DIFUSÃO CULTURAL - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Unidade: IMEUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Verão 2012

1 PROVA

1. Seja $p(x)$ um polinômio de grau 5 e com coeficientes reais. Suponha que os números $-2i$ e $i-\sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Suponha ainda que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se o resto zero e que

$$p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3}) \ .$$

Compute então $p(-1)$.

2. Determine elementarmente (i.e., não utilize a Fórmula de Moivre ou a Fórmula de Euler ou a Forma Polar) as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

$$z^2 = a + ib\,, \quad \text{onde } a \text{ e } b \text{ são reais fixos .}$$

Sugestão: Determine as partes real e imaginária de z.

Prova. Escrevendo $z = x + iy$, com x e y em $\mathbb{R}$, encontramos

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \quad \Longrightarrow \quad 4x^2y^2 = b^2. \end{cases}$$

Assim temos,

$$4x^2(x^2 - a) = b^2\ ,$$

donde segue, $x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$. Portanto,

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Como $a - \sqrt{a^2 + b^2} \leq 0$ (um cateto tem comprimento inferior ao da hipotenusa), seque que a única possibilidade para x^2 é

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Temos então,

$$y^2 = x^2 - a = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Definindo $\mathrm{sgn}(b) = +1$ se $b \geq 0$ e $\mathrm{sgn}(b) = -1$ se $b < 0$ temos

$\mathrm{sgn}(b) = +1 \Longrightarrow xy \geq 0$ (igual sinal) e $\mathrm{sgn}(b) = -1 \Longrightarrow xy < 0$ (sinais contrários).

Assim, as raízes são

$$\pm z = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\ .$$

Note que se $b = 0$ então, já que convenientemente definimos $\mathrm{sgn}(0) = 1$, obtemos

$$\pm z = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2}}{2}} + i\mathrm{sgn}(0)\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2}}{2}} = \sqrt{\frac{|a| + a}{2}} + i\sqrt{\frac{|a| - a}{2}} = \begin{cases} \sqrt{a}\,, & \text{se } a \geq 0\,, \\ \\ i\sqrt{-a}\,, & \text{se } a < 0 \blacksquare \end{cases}$$

3. Considere o polinômio complexo

$$P(z) = z^2 - 2\,,\ \ z \in \mathbb{C}\ .$$

Mostre, sem utilizar radiciação ou Fórmula de Euler, ou Fórmula de Moivre, ou Forma Polar, que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Sugestão: Utilize a norma $|z|_1 = |a| + |b|$, se $z = a + ib$, com a e b números reais. Ainda, siga os passos da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra apresentada em sala. Separemos a prova em partes.

(a) Mostremos que $P(z)\overline{P(z)} \to +\infty$ se $|z|_1 \to +\infty$.

Pelas propriedades

$$\frac{|z|_1|w|_1}{2} \le |zw|_1 \le |z|_1|w|_1 \ \text{ e } \ |\overline{z}|_1 = |z|_1, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C},$$

segue que

$$\begin{aligned} P(z)\overline{P(z)} &= (z^2 - 2)(\overline{z}^2 - 2) = z^2\overline{z}^2 - 2z^2 - 2\overline{z}^2 + 4 \\ &= z^2\overline{z}^2 - 2(z^2 + \overline{z}^2) + 4 = z^2\overline{z}^2 - 4\mathrm{Re}(z^2) + 4 \\ &\ge \frac{|z|_1^4}{2^3} - 4|z^2|_1 + 4 \ge \frac{|z|_1^4}{2^3} - 4|z|_1^2 + 4 \xrightarrow{|z|_1 \to +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

(b) Mostremos que a função positiva $P(z)\overline{P(z)}, z \in \mathbb{C}$, tem mínimo global.

Por (a), existe $R > 0$ tal que $P(z)\overline{P(z)} > P(0)\overline{P(0)} = 4$ se $|z|_1 > R$.

Pelo Teorema de Weierstrass a função $P\overline{P}$ restrita ao disco compacto (disco na norma $|.|_1$) $\overline{D}(0;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z|_1 \le R\}$ assume um valor mínimo em um ponto $z_0 \in \overline{D}(0;R)$. Assim temos,

$$\begin{cases} P(0)\overline{P(0)} & < P(z)\overline{P(z)} \ \text{ se } |z|_1 > R \\ P(z_0)\overline{P(z_0)} & \le P(z)\overline{P(z)} \ \text{ se } |z|_1 \le R \\ P(z_0)\overline{P(z_0)} & < P(0)\overline{P(0)}\,, \ \text{ pois } 0 \in \overline{D}(0;R). \end{cases}$$

Concluímos então que

$$P(z_0)\overline{P(z_0)} \ \le \ P(z)\overline{P(z)}\,, \ \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Vide verso.

(c) Mostremos que $P(z_0) = 0$.

Pelo ítem (b), para todo $z \in \mathbb{C}$ é válida a desigualdade

$$P(z+z_0)\overline{P(z+z_0)} \geq P(z_0)\overline{P(z_0)}.$$

Mas,

$$P(z+z_0) \;=\; (z+z_0)^2 - 2 \;=\; z^2 + 2z_0z + (z_0^2 - 2) \;=\; z^2 + 2z_0z + P(z_0).$$

Assim, para todo $z \in \mathbb{C}$ é válida a desigualdade

$$\left[z(z+2z_0) + P(z_0)\right]\left[\overline{z(z+2z_0)} + \overline{P(z_0)}\right] \;\geq\; P(z_0)\overline{P(z_0)}.$$

Donde segue,

$$z\overline{z}(z+2z_0)\overline{(z+2z_0)} \;+\; 2\mathrm{Re}\left[\overline{P(z_0)}z(z+2z_0)\right] \;\geq\; 0\,,\quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Substituindo $z = r\zeta$, com $r > 0$ e $\zeta \in \mathbb{C}$, obtemos

$$r^2\zeta\overline{\zeta}(r\zeta+2z_0)\overline{(r\zeta+2z_0)} + 2r\mathrm{Re}\left[\overline{P(z_0)}\zeta(r\zeta+2z_0)\right] \;\geq\; 0\,,\quad \forall r > 0 \text{ e } \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Dividindo a inequação acima por r encontramos

$$r\zeta\overline{\zeta}(r\zeta+2z_0)\overline{(r\zeta+2z_0)} + 2\mathrm{Re}\left[\overline{P(z_0)}\zeta(r\zeta+2z_0)\right] \;\geq\; 0\,,\quad \forall r > 0 \text{ e } \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Fixando ζ arbitrário em $\mathbb{C}$ e computando o limite desta última inequação para $r \to 0^+$ obtemos

$$4\mathrm{Re}\left[\overline{P(z_0)}\zeta z_0\right] \;\geq\; 0\,,\quad \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Substituindo os valores $\zeta = \pm 1$ e $\zeta = \pm i$ deduzimos

$$P(z_0)z_0 = 0.$$

Assim, temos $z_0 = 0$ ou $P(z_0) = 0$.

Porém, a origem $w = 0$ não é o ponto de mínimo de $P(z)\overline{P(z)}$ pois

$$P(0)\overline{P(0)} \;=\; 4 \qquad \text{e} \qquad P(1)\overline{P(1)} \;=\; 1 \;<\; 4.$$

Consequentemente, temos $z_0 \neq 0$.

Finalmente, concluímos que

$$P(z_0) \;=\; 0 \;\blacksquare$$

4. (a) Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios e arbitrários em $\mathbb{R}$. Mostre:

$$\sup X + \sup Y = \sup(X + Y) \ ,$$

com a convenção $\sup X = +\infty$ se X não é majorado superiormente. Analogamente, $\sup Y = +\infty$ se Y não é majorado superiormente.

(b) Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n \ .$$

Prova.

(a) Se X é ilimitado superiormente então $X + Y$ também o é e temos $\sup X = \sup(X + Y) = +\infty$ e então a identidade afirmada é válida.

Suponhamos então X e Y limitados superiormente.

(i) Dados arbitrários $x \in X$ e $y \in Y$ é claro que temos

$$x + y \leq \sup X + \sup Y.$$

Segue então que

$$\sup(X + Y) \leq \sup X + \sup Y.$$

(ii) Fixemos $x \in X$, x qualquer. Então temos,

$$y = (x + y) - x \leq \sup(X + Y) - x \, , \text{para todo } y \in Y.$$

Logo,

$$\sup Y \leq \sup(X + Y) - x.$$

Donde segue,

$$x \leq \sup(X + Y) - \sup Y.$$

Como x é arbitrário em X obtemos,

$$\sup X \leq \sup(X + Y) - \sup Y \ .$$

Concluímos então,

$$\sup X + \sup Y \leq \sup(X + Y).$$

Assim, provamos (a).

(b) Sejam,

$$\begin{cases} \limsup(x_n + y_n) & = \gamma \in \mathbb{R}, \\ \limsup x_n & = \alpha \in \mathbb{R}, \\ \limsup y_n & = \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por propriedade do $\limsup$, sabemos que existe uma subsequência $(x_{n_k} + y_{n_k})$, da sequência $(x_n + y_n)$, convergindo a γ:

$$(x_{n_k} + y_{n_k}) \to \gamma.$$

A subsequência (x_{n_k}) é uma sequência limitada e portanto possui uma subsequência convergente $(x_{n_{k_j}})$, a um número menor ou igual a α [pois α é o maior valor de aderência de (x_n)].

Analogamente, a subsequência $(y_{n_{k_j}})$ é uma sequência limitada e portanto possui uma subsequência convergente $(y_{n_{k_{j_l}}})$, a um número menor ou igual a β [pois β é o maior valor de aderência de (y_n)]. .

Ainda, a subsequência $(x_{n_{k_{j_l}}})$ e a sequência convergente $(x_{n_{k_j}})$ convergem ao mesmo número.

Ainda mais, a subsequência $(x_{n_{k_{j_l}}} + y_{n_{k_{j_l}}})$ da sequência convergente $(x_{n_k} + y_{n_k})$ também converge a γ.

Conclusão,

$$\gamma = \lim_{l \to +\infty} (x_{n_{k_{j_l}}} + y_{n_{k_{j_l}}}) = \lim_{l \to +\infty} x_{n_{k_{j_l}}} + \lim_{l \to +\infty} y_{n_{k_{j_l}}} \le \alpha + \beta \quad \blacksquare$$

5. (a) Seja $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ uma função contínua. Suponha ainda que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \ = \ +\infty \ = \ \lim_{x \to +\infty} f(x) \ .$$

Mostre que f assume um valor mínimo absoluto; i.e., existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x)\,, \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

(b) Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, um polinômio complexo de grau n. Mostre que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty \ .$$

Solução.

(a) Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) \ = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, segue que existe $M > 0$ tal que

$$f(x) > f(0) \ \text{ se } \ |x| > M \ .$$

Pelo Teorema de Weierstrass, f restrita ao intervalo compacto $[-M, M]$ assume um valor mínimo em algum $x_0 \in [-M, M]$. Isto é,

$$f(x_0) \ \leq \ f(x)\,, \ \forall x \in [-M, M].$$

Assim temos,

$$\begin{cases} f(0) < f(x)\,, \ \text{se } x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty) \\ f(x_0) \leq f(x)\,, \ \text{se } x \in [-M, M] \\ f(x_0) \leq f(0))\,, \ \text{pois } 0 \in [-M, M]. \end{cases}$$

Donde, se $|x| > M$ temos $f(x) > f(0) \geq f(x_0)$.

Concluímos então,

$$f(x_0) \ \leq \ f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. (a) Enuncie a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para polinômios.
   (b) Enuncie o Princípio do Módulo Máximo para polinômios.
   (c) Mostre que a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para polinômios implica o Princípio do Módulo Máximo para polinômios.

7. (a) Enuncie o Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios.

   (b) Enuncie o Teorema da Aplicação Aberta para Polinômios.

   (c) Mostre que o Teorema da Aplicação Aberta para Polinômios implica o Princípio do Modulo Mínimo para Polinômios.

8. Calcule a soma das séries dadas.

   (a) (0.5) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$.

   (b) (1.0) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$.

   (c) (1.0) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n\,,\ 0 < x < 1$.

   Dica: a série em (c) é uma série de termos positivos.

9. (a) Suponha que a série complexa $\sum^{+\infty} z_n$ converge absolutamente. Mostre que também converge absolutamente a série

$$\sum^{+\infty} z_n^2 \, .$$

(b) Mostre que converge condicionalmente a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2} \right] .$$