DIFUSÃO CULTURAL - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Unidade: IMEUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Verão 2012

2ª PROVA

Faça ao menos 6 das 8 questões que seguem.

Questões obrigatórias: 1, 2 e 8.

1. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Mostre que:

$$f \text{ é contínua} \iff f^{-1}(O) \text{ é aberto, para todo } O \text{ aberto em } \mathbb{C}\ .$$

Solução.

($\Rightarrow$) Seja O aberto em $\mathbb{C}$. Se $O = \varnothing$ então é claro que $f^{-1}(O) = \varnothing$ é aberto.

Seja $O \neq \varnothing$. Dado um arbitrário $z_0 \in f^{-1}(O)$ temos que $f(z_0) \in O$ e existe $r = r(z_0) > 0$ tal que $D\big(f(z_0); r\big) \subset O$. Como f é contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f\Big(D\big(z_0; \epsilon\big)\Big) \subset D\big(f(z_0); r\big) \subset O.$$

Logo, $D\big(z_0; \epsilon\big) \subset f^{-1}(O)$ e portanto, $f^{-1}(O)$ é aberto.

($\Leftarrow$) Seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Seja também $\epsilon > 0$. Consideremos o aberto $D\big(f(z_0); \epsilon\big)$. Por hipótese, $f^{-1}\Big(D\big(f(z_0); \epsilon\big)\Big)$ é aberto. É óbvio que $z_0 \in f^{-1}\Big(D\big(f(z_0); \epsilon\big)\Big)$. Portanto, devido à hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$D(z_0; \delta) \subset f^{-1}\Big(D\big(f(z_0); \epsilon\big)\Big).$$

Logo,

$$f\Big(D(z_0; \delta)\Big) \subset D\big(f(z_0); \epsilon\big).$$

Isto é,

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Assim, f é contínua em um arbitrário $z_0 \in \mathbb{C}$. Logo, f é contínua $\blacksquare$

2. Seja $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty]$ tal que

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) \;=\; 0.$$

Mostre que f assume um valor máximo absoluto.

Solução.

Se f é nula, é óbvio que f assume um valor máximo absoluto..

Se f não é nula, existe x_0 tal que $f(x_0)>0$. Então, como $f(x)\to 0$ se $|x|\to+\infty$, temos que existe $M>0$ tal que

$$0\le f(x)<f(x_0)\,,\ \text{ se } |x|>M.$$

Notemos que, é fácil ver, $x_0\in[-M,M]$.

Pelo Teorema de Weierstrass, f restrita ao intervalo compacto $[-M,M]$ assume um valor máximo em um ponto $X\in[-M.M]$. Isto é,

$$f(x)\le f(X)\,,\ \ \forall x\in[-M,M].$$

Em particular, $f(x_0)\le f(X)$.

Obtemos então,

$$\begin{cases} f(x)\le f(X)\,, & \text{se } x\in[-M,M]\\ f(x)<f(x_0)\,, & \text{se } |x|>M\\ f(x_0)\le f(X). \end{cases}$$

Logo: $f(x)\le f(X)$, para todo $x\in\mathbb{R}$ ■

3. Demonstre o TFA.

   É permitido usar: radiciação em $\mathbb{C}$, a norma euclidiana, o Teorema de Weierstrass e a função exponencial complexa (fórmulas de Moivre e de Euler).

   Não é permitido usar: derivação, integração e teoria das funções analíticas. Não é permitido usar quaisquer versões dos resultados: TAA, Teorema de Liouville, Princípio do Módulo Mínimo ou Princípio do Módulo Máximo.

   Sugestão: Repita a prova do TFA, introduzindo a norma euclidiana e a função exponencial complexa.

   Solução.

   Seja $P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, $z \in \mathbb{C}$, um polinômio complexo e não constante na variável $z \in \mathbb{C}$. Isto é, $a_j \in \mathbb{C}$ se $0 \leq j \leq n$, $n \geq 1$, e $a_n \neq 0$.

   Aplicando a segunda e a primeira desigualdades triangulares, nesta ordem, e também a propriedade $|zw| = |z||w|, \forall z, w \in \mathbb{C}$, obtemos,

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \geq \\ &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - ... - |a_1||z| - |a_0| = \\ &= |z|^n \Big(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - ... - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \Big) \xrightarrow{|z| \to +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

   Logo, existe $R > 0$ tal que

$$|P(z)| > |P(0)|, \text{ se } |z| > R.$$

   Pelo Teorema de Weierstrass, a função contínua $|P(z)|$ restrita ao disco compacto $\overline{D}(0;R)$ assume valor mínimo em um ponto $z_0 \in \overline{D}(0;R)$. Isto é,

$$|P(z)| \geq |P(z_0)|, \text{ se } |z| \leq R.$$

   Então, como $0 \in \overline{D}(0;R)$, temos que

$$|P(0)| \geq |P(z_0)|.$$

   Obtemos então,

$$\begin{cases} |P(z)| \geq |P(z_0)|, & \text{se } |z| \leq R \\ |P(z)| > |P(0)|, & \text{se } |z| > R \\ |P(0)| \geq |P(z_0)|. \end{cases}$$

   Donde segue,

$$|P(z)| \geq |P(z_0)|, \forall z \in \mathbb{C}.$$

A função $p(z) = P(z+z_0)$, $z \in \mathbb{C}$, é um polinômio de grau n, com coeficiente dominante a_n e termo independente $p(0) = P(z_0)$. Escrevemos então,

$$(1) \qquad p(z) = p(0) + z^k Q(z)\,,$$

onde $k \geq 1$, com $k \in \mathbb{N}$, e Q é um polinômio tal que $Q(0) \neq 0$ [notemos que se não existir tal $k \geq 1$ então p (e também P) é constante, contra a hipótese]. Temos $|p(z)| = |P(z+z_0)| \geq |P(z_0)| = |p(0)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Assim, considerando $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, obtemos

$$(2) \qquad |p(re^{i\theta})|^2 \ \geq \ |p(0)|^2\,, \quad \forall r > 0\,, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Pelas equações (1) e (2) obtemos então,

$$|p(0) + r^k e^{ik\theta} Q(re^{i\theta})|^2 \ - \ |p(0)|^2 \ \geq \ 0\,, \quad \forall r > 0\,, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Donde segue,

$$2r^k \mathrm{Re}\Big[\overline{p(0)} e^{ik\theta} Q(re^{i\theta})\Big] \ + \ r^{2k} |Q(re^{i\theta})|^2 \ \geq \ 0\,, \ \forall r > 0\,, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Então, dividindo por r^k obtemos

$$2\mathrm{Re}\Big[\overline{p(0)} e^{ik\theta} Q(re^{i\theta})\Big] \ + \ r^k |Q(re^{i\theta})|^2 \ \geq \ 0\,, \ \forall r > 0\,, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Assim, fixando $\theta \in \mathbb{R}$ e computando o limite para $r \to 0^+$ obtemos, devido à continuidade do polinômio Q,

$$2\mathrm{Re}\Big[\overline{p(0)} Q(0) e^{ik\theta}\Big] \ \geq \ 0\,, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Escrevendo $\overline{p(0)}Q(0) = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\mathrm{Re}\big[(a+bi)e^{ik\theta}\big] \ \geq \ 0\,, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Escolhendo valores de θ tais que $e^{ik\theta}$ assume os valores $\{+1, -1\}$ obtemos $\mathrm{Re}[\pm(a+bi)] = \pm a \geq 0$. Logo, $a = 0$.

Escolhendo valores de θ tais que $e^{ik\theta}$ assume os valores $\{+i, -i\}$ obtemos $\mathrm{Re}[bi(\pm i)] = \mp b \geq 0$. Logo, $b = 0$.

Portanto,

$$\overline{p(0)}Q(0) = 0.$$

Finalmente, como $Q(0) \neq 0$, concluímos que $P(z_0) = p(0) = 0$ ■

4. (a) Enuncie o Teorema de Liouville para funções holomorfas.

   (b) Demonstre o Teorema de Liouville para funções holomorfas, utilizando a Fórmula Integral de Cauchy.

Solução.

(a) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e limitada. Então, f é constante.

(b) Seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy para as Derivadas temos,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \,, \forall r > 0.$$

Logo,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{r^2 e^{i2\theta}} d\theta.$$

Portanto, supondo $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, temos

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} d\theta \right| \leq \frac{M 2\pi}{2\pi r} = \frac{M}{r} \xrightarrow{r \to +\infty} 0.$$

Assim, temos $f'(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Logo, f é constante ■

5. Enuncie e demonstre:

(a) O Princípio do Módulo Máximo para funções holomorfas, utilizando a Fórmula Integral de Cauchy.

(b) O Princípio do Módulo Mínimo para funções holomorfas, utilizando o Princípio do Módulo Máximo para funções holomorfas.

(c) É simples provar o Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios utilizando o Princ. do Máximo para Polinômios? Justifique sua resposta.

Solução.

(a) **Princípio do Módulo Máximo:** Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, holomorfa e não constante, Ω um aberto conexo. Então, $|f|$ não assume um máximo.

Prova. Suponhamos (**por contradição**) que a função $|f|$ assume um máximo em $z_0 \in \Omega$.

Se $f(z_0) = 0$, então temos $|f(z)| \leq 0, \forall z \in \Omega$. Logo, f é constante$\lightning$

Obs 1. Suponhamos $f(z_0) \neq 0$ (este fato será utilizado proximamente).

Então, pela Fórmula Interal de Cauchy, para $0 < r < R$ e com R suficientemente pequeno tal que $\overline{D}(z_0; R) \subset \Omega$ obtemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Logo, como $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)|$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)|.$$

Segue então que

$$\int_0^{2\pi} \left[|f(z_0 + re^{i\theta})| - |f(z_0)| \right] d\theta = 0,$$

sendo o integrando uma função contínua e positiva. Donde concluímos,

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| - |f(z_0)| = 0\,, \ \ \forall r \in [0, R]\,, \ \ \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Assim temos $|f(z)| = |f(z_0)|$, para todo $z \in D(z_0; R)$.

Mostremos que $f(z) = f(z_0)$, $\forall z \in D(z_0; R)$, de duas formas distintas.

1ª Forma (não usual em livros, e via variável complexa).

Fixemos z arbitrário em $D(z_0;R)$. Consideremos $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, com $|h|$ suficientemente pequeno tal que tenhamos $z+h \in D(z_0;R)$ [isto é, $0 < |h| < R - |z - z_0|$].

Então temos,

$$0 = \frac{f(z+h)\overline{f(z+h)} - f(z)\overline{f(z)}}{h} =$$

$$= \frac{f(z+h)\overline{f(z+h)} - f(z+h)\overline{f(z)} + f(z+h)\overline{f(z)} - f(z)\overline{f(z)}}{h} =$$

$$= \frac{\overline{h}}{h} f(z+h)\overline{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}} \;+\; \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\overline{f(z)}.$$

Logo, existe o limite

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\overline{h}}{h} f(z+h)\overline{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}}\right) = -\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\overline{f(z)} = f'(z)\overline{f(z)}.$$

É claro que existe o limite

$$\lim_{h\to 0} f(z+h)\overline{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}} = f(z)\overline{f'(z)}.$$

É também claro que não existe o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}.$$

Deduzimos então que

$$f(z)\overline{f'(z)} = 0.$$

Porém, temos que$|f(z)| = |f(z_0)| \neq 0$. Logo, obtemos

$$f'(z) = 0\,, \quad \text{para todo } z \in D(z_0;R).$$

Assim, f é constante em $D(z_0;R)$. Logo, como f é contínua e Ω é conexo, concluímos que f é constante em Ω.

Vide próxima página para a 2ª forma.

2ª Forma (usual, e via variáveis reais). Decompondo a variável z e a função f em suas partes real e imaginária escrevemos, como usual,

$$\begin{cases} z = x + iy, \quad x = \mathrm{Re}(z) \text{ e } y = \mathrm{Im}(z), \\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u = \mathrm{Re}(f) \text{ e } v = \mathrm{Im}(f) \\ z_0 = x_0 + iy_0 \,. \end{cases}$$

Temos então,

$$\textbf{(2)} \quad u^2(x,y) + v^2(x,y) = |f(x{+}iy)|^2 = |f(z_0)|^2 \,, \ \forall (x,y) \in D\big((x_0,y_0);R\big) \,.$$

Derivando parcialmente **(2)** em relação às variáveis x e y, em um ponto arbitrário $(x,y) \in D\big((x_0,y_0);R\big)$ e utilizando as notações $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $u_x = u_x(x,y)$, $u_y = u_y(x,y)$, $v_x = v_x(x,y)$ e $v_y = v_y(x,y)$ obtemos

$$(S1) \quad \begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 \,. \end{cases}$$

Substituindo as equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, em (S1) obtemos, para cada ponto $(x,y) \in D\big((x_0,y_0);R\big)$, o sistema

$$(S2) \quad \begin{cases} u_x u - u_y v = 0 \\ u_x v + u_y u = 0 \,. \end{cases}$$

Assim, para cada ponto $(x,y) \in D\big((x_0,y_0);R\big)$, o par de números reais $(u_x(x,y), u_y(x,y))$ é uma solução do sistema (S2) acima, cujo determinante é dado por [vide equação **(2)** e **Obs 1**]

$$u^2 + v^2 = |f(z_0)|^2 \neq 0.$$

Assim, o sistema (S2) é determinado e tem solução única e trivial

$$(0,0) = (u_x(x,y), u_y(x,y)) = (v_y(x,y), -v_x(x,y)) \,.$$

Logo [notando que, é fácil verificar, $f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$],

$$f'(x+iy) = u_x + iv_x = 0 + i0 = 0 \,, \quad \text{para cada } (x,y) \in D\big((x_0,y_0);R\big).$$

Consequentemente, a função f é constante em $D(z_0;R)$ e, como Ω é conexo e f é contínua, concluímos que f é constante em Ω↯

Assim, provamos o ítem (a).

Vide próxima página.

(b) **Princípio do Módulo Mínimo:** Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e não constante, com Ω um aberto conexo. Então, $|f|$ não assume mínimo local ou f se anula.

Prova. Se f se anula, nada mais há a fazer.

Suponhamos que f não se anula. Então, a função $\frac{1}{f(z)}$ é também holomorfa e não constante. Pelo Princípio do Módulo Máximo, a função

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| = \frac{1}{|f(z)|}$$

não assume máximo local em Ω. Logo, $|f|$ não assume mínimo local.

(c) Não. Pois, não podemos aplicar o argumento no ítem (b) já que se P é um polinômio não contante então a função $\frac{1}{P}$ não é um polinômio ■

6. Demonstre a Fórmula de Gauss do Valor Médio para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta\,, \qquad \text{se } \overline{D}(z_0;r) \subset \Omega\ .$$

7. (a) Sejam n e m arbitrários em $\mathbb{N}$. Compute, em função de n e m,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta \ .$$

(b) Seja $f(z) = \sum^{+\infty} a_n z^n$ com disco de convergência $D(0;\rho)$, $\rho > 0$.

Verifique a Fórmula de Gutzmer:

$$\sum^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \ .$$

Solução.

(a) Se $n = m$, é claro que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta \ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \ = 1.$$

Se $n \neq m$, é claro que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta \ = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(m-n)\theta}}{i(m-n)}\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1-1}{2\pi i(m-n)} = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta \ = \delta_{mn}\,,$$

onde

$$\delta_{mn} \ = \ \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n\,, \end{cases}$$

é o **delta de Kronecker**.

(b) **1ª Solução (usando teoria de séries).**

Fixemos r, com $0 < r < \rho$. Sabemos que a série $\sum a_n z^n$ converge uniformemente e absolutamente no disco compacto $\overline{D}(0;r)$.

Ainda mais, temos

$$|a_n r^n e^{in\theta}| \leq |a_n| r^n\,, \quad \forall \theta \in [0,2\pi]\,,$$

e $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r^n < \infty$. Logo, pelo Teste-M de Weierstrass segue

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}\,, \quad \forall \theta \in [0,2\pi]\,,$$

sendo a convergência uniforme em $\theta \in [0,2\pi]$.

Multiplicando a identidade acima pela função contínua e limitada $e^{-im\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $m \in \mathbb{N}$, obtemos a série uniformemente convergente

$$f(re^{i\theta})e^{-im\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-m)\theta}, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi].$$

Então, integrando termo a termo obtemos:

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-im\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n 2\pi \delta_{n,m}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-im\theta} d\theta = a_m r^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Agora, multiplicando a série uniformemente convergente

$$\overline{f(re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}, \ \theta \in [0, 2\pi],$$

pela função contínua e limitada $f(re^{i\theta})$, $\theta \in [0, 2\pi]$, obtemos a série uniformemente convergente:

$$|f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(re^{i\theta})\overline{a_n} r^n e^{-in\theta}, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Integrando a série acima termo a termo encontramos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{a_n} r^n e^{-in\theta} d\theta = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n \left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n \big(2\pi a_n r^n \big) = \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.
\end{aligned}$$

Fim da 1ª Solução.

Vide 2ª solução na próxima página.

2ª Solução (usando teoria de somas não ordenadas).

Fixemos r, com $0 < r < \rho$. Sabemos que a série $\sum a_n z^n$ converge uniformemente e absolutamente no disco compacto $\overline{D}(0;r)$.

Valem então as identidades,

$$|f(re^{i\theta}|^2 = f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} = \left(\sum_n a_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\overline{\sum_m a_m r^m e^{im\theta}}\right) =$$

$$= \left(\sum_n a_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_m \overline{a_m} r^m e^{-im\theta}\right) =$$

$$= \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} r^n r^m e^{i(n-m)\theta}.$$

Como a série $\sum a_n r^n$ é absolutamente convergente então o somatório $\sum_{n,m} |a_n||a_m| r^n r^m$ é também convergente. Então, pela desigualdade

$$|a_n \overline{a_m} r^n r^m e^{i(n-m)\theta}| \leq |a_n|\,|a_m|\,r^n r^m\,, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

e pelo Teste-M de Weierstrass segue que

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n,m} a_n \overline{a_m} r^n r^m e^{i(n-m)\theta}\right) d\theta \;=\; \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} r^n r^m \left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta\right) =$$

$$= \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} r^n r^m 2\pi \delta_{n,m} \;=$$

$$= 2\pi \sum_n |a_n|^2 r^{2n}.$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \;=\; 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \;\blacksquare$$

8. Compute 8 (seis) das integrais $\int_\gamma f(z)\,dz$, onde f e γ são dados.

(a) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(c) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(d) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(e) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(f) $f(z) = \pi e^{\pi\overline{z}}$ e γ é o quadrado de vértices 0, 1, $1+i$ e i, positivamente orientado.

(g) $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$.

(h) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$, $n \ge 2$.

(i) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(j) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(k) $f(z) = \frac{\log z}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(l) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $n \ge 1$.

(m) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Respostas e Sugestões:

Respostas:

(a) zero

(b) $2\pi i$

(c) zero

(d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2} i$

(e) zero

(f) ....

(g) $2\pi i$

(h) zero

(i) -2π

(j) $-\frac{2\pi i}{3!}$

(k) zero

(l) $\frac{2[1+(-1)^{n-1}]\pi}{(n-1)!}i$

(m) zero

Sugestões:

(d) Definindo $f(z) = \frac{1}{z+\sqrt{2}}$ temos que f é holomorfa em um aberto contendo a curva γ e a região limitada por γ (o "interior" da curva γ) e que $\sqrt{2}$ pertence a esta região. Logo, pela fórmula integral de Cauchy,

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\sqrt{2}}\,dz \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z^2-2}\,dz = \int_\gamma \frac{\frac{1}{(z+\sqrt{2})}}{z-\sqrt{2}}\,dz = 2\pi f(\sqrt{2})i = 2\pi\frac{1}{2\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i \;\blacksquare$$