DIFUSÃO CULTURAL
FUNÇÕES ANALÍTICAS (ABORDAGEM WEIERSTRASSIANA)
IMEUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Verão de 2012

Sugestões e Soluções para a 1ª Lista

1. Demonstre o **Binômio de Newton**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;.$$

1ª Solução (Combinatória)

Por convenção temos $0! = 1$ e portanto, $\binom{n}{0} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Temos,

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b) = c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + ... + c_1 ab^{n-1} + c_0 b^n \,,$$

com os coeficientes $c_{i's}$ em $\mathbb{N}$.

"Imaginando" n caixas, cada uma só com os elementos a e b, segue que cada parcela do desenvolvimento de $(a+b)^n$ pode ser vista como oriunda de n-retiradas, uma de cada caixa, ou do termo a ou do termo b. O número de "formas" que é possível retirar o termo a n-vezes para formar a^n é, evidentemente 1. Logo, temos $c_n = 1$. Formamos a parcela $a^{n-p}b^p$ retirando o termo a $(n-p)$−vezes; isto é, retirando o termo b p-vezes e, para tal temos na primeira retirada n possíveis caixas, na segunda $n-1$ e na p-ésima retirada $n-p+1$ possíveis caixas. O número de repetições, por não importar a caixa de onde retiramos o termo b, é $p!$. Assim, o coeficiente da parcela $a^{n-p}b^p$ é

$$\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

2ª Solução (**Indução**) Seja $X = \{n \in \mathbb{N}\ \text{ tal que a fórmula é verdadeira }\}$. Provemos $X = \mathbb{N}$.

Caso $n = 1$: temos $(a+b)^1 = a+b$ e $\sum_{p=0}^{p=1} \binom{1}{p} a^b b^{1-p} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a+b$. Logo, $1 \in X$.

(Passo de indução) Suponhamos a fórmula válida para $m \in \mathbb{N}$ e provemo-la para $m = 1$.

Temos $(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m$ e, por hipótese de indução [isto é, admitindo a fórmula $(a+b)^m = \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m-p}$],

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m-p} = a \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m-p} + b \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m-p} =$$

$$= \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^{p+1}\, b^{m-p} + \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m+1-p} \ .$$

No primeiro entre os dois últimos somatórios acima fazemos a substituição $k = p+1$. No segundo apenas trocamos a letra p por k. Obtemos assim,

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \binom{m}{k-1} a^i\, b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} a^k\, b^{m+1-k} =$$

$$\left[\ \sum_{k=1}^{k=m} \binom{m}{k-1} a^k\, b^{m+1-k} + a^{m+1} b^0 \ \right] + \left[\ a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{k=m} \binom{m}{k} a^k\, b^{m+1-k} \ \right] =$$

$$= a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{k=m} \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] a^k\, b^{m+1-k} + a^0 b^{m+1} \ .$$

Por último,

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \frac{m!}{(k-1)!(m-1)!} \left[\frac{1}{m-k+1} + \frac{1}{k} \right] = \frac{(m+1)m!}{k(k-1)!(m-1)!} = \binom{m+1}{k} \ \blacksquare$$

8. (A desigualdade de Cauchy) Dadas duas sequências de n números complexos $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ e $(w_k)_{1\leq k\leq n}$, prove:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w_k}\Big|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\Big).$$

Sugestão: Faça primeiro o caso $n = 2$ (o caso $n = 1$ é trivial).

Solução. Utilizaremos que $2ab \leq a^2 + b^2$, se a e b são reais.

- Se $n = 2$ temos

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=1}^{2} z_k\overline{w_k}\Big|^2 &= (z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2})(\overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2)\\
&= |z_1|^2|w_1|^2 + z_1\overline{w_1}\,\overline{z_2}w_2 + z_2\overline{w_2}\,\overline{z_1}w_1 + |z_2|^2|w_2|^2\\
&= |z_1|^2|w_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{w_1}\,\overline{z_2}w_2) + |z_2|^2|w_2|^2\\
&\leq |z_1|^2|w_1|^2 + 2|z_1||w_2||z_2||w_1| + |z_2|^2|w_2|^2\\
&\leq |z_1|^2|w_1|^2 + (|z_1|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_1|^2) + |z_2|^2|w_2|^2\\
&= (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2).
\end{aligned}$$

- Para n arbitrário em $\mathbb{N}$ temos,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w_k}\Big|^2 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w_k}\Big)\overline{\Big(\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{w_j}\Big)}\\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w_k}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}w_j\Big)\\
&= \sum_{1\leq j,k\leq n} z_k\overline{w_k}\,\overline{z_j}w_j\\
&= \sum_{j=k}^{n} z_k\overline{w_k}\,\overline{z_j}w_j + \sum_{j\neq k} z_k\overline{w_k}\,\overline{z_j}w_j\\
&= \sum_{j=k}^{n} |z_k|^2|w_k|^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} 2\mathrm{Re}(z_k\overline{w_k}\,\overline{z_j}w_j)\\
&\leq \sum_{j=k}^{n} |z_k|^2|w_k|^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} 2|z_k||w_j||z_j||w_k|\\
&\leq \sum_{j=k}^{n} |z_k|^2|w_k|^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} (|z_k|^2|w_j|^2 + |z_j|^2|w_k|^2)\\
&= (|z_1|^2 + ... + |z_n|^2)(|w_1|^2 + ... + |w_n|^2) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

18. Determine os valores máximo e mínimo de

$$(a)\ \frac{|z-i|}{|z+i|}\,,\ \text{com } |z|=3 \qquad ; \qquad (b)\ \ |z+i|\,,\ \text{com } |z-2|=1\ .$$

Resolução.

Utilizemos o isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, como espaços vetoriais reais.

(a) Seja C a circunferência de centro na origem e raio 3.

O ponto $(0,-3) \equiv -3i$ é o ponto em C mais distante de $i \equiv (0,1)$ e também o mais próximo de $-i \equiv (0,-1)$. Logo, o valor máximo pedido é

$$\frac{|-3i-i|}{|-3i+i|} = \frac{4}{2} = 2\ .$$

O ponto $(0,3) \equiv 3i$ é o ponto em C mais próximo de $i \equiv (0,1)$ e também o mais distante de $-i \equiv (0,-1)$. Logo, o valor mínimo pedido é,

$$\frac{|3i-i|}{|3i+i|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ .$$

(b) Os pontos da circunferência C, centrada em $z_0 = 2$ e de raio 1, que são o mais próximo e o mais distante do ponto $-i$ são os pertencentes à intersecção da reta determinada pelos pontos $(0,-1)$ e $(2,0)$ com a circunferência C:

$$2 \pm \frac{2-(-i)}{|2-(-i)|} = 2 \pm \frac{2+i}{\sqrt{5}}\ .$$

A distância mínima e máxima são, respectivamente,

$$\left|\left(2-\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)-(-i)\right| = \sqrt{6-2\sqrt{5}} \qquad , \qquad \left|\left(2+\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)-(-i)\right| = \sqrt{6+2\sqrt{5}} \ \blacksquare$$

Atenção Uma outra resolução para (a) é obtida analizando máximo/mínimo de

$$\frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = f(x,y) = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{10-2y}{10+2y} = \frac{5-y}{5+y}\,,$$

para $x^2+y^2=9$. Isto é, o máximo e o mínimo de $g(y) = \frac{5-y}{5+y}\,, y \in [-3,3]$.

30. Determine a, b tais que $p(z) = z^4 - 10z^3 + az^2 - 50z + b$ seja um quadrado perfeito.

Esboço. Se $q^2(z) = p(z)$, o grau de q é 2 e, se $q(z) = \gamma z^2 + \alpha z + \beta$, $\alpha\,, \beta \in \mathbb{C}$, temos $\gamma^2 = 1$ e $\gamma = \pm 1$. Supondo $\gamma = 1$, o que é natural pois se $q^2(z) = p(z)$ então $(-q)^2(z) = p(z)$, imponha $p(z) = (z^2 + \alpha z + \beta)^2$ e identifique α e β ∎

32. Seja $p \in \mathbb{C}[z]$, com $p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} = a_0 z^m + ... a_{m-1} z + a_m$, $a_0 \neq 0$. Supondo que os zeros de $p = p(z)$ estão em progressão aritmética, determine estes zeros.

Solução.

Se $w_j\,, 1 \leq j \leq m$, são as raízes de $p(z)$ temos

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + a_3 z^{m-3} + ... + a_{m-1} z + a_m = a_0(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3).....(z - w_m)\,.$$

É trivial a identidade (admitindo $1 \leq j\,, k \leq m$):

$$(1) \qquad (w_1 + w_2 + ... + w_m)^2 \;=\; (w_1^2 + w_2^2 + ... + w_m^2) + 2\sum_{j<k} w_j w_k\,.$$

É fácil ver que o coeficiente do monômio z^{m-1} no desenvolvimento da expressão polinomial $a_0(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)....(z-w_m)$ é $-a_0(w_1 + w_2 + ... + w_m)$ e que o coeficiente do monômio z^{m-2} é a_0 vezes a soma dos produtos das raízes : $w_j w_k$, com $j \neq k$ e considerando-se apenas um entre cada dois pares (j,k) e (k,j). Então, identificando tais coeficientes com os de $p(z)$ temos, $w_1 + w_2 + ... + w_m = -\frac{a_1}{a_0}$ e $\sum_{j<k} w_j w_k = \frac{a_2}{a_0}$, que substituindo em (1) acarreta,

$$(2) \qquad \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0} = w_1^2 + w_2^2 + ... + w_m^2 \qquad .$$

Esrevendo as raízes, em p.a, como $w_j = \omega + jr$, ω fixo, $1 \leq j \leq m$ e r a razão da p.a temos, utilizando as fórmulas para $\sum_{j=1}^{m} j$ e $\sum_{j=1}^{m} j^2$,

$$\sum_{j=1}^{m} w_j^2 = \sum_{j=1}^{m} (\omega^2 + 2\omega j r + j^2 r^2) = m\omega^2 + 2\omega \frac{m(m+1)}{2} r \;+\; \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} r^2\,,$$

que substituída na equação (2) e então dividindo a equação resultante por m fornece

$$(3) \qquad \frac{1}{m}(\frac{a_1}{a_0})^2 - \frac{2}{m}\frac{a_2}{a_0} = \omega^2 + \omega(m+1)r + \frac{(m+1)(2m+1)}{6}r^2 .$$

Porém, utilizando que as raízes estão em p.a temos também

$$(4) \ -\frac{a_1}{a_0} = \sum_{j=1}^{m} w_j = \sum_{j=1}^{m}(\omega + jr) = m\omega + \frac{m(m+1)}{2}r \quad \Longrightarrow \quad (4') \ -\frac{1}{m}\frac{a_1}{a_0} = \omega + \frac{m+1}{2}r.$$

Desta forma, completando quadrados em (3) e então usando (4') obtemos,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{m}(\tfrac{a_1}{a_0})^2 - \tfrac{2}{m}\tfrac{a_2}{a_0} &= \left[\omega + \tfrac{m+1}{2}r\right]^2 - \tfrac{(m+1)^2}{4}r^2 + \tfrac{(m+1)(2m+1)}{6}r^2 \\ &= \left(-\tfrac{1}{m}\tfrac{a_1}{a_0}\right)^2 + \tfrac{2(m+1)(2m+1)-3(m+1)^2}{12}r^2 \\ &= \tfrac{1}{m^2}\tfrac{a_1^2}{a_0^2} + \tfrac{(m+1)(m-1)}{12}r^2 \quad . \end{aligned}$$

O que nos fornece r e então de (4') obtemos finalmente ω $\blacksquare$

36. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$ e $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(A) Desenhe os subconjuntos:

(1) $\{z : |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}$, com a condição $2a > |z_1 - z_2|$.

(2) $\{z : |z - z_1| - |z - z_2| = 2a\}$, com a condição $2a < |z_1 - z_2|$.

(3) $\{z : |z - z_1| = a\}$.

(B Apresente as equações cartesianas (simplificadas) dos subconjuntos acima.

Consideremos o problema A.1. (deixamos ao leitor os demais problemas)

$$(A1.1) \qquad |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\,, \ 2a > |z_1 - z_2|\,,$$

com z_1 e z_2 fixos, e distintos, em $\mathbb{C}$ e a um real, $a > 0$. Temos,

$$\begin{cases} z - z_1 = z - \frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_1-z_2}{2} = w - \frac{z_1-z_2}{2} \\ z - z_2 = z - \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2} = w + \frac{z_1-z_2}{2} \end{cases}$$

Se $\gamma = \frac{z_1-z_2}{2}$, pela translação $z \mapsto w = z - \frac{z_1+z_2}{2}$ mudamos a equação (A1.1) para

$$(A1.2) \qquad |w-\gamma| + |w+\gamma| = 2a \ .$$

Como o número $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ tem módulo 1, segue que a aplicação $\zeta \mapsto w = \frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta$ é uma rotação e mudamos (A1.2) para

$$\left|\frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta - \gamma\right| + \left|\frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta + \gamma\right| = 2a \ ,$$

e pondo $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ em evidência, notando que $|\frac{\gamma}{|\gamma|}| = 1$, e simplificando,

$$\big|\zeta - |\gamma|\big| \ + \ \big|\zeta + |\gamma|\big| = 2a$$

Pondo $c = |\gamma| > 0$ temos (notemos que $c = |\gamma| = \frac{|z_1-z_2|}{2} < a$),

$$\big|\zeta - c\big|^2 = \big[\ 2a \ - \ \big|\zeta + c\big|\ \big]^2 \ ,$$

e expressando ζ na forma $\zeta = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$ (distinguindo da notação $z = x + iy$ para z),

$$(u-c)^2 + v^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} + (u+c)^2 + v^2 \,,$$

$$-2cu = 4a^2 - 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} + 2cu \,,$$

$$4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} = 4a^2 + 4cu$$

e então, cancelando o 4 e elevando ao quadrado,

$$a^2u^2 + 2a^2cu + a^2c^2 + a^2v^2 = a^4 + 2a^2cu + c^2u^2 \,,$$

$$(a^2-c^2)u^2 + a^2v^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2-c^2) \ .$$

Assim, dividindo por $a^2(a^2-c^2)$,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2-c^2} = 1 \ .$$

Finalmente, como $a^2 - c^2 > 0$, pois $0 < c < a$, existe $b > 0$ tal que $a^2 - c^2 = b^2$ e portanto,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad .$$

Tarefa: represente geometricamente as transformações realizadas ■

46. Dados $a, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}^*$, prove que as raízes da equação em $z \in \mathbb{C}$:

$$(*) \qquad (z-b_1)^m + a(z-b_2)^m = 0$$

estão sobre uma circunferência ou uma reta e resolver a equação.

Solução. Supondo $z \neq b_2$ tal que:

$$\frac{(z-b_1)^m}{(z-b_2)^m} = -a \quad \text{e} \quad \frac{|z-b_1|}{|z-b_2|} = \sqrt[m]{|-a|} = r \in [0, +\infty) \ ,$$

temos $|z-b_1|^2 = r^2|z-b_2|^2$ e, se $z = x+iy$, $b_i = c_i + id_i$, $c_i's, d_i's \in \mathbb{R}$ e $r \neq 1$,

$$(x-c_1)^2 + (y-d_1)^2 = r^2(x-c_2)^2 + r^2(y-d_2)^2 \ \text{ ou}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2(c_2r^2 - c_1)}{1-r^2}x + \frac{2(d_2r^2-d_1)}{1-r^2}y = \frac{r^2(c_2^2+d_2^2) - c_1^2 - d_1^2}{1-r^2} \quad \text{ou}$$

$$\left(x - \tfrac{c_2r^2-c_1}{1-r^2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{d_2r^2-d_1}{1-r^2}\right)^2 = \left(\tfrac{c_2r^2-c_1}{1-r^2}\right)^2 + \left(\tfrac{d_2r^2-d_1}{1-r^2}\right)^2 - \tfrac{c_1^2+d_1^2-r^2(c_2^2+d_2^2)}{1-r^2}$$

$$= \tfrac{r^2(c_1-c_2)^2 + r^2(d_1-d_2)^2}{(1-r^2)^2} = \tfrac{r^2}{(1-r^2)^2}|b_1-b_2|^2 \ ,$$

que define uma circunferência se $b_1 \neq b_2$ e $r \neq 1$; e, se $r \neq 1$ e $b_1 = b_2$ um ponto. Se $r = 1$, $|z-b_1| = |z-b_2|$ define a mediatriz de $\overline{b_1 b_2}$, se $b_1 \neq b_2$. Se $b_1 = b_2$ obtemos de (*), $(1+a)(z-b_1)^m = 0$ que tem solução única se $a \neq -1$.

Seja $\sqrt[m]{-a}$ uma das m raízes m-ésimas de $-a$ e $z \in \mathbb{C}$, $z \neq b_2$, o correspondente complexo tal que $\sqrt[m]{-a} = (z-b_1)(z-b_2)^{-1}$. É claro que:

$$\sqrt[m]{-a} = \frac{z-b_1}{z-b_2} = \frac{z-b_2+b_2-b_1}{z-b_2} = 1 + \frac{b_2-b_1}{z-b_2} \ .$$

Donde, se $b_1 \neq b_2$ e $-a \neq 1$ as m soluções do problema original são:

$$z = b_2 + \frac{b_2-b_1}{\sqrt[m]{-a}-1} \ ,$$

No caso $a = -1$ e $b_1 \neq b_2$ temos $\left(\frac{z-b_1}{z-b_2}\right)^m = 1$ e $\frac{z-b_1}{z-b_2} = \sqrt[m]{1} \neq 1$ ($z = 1$ não é raíz aceitável pois $\frac{z-b_1}{z-b_2} \neq 1$) e achamos, procedendo como acima, $m-1$ soluções■

47. (A) Determine a relação entre $a, b \in \mathbb{R}$ para que sejam todas reais as raízes de

$$(*) \qquad \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^m = a + ib \qquad (m \in \mathbb{N}^*) \ .$$

(B) Supondo verificada a relação encontrada em (A), resolva a equação (*) admitindo conhecido o argumento θ do número complexo $a + bi$.

Sugestão:

(A) Se $z = x \in \mathbb{R}$ então $i + z = x + i \neq 0$ e a divisão por $i + x$ é efetuável qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ e obteremos várias equações equivalentes a (*). Indiquemos por $\omega_\nu = \sqrt[m]{r}(p_\nu + iq_\nu)$, p_ν e q_ν reais, $1 \leq \nu \leq m$, $r = |a + ib|$, as m-raízes m-ésimas de $a + ib$.

Então,

$$\left(\tfrac{i-z}{i+z}\right)^m = a + ib \quad \Leftrightarrow \tfrac{i-x}{x+i} = \omega_\nu \Leftrightarrow (i - x) = \omega_\nu(x + i) \Leftrightarrow x(1 + \omega_\nu) = i(1 - \omega_\nu) \,,$$

e notemos que admitindo a existência da solução x temos $1 + \omega_\nu \neq 0$ pois $\omega_\nu = -1$ implica $\frac{i-x}{x+i} = -1$ e, então, $i = -i$ o que é impossível. Assim, continuando com as equações equivalentes,

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{i-z}{i+z}\right)^m = a + ib \quad &\Leftrightarrow x = i\tfrac{1-\omega_\nu}{1+\omega_\nu} \Leftrightarrow x = i\tfrac{1-\omega_\nu}{1+\omega_\nu}\tfrac{\overline{1+\omega_\nu}}{\overline{1+\omega_\nu}} \Leftrightarrow x = i\tfrac{(1-\omega_\nu)(1+\overline{\omega_\nu})}{|1+\omega_\nu|^2} \\ &\Leftrightarrow x = i\frac{1 - 2q_\nu i - |\omega_\nu|^2}{(1+p_\nu)^2 + q_\nu^2} \Leftrightarrow x = \frac{2q_\nu + i(1 - |\omega_\nu|^2)}{(1+p_\nu)^2 + q_\nu^2} \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{2q_\nu}{(1+p_\nu)^2 + q_\nu^2} + i\tfrac{1 - |\omega_\nu|^2}{1+p_\nu)^2 + q_\nu^2} \ .\end{aligned}$$

Logo, x é real se e só se $|\omega_\nu| = 1$ o que ocorre se e só se $a^2 + b^2 = 1$.

(B) Complete ■

50. Sejam $z\,, w \in \mathbb{C}$, com $|z|\,, |w| \leq 1$ e $z + w = 1$. Mostre que $|z + w^2| \leq 1$.

Comentário. Resultados como este são importantes para identicarmos condições em que temos a continuidade dde uma função definida como uma série de potências em um ponto da fronteira do disco de convergência. Alguns destes resultados para séries de potências devem-se a Abel e são às vezes chamados de "resultados oculares" ou até "do olho".

Resolução (talvez não a melhor).

Escrevendo $z = x + iy$ e $w = 1 - z = (1 - x) - iy$ temos,

$$\begin{cases} |z| \leq 1 \iff \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ |w| \leq 1 \iff (1-x)^2 + y^2 \leq 1 \quad \iff \quad x^2 + y^2 \leq 2x \ . \end{cases}$$

A primeira inequação do sistema acima descreve o círculo de raio 1 centrado na origem e a segunda inequação representa o círculo de raio 1 centrado no ponto $(1, 0)$. A região composta pelos pontos satisfazendo ambas as inequações é também chamada uma "luna". Portanto, um método seguro de solução é passarmos para as variáveis cartesiana a função

$$|z + w^2|^2 = |z + (1 - z)^2|^2 \ ,$$

e determinarmos o seu máximo sobre a luna, que é um compacto. Assim procedendo temos $w^2 = [(1-x)^2 - y^2] \ - \ 2y(1-x)i$ e definimos

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) \qquad &= \ [x + (1-x)^2 - y^2]^2 \ + \ [y - 2y(1-x)]^2 \\ &= [(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} - y^2]^2 \ + \ 4y^2(x - \tfrac{1}{2})^2 \\ &= \Big[\Big(x - \tfrac{1}{2}\Big)^2 + y^2\Big]^2 + \tfrac{3}{2}\Big[\Big(x - \tfrac{1}{2}\Big)^2 - y^2\Big] + \tfrac{9}{16}. \end{aligned}$$

Verifique (é elementar e necessário) que o único ponto crítico de φ é $P = (\frac{1}{2}, 0)$, o qual pertence ao interior da luna [desenhe-a e **identifique** tal ponto], e que $\varphi(\frac{1}{2}, 0) = \frac{9}{16}$.

Determine agora o máximo e o mínimo na fronteira. Note que o trecho, desta fronteira, contido na circunferência de raio 1 admite a parametrização

$$J = \Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} \Big] \ni y \mapsto x = +\sqrt{1 - y^2} \ ,$$

e identifique o máximo de $\psi_1(y) = \varphi\big(\sqrt{1-y^2}\,,y\big)$, $y \in J$.

O outro trecho admite a parametrização

$$J = \Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\Big] \ni y \mapsto x = 1 - \sqrt{1-y^2}\ ,$$

e então ache máximo de $\psi_2(y) = \varphi\big(1 - \sqrt{1-y^2}\,,y\big)$, $y \in J$

[**Dica:** $\psi_1(y) = \psi_2(y)$] ■

83. Raízes quadradas. Determine elementarmente (i.e., não utilize Fórmula de Moivre ou Fórmula de Euler ou Forma Polar) as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

$$z^2 \ = \ a + ib\,, \quad \text{onde } a \text{ e } b \text{ são reais fixos}\ .$$

Sugestão: Determine as partes real e imaginária de z.

Prova. Escrevendo $z = x + iy$, com x e y em $\mathbb{R}$, encontramos

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \quad \Longrightarrow \quad 4x^2y^2 = b^2. \end{cases}$$

Assim temos,

$$4x^2(x^2 - a) = b^2\ ,$$

donde segue, $x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$. Portanto,

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Como $a - \sqrt{a^2 + b^2} \leq 0$ (um cateto tem comprimento inferior ao da hipotenusa), seque que a única possibilidade para x^2 é

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Temos então,

$$y^2 = x^2 - a = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Definindo $\operatorname{sgn}(b) = +1$ se $b \geq 0$ e $\operatorname{sgn}(b) = -1$ se $b < 0$ temos

$\operatorname{sgn}(b) = +1 \Longrightarrow xy \geq 0$ (igual sinal) e $\operatorname{sgn}(b) = -1 \Longrightarrow xy < 0$ (sinais contrários).

Assim, as raízes são

$$\pm z = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \ .$$

Note que se $b = 0$ então, já que convenientemente definimos $\operatorname{sgn}(0) = 1$, obtemos

$$\pm z = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2}}{2}} + i\operatorname{sgn}(0)\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2}}{2}} = \sqrt{\frac{|a|+a}{2}} + i\sqrt{\frac{|a|-a}{2}} = \begin{cases} \sqrt{a}\,, & \text{se } a \geq 0\,, \\ \\ i\sqrt{-a}\,, & \text{se } a < 0 \end{cases} \blacksquare$$

85. A **derivada (formal)** de um polinômio

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

é definida como o polinômio

$$p'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_1 \ .$$

Mostre que:

(A) α é **raíz simples** de p se e só se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$.

(B) α é **raíz dupla** de p se e só se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$.

(C) α é **raíz de multiplicidade** k ($k \leq n$) de p se e só se

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad p^{(k)}(\alpha) \neq 0 \ .$$

Sugestão. Apliquem a intuitiva (e fácil de provar) fórmula para a derivada do produto de duas funções deriváveis: dado um natural N então, a derivada $(fg)^{(N)}$ é combinação linear das funções $f^{(j)}g^{(N-j)}$, com $j = 0, \dots, N$. Isto é,

$$(fg)^{(N)} = \sum c_j f^{(j)} g^{(N-j)}\,, \text{ onde } c_j \text{ indica constantes reais}\,,\ 0 \leq j \leq N \ .$$

Para ser exato (mas não há necessidade), a **Fórmula de Leibniz** diz que

$$c_j = \binom{N}{j} \ \blacksquare$$

88. Sejam $(z_j)_{1\le j\le n}$ e $(w_k)_{1\le k\le n}$ duas sequências finitas em $\mathbb{C}$. Demonstre a Identidade de Lagrange:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{w_j}\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right) - \sum_{1\le j<k\le n}|z_jw_k - z_kw_j|^2 \ . \qquad .$$

Deduza então, a desigualdade de Cauchy (vide Exercícios 1.8 e 1.9.

Solução.

Temos,

$$\left|\sum z_j\overline{w_j}\right|^2 = \left(\sum z_j\overline{w_j}\right)\left(\sum \overline{z_k}w_k\right) = \sum z_j\overline{w_j}\,\overline{z_k}w_k$$

$$= \sum_{j=k} z_j\overline{w_j}\,\overline{z_k}w_k + \sum_{j\ne k} z_j\overline{w_j}\,\overline{z_k}w_k$$

$$= \left[\left(\sum z_j\overline{z_j}\right)\left(\sum w_k\overline{w_k}\right) - \sum_{j\ne k} z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k}\right] + \sum_{j\ne k} z_j\overline{w_j}\,\overline{z_k}w_k$$

$$= \left(\sum|z_j|^2\right)\left(\sum|w_k|^2\right) - \sum_{j<k}\left(z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k} + z_k\overline{z_k}w_j\overline{w_j}\right) + \sum_{j<k}\left(z_j\overline{w_j}\,\overline{z_k}w_k + z_k\overline{w_k}\,\overline{z_j}w_j\right)$$

$$= \left(\sum|z_j|^2\right)\left(\sum|w_k|^2\right) - \sum_{j<k}\left(z_jw_k - z_kw_j\right)\left(\overline{z_j}\,\overline{w_k} - \overline{w_j}\,\overline{z_k}\right)$$

$$= \left(\sum|z_j|^2\right)\left(\sum|w_k|^2\right) - \sum_{j<k}\left|z_jw_k - z_kw_j\right|^2 \qquad \blacksquare$$

5. (Lista 4) Mostre a convergência uniforme de (f_n) em $X \subset \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

   (a) $f_n(x) = \frac{\text{sen} nx}{n^7}$, onde $X = \mathbb{R}$.

   (b) $f_n(x) = e^{-nx} \sin x$, onde $X = [0, +\infty)$.

   (c) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, onde $X = \mathbb{R}$.

   Dicas.

   (b) Consideremos $x \geq 0$. Utilizamos que

   $|\sin \theta| \leq |\theta|, \;\; \forall \theta \in \mathbb{R} \;\;$ e $\;\; e^t = 1 + t + ... \geq t\,, \;\; \forall t \in \mathbb{R}$. Logo, $\dfrac{t}{e^t} \leq 1\,, \;\; \forall t \in \mathbb{R}$.

   Temos então,
$$\frac{|\sin x|}{e^{nx}} \leq \frac{|x|}{e^{nx}} \leq \frac{1}{n} \frac{nx}{e^{nx}} \leq \frac{1}{n} \;.$$

   (c) Proceda similarmente ao ítem (b).