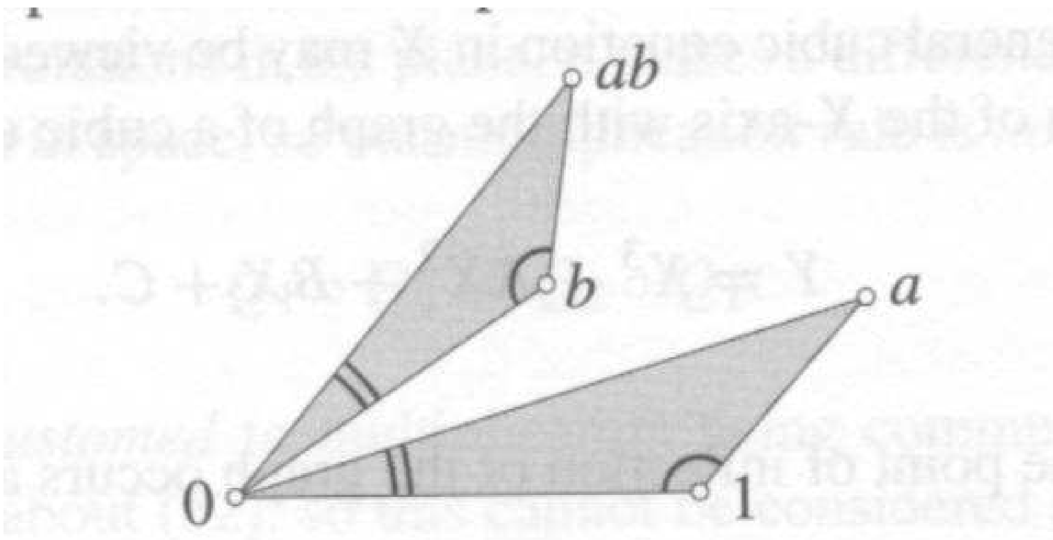


Figura 33: Regra da Semelhança de Triângulos para o Produto, $\frac{ab}{b} = \frac{a}{1}$.

A propriedade comutativa $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OB} \times \overline{OA}$

- O comprimento de $\overline{OA} \times \overline{OB}$ é igual ao comprimento de $\overline{OB} \times \overline{OA}$. Tal comprimento é dado pelo produto dos comprimentos de $\overline{OA}$ e de $\overline{OB}$.

- O ângulo que $\overline{OA} \times \overline{OB}$ forma com a unidade é igual ao ângulo que $\overline{OB} \times \overline{OA}$ forma com a unidade. Tal ângulo é a soma do ângulo que $\overline{OA}$ forma com a unidade com o ângulo que $\overline{OB}$ forma com a unidade [todos medidos no sentido anti-horário e a partir da unidade].

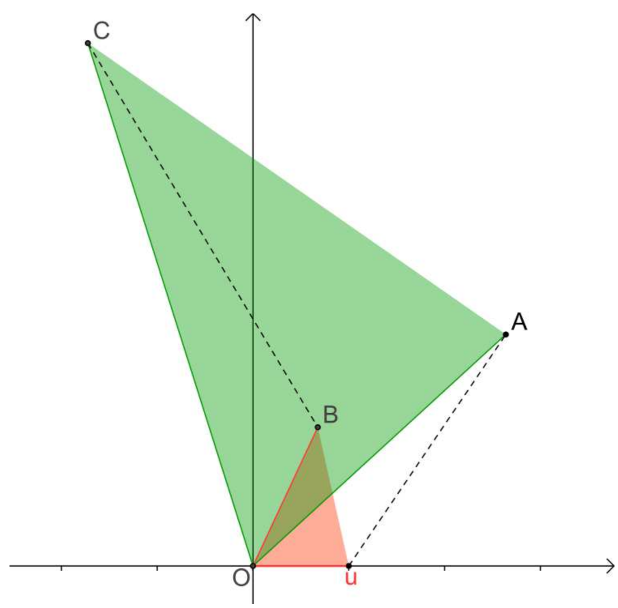


Figura 34: A propriedade $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OB} \times \overline{OA}$.

- Segundo o produto $\overline{OA} \times \overline{OB}$,

  os triângulos $\Delta(OAu)$ e $\Delta(OBC)$ são semelhantes.

- Segundo o produto $\overline{OB} \times \overline{OA}$,

  os triângulos $\Delta(OBu)$ e $\Delta(OAC)$ são semelhantes.

A propriedade associativa $\overline{OA} \times (\overline{OB} \times \overline{OC}) = (\overline{OA} \times \overline{OB}) \times \overline{OC}$.

- O comprimento de $\overline{OA} \times (\overline{OB} \times \overline{OC})$ é igual ao de $(\overline{OA} \times \overline{OB}) \times \overline{OC}$. Tal comprimento é dado pelo produto dos comprimentos de $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$.
- O ângulo que $\overline{OA} \times (\overline{OB} \times \overline{OC})$ forma com a unidade é igual ao ângulo que $(\overline{OA} \times \overline{OB}) \times \overline{OC}$ forma com a unidade. Tal ângulo é a soma do ângulo que $\overline{OA}$ forma com a unidade com o ângulo que $\overline{OB}$ forma com a unidade e, ainda, com o ângulo que $\overline{OC}$ forma com a unidade [todos medidos no sentido anti-horário e a partir da unidade].

A propriedade distributiva $c \times (a+b) = c \times a \; + \; c \times b$ [com a, b e c segmentos].

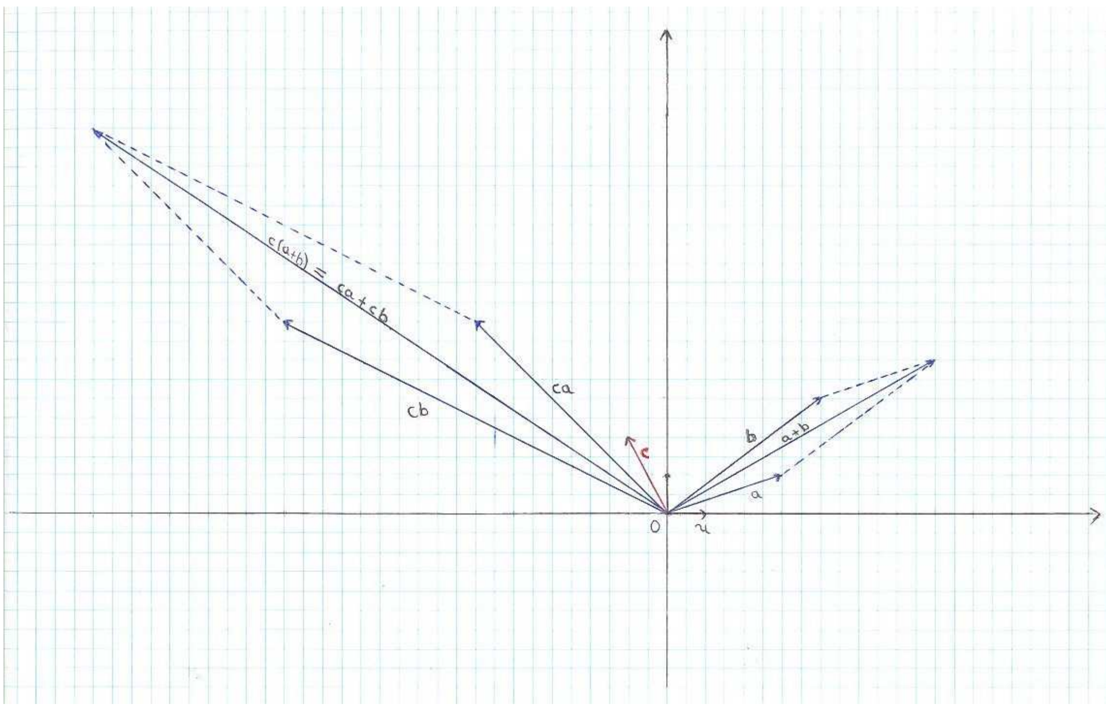


Figura 35: A propriedade $c \times (a+b) = c \times a \; + \; c \times b$.

- Pela regra do triângulo, dois segmentos (orientados) definem um só triângulo.
- Os segmentos a, b e $a+b$ formam um triângulo.
- Os segmentos $c \times a$, $c \times b$ e $c \times a \; + \; c \times b$ formam um triângulo.
- Os segmentos orientados $c \times a$, $c \times b$ e $c \times (a+b)$ são obtidos multiplicando os comprimentos de a, b e $(a+b)$ [respectivamente] por um mesmo número e girando (em um mesmo sentido) os segmentos a, b e $(a+b)$. Isto mostra que também os segmentos $c \times a$, $c \times b$ e $c \times (a+b)$ formam um triângulo.
- Finalizemos. O triângulo $\{c \times a, c \times b, c \times (a+b)\}$ tem em comum com o triângulo $\{c \times a, c \times b, c \times a + c \times b\}$ dois lados. Então, pela primeira dessas observações segue que estes dois triângulos são iguais e portanto

$$c \times (a+b) = c \times a + c \times b.$$

10. O DIAGRAMA DE WESSEL

Wessel chama o segmento (orientado) com ponto inicial O, de comprimento igual ao da unidade $u = +1$ e que forma com a unidade um ângulo de 90 graus (medido a partir da unidade e no sentido anti-horário) de $+\varepsilon$. Vide figura.

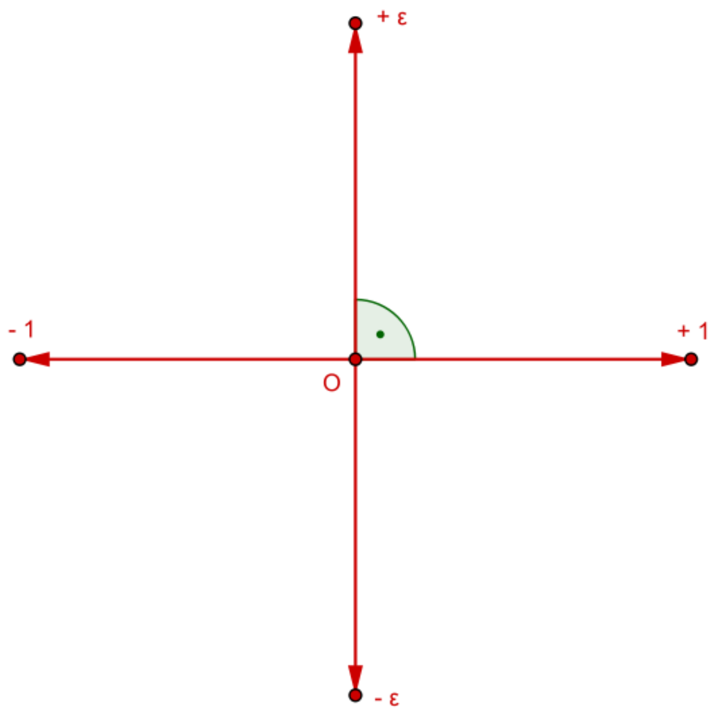


Figura 36: Diagrama de Wessel.

Seja $\varepsilon = +\varepsilon$. Pela definição de produto e pelo diagrama seguem as proporções

$$\frac{\varepsilon \times \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{+1} \qquad \text{e} \qquad \frac{-1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{+1}.$$

Donde segue

$$\varepsilon \times \varepsilon = -1.$$

Isto é,

$$\varepsilon^2 = -1.$$

11. A TABELA MULTIPLICATIVA DE WESSEL

$\times$	1	-1	ε	$-\varepsilon$
1	1	-1	ε	$-\varepsilon$
-1	-1	1	$-\varepsilon$	ε
ε	ε	$-\varepsilon$	-1	1
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε	1	-1

12. O INVERSO (MULTIPLICATIVO).

Seja $\overline{OA}$ um segmento (orientado) no círculo centrado na origem e de raio 1.

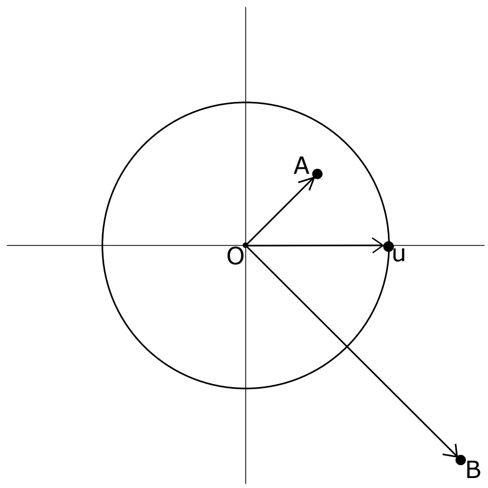


Figura 37: Os inversos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ (um do outro) satisfazem as proporções $\frac{\overline{OA}}{u} = \frac{u}{\overline{OB}}$ e $\frac{\overline{OB}}{u} = \frac{u}{\overline{OA}}$.

Temos $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OB} \times \overline{OA} = u$. Devido à notação $u = 1$, escrevemos

$$\overline{OB} = \frac{1}{\overline{OA}} \quad \text{e} \quad \overline{OA} = \frac{1}{\overline{OB}}.$$

A Divisão.

Dados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ com o comprimento de $\overline{OB}$ não nulo, definimos a divisão

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \overline{OA} \times \left(\frac{1}{\overline{OB}}\right).$$

13. DECOMPOSIÇÃO DE SEGMENTO (ORIENTADO)

Todo segmento (orientado) $\vec{a}$ pode ser decomposto como uma soma de dois segmentos (orientados), com um segmento $\vec{a_x}$ paralelo ao segmento unidade u e um segmento $\vec{a_y}$ paralelo ao segmento ε. Abaixo, representamos os segmentos (orientados) $\vec{a}$, $\vec{a_x}$ e $\vec{a_y}$, com ponto inicial na origem.

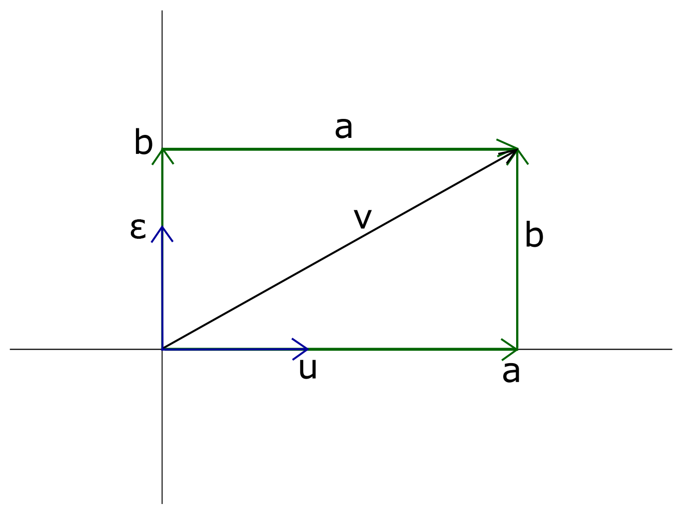


Figura 38: A decomposição $v = a + b$.

Existem dois números reais α e β tais que

$$a = \alpha u \quad \text{e} \quad b = \beta \varepsilon.$$

Donde segue

$$v = \alpha u + \beta \varepsilon.$$

Ou ainda,

$$v = \alpha 1 + \beta \varepsilon.$$

14. A FÓRMULA PARA A MULTIPLICAÇÃO.

Seja $u = 1$ o segmento unidade e $-u = -1$. Consideremos dois segmentos

$$a1 + b\varepsilon \quad \text{e} \quad c1 + d\varepsilon \qquad [\text{com } a, b, c \text{ e } d \text{ números reais}].$$

Pelas propriedades já vistas temos

$$\begin{aligned}(a1 + b\varepsilon) \times (c1 + d\varepsilon) &= a1 \times (c1 + d\varepsilon) + b\varepsilon \times (c1 + d\varepsilon) \\ &= ac(1 \times 1) + ad(1 \times \varepsilon) + bc(\varepsilon \times 1) + bd(\varepsilon \times \varepsilon) \\ &= ac1 + ad\varepsilon + bc\varepsilon + bd(-1) \\ &= (ac - bd)1 + (ad + bc)\varepsilon.\end{aligned}$$

Omitindo o símbolo para a unidade 1 encontramos

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - bd) + (ad + bc)\varepsilon.$$

Concluímos então uma representação geométrica dos números complexos.

15. UM CÁLCULO DE WESSEL.

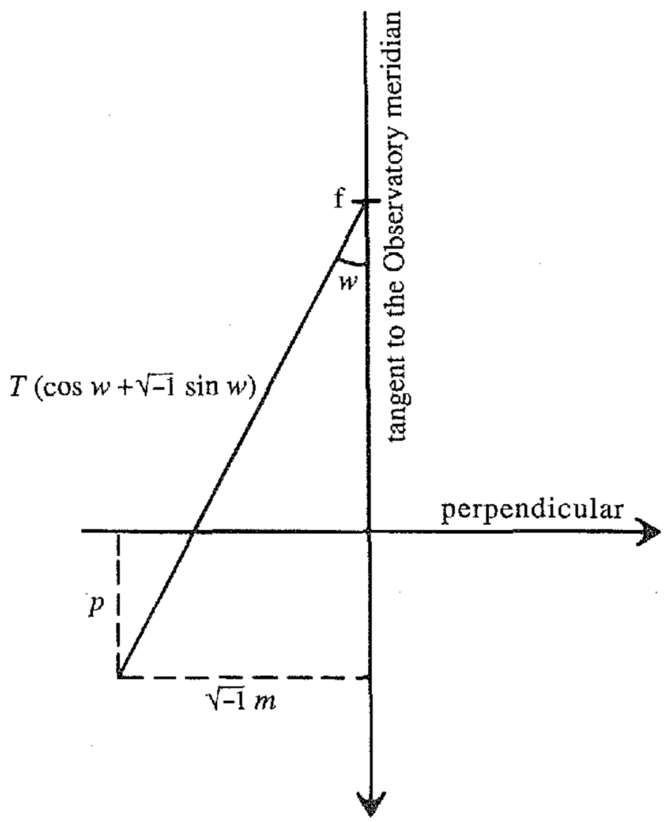


Figura 39: Figura retirada do manuscrito *Cálculo Trigonométricos*, Caspar Wessel, 1779, ilustrando a utilização de coordenadas complexas.

Agradecimentos.

Agradeço a Kai Borre (Danish GPS Center, Aalborg University) por gentilmente disponibilizar os mapas apresentados em figura 9 (página 9), figura 10 (página 10), figura 11 (página 12) e figura 13 (página 15).

Fim♣

Referências.

1. Andersen, K., *Wessel' work on complex numbers and its place in history.* In Bodil Branner and Jesper Lützen, editors, "On the analytical Representation of Direction - an attempt applied chiefly to solving plane and spherical polygons", pp. 65–98. The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, 1999.

2. Bekken, O. B., *Wessel on vectors.* In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz, " Learn from the Masters", pp. 207–213. The Mathematical Association of America, 1995.

3. Beman, W. W., *A Chapter in the History of Mathematics*, Proccedings of the American Association for the Advancement of Science, Science, New Series, Vol. 6, No. 139 (Aug. 27, 1897), pp. 297-307. `http://www.jstor.org/stable/1623297`

4. Borre, Kai *Fundamental Triangulations in Denmark*, Journal of Geodetic Science, Vol 4., nr. 1, s. 74–86, `http://dx.doi.org/10.2478/jogs-2014-0010` – Danish GPS Center, Aalborg University, Aalborg O, Denmark. `http://cct.gfy.ku.dk/publ_others/JGS-S-13-00034.pdf`

5. B. Branner, *Caspar Wessel on representing complex numbers (1799)*, European Mathematical Society, Newsletter 33, September 1999, pp. 13–16. `http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/1999-09-33.pdf`

6. Brun, Viggo, *Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 1959, Tome 12 no. 1, pp. 19–24. `http://www.persee.fr/doc/rhs_0048-7996_1959_num_12_1_3697`

7. Crowe, M. J., *A History of Vector Analysis*, Dover Publications, 1994, pp. 1–16, p. 247.

8. Fonte, C. Costa e Vicente, M. A. F., *Texto de apoio de Topografia*, 135 pp., 2006/2007, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra. `http://www.mat.uc.pt/~vicente/Textos_de_apoio_de_Topografia_2006_2007.pdf`.

9. Katz, V. J., *Historical ideas in teaching linear algebra*. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz, “ Learn from the Masters”, pp. 189–206. The Mathematical Association of America, 1995.

10. Kliner, I., *Thinking the unthinkable: the story of complex numbers (with a moral)*.
`https://eva.fing.edu.uy/mod/resource/view.php?id=46568`

11. Nahin, P. J., *An Imaginary tale: the Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2010

12. Schubring, M., *Argand and the early work on graphical representation: new sources and interpretations*. “Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers”, Proceedings of the Wessel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11-15 1998: Invited Papers. Matematisk- fysiske Meddelelser 46:2, Jesper Lützen (editor), (C. A. Reitzel: Copenhagen, 2001), pp. 125–146.

13. Waerden, B. L. van der, A History of Algebra, Springer, 1985.

14. Jr., R. O. Wells, *The origins of complex geometry*.
`http://arxiv.org/abs/1504.04405v1`, 16 Apr 2015

15. Wessel, C., *On the analytical representation of direction - an attempt applied chiefly to the solution of plane and spherical polygons*. J. Lützen and Bodil Branner (eds.). The Royal Danish Academy of Sciences and Letters (1999).

Biblioteca IME-USP.

16. Wessel, C., *On the analytical representation of Direction - an attempt applied chiefly to the solution of plane and spherical polygons* , by Caspar Wessel. In Midonick, H. O, *The Treasury of Mathematics*, volume 2 (Penguin Books 1968) pp. 804 – –814. Tradução do dinamarquês para o inglês (pelo Professor Martin A. Nordgaard) dos primeiros 10 parágrafos da obra original de C. Wessel.
Biblioteca IME-USP.

17. Wessel, C., *On the analytical representation of direction - an attempt applied chiefly to the solution of plane and spherical polygons.* In Smith, D. E., *A Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill Book Company Inc., 1929. Tradução do dinamarquês para o inglês (pelo Professor Martin A. Nordgaard) dos primeiros 16 parágrafos da obra original de C. Wessel.

    Biblioteca IME-USP.

18. Wessel, *Essai sur la représentation analytique de la direction.* Tradução do dinamarquês para o francês da obra original (completa) de C. Wessel, "*Om Directionens analytiske [...].*
    `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99681g`