FUNÇÕES ANALÍTICAS - MAT5714 - IMEUSP

Segundo Semestre de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Capítulo 5 - SÉRIES DE POTÊNCIAS

5.1 - Sequências de Funções.

5.2 - Séries de Funções.

5.3 - Derivada Complexa.

5.4 - Séries de Potências e Propriedades Operatórias.

5.5 - Apêndice - A Fórmula de Taylor com Resto Integral.

5.6 - Apêndice - A Série Binomial Real via Fórmula de Taylor.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

5.1 - Sequências de Funções

Neste capítulo X indica um subconjunto de $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Seja (f_n), com $f_n : X \to \mathbb{K}$, uma sequência de funções e $f : X \to \mathbb{K}$. Dizemos que (f_n) converge simplesmente a f se $\lim f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Dizemos que (f_n) converge uniformemente a f se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \text{ quaisquer que sejam } n \geq N \text{ e } x \in X.$$

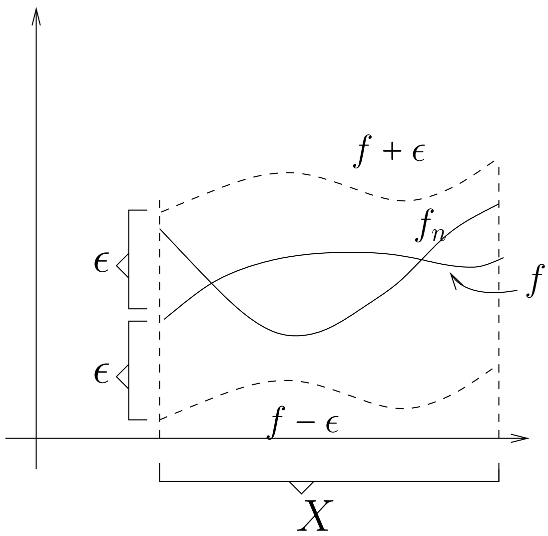

Figura 5.1: Convergência uniforme sobre $X \subset \mathbb{R}$.

Evidentemente, convergência uniforme implica convergência simples.

Consideremos o seguinte exemplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a função contínua

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n\,, & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 1\,, & \text{se } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Temos

$$f(x) = \lim f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 1\,, & \text{se } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

A sequência (f_n) é de funções contínuas mas a função f não é contínua.

Segue um esboço dos gráficos das $f_{n's}$ e de $f(x) = \lim f_n$.

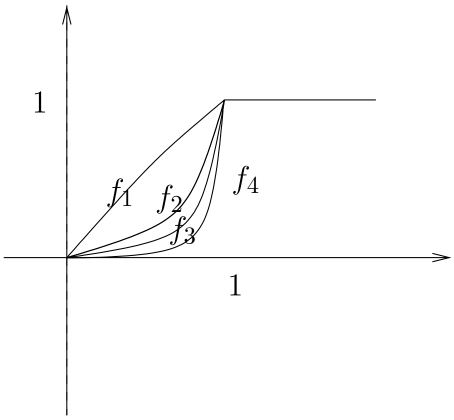

Figura 5.2: Ilustração ao Exemplo acima.

Suponhamos que as sequências de funções (f_n) e (g_n) [definidas em X] convergem uniformemente às funções f e g, e $\lambda \in \mathbb{K}$. Valem as propriedades abaixo.

- $(f_n + g_n)$ e (λf_n) convergem uniformente a $f + g$ e λf, respectivamente.
- Se f e g são limitadas então $(f_n g_n)$ converge uniformemente a fg.

5.1 Teorema. *Seja (f_n) uma sequência de funções, definidas em X, contínuas em x_0 e convergindo uniformemente a $f : X \to \mathbb{K}$. Então, f é contínua em x_0.*

Prova. Seja $\epsilon > 0$.

Existe N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ se $n \ge N$ e $x \in X$. Como f_N é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B(x_0;\delta) \cap X$ então $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$ e

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)| < \epsilon+\epsilon+\epsilon \clubsuit$$

5.2 Teorema. *Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas em $[a,b] \subset \mathbb{R}$, a valores reais e convergindo uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então temos*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Prova. Seja $\epsilon > 0$.

Pelo Teorema 5.1, a função f é contínua e integrável. Por hipótese, existe N tal que, se $n \geq N$ então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$. Dado $n \geq N$ temos

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b \epsilon\, dx = \epsilon(b-a)\clubsuit$$

Vejamos que a hipótese "convergência uniforme" no Teorema 5.2 é necessária.

5.3 Exemplo. *Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a sequência de funções*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \textit{se } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right], \\ 2n - 2n^2x & \textit{se } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \textit{se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

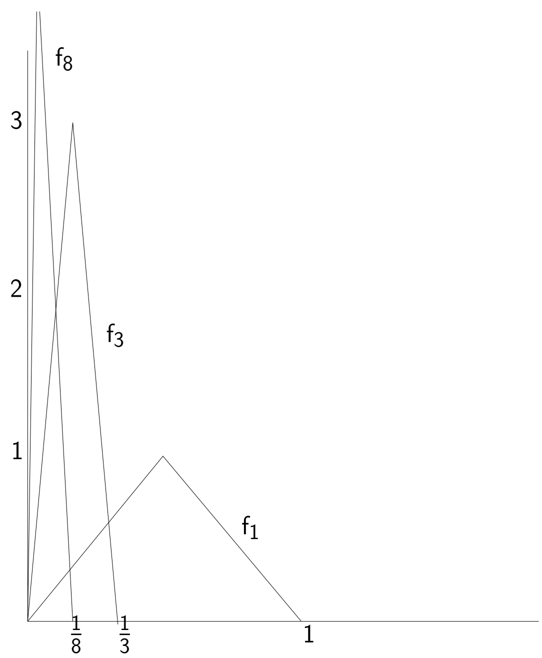

Figura 5.3: Ilustração ao Exemplo 5.3

Vide figura acima. Temos $\lim f_n(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$. Computando áreas de triângulos é fácil verificar que

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

5.4 Critério de Cauchy para Sequências de Funções. *A sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{K}$ converge uniformemente a alguma função $f : X \to \mathbb{K}$ se e só se para todo $\epsilon > 0$ existe N em $\mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \text{ para quaisquer } n, m \geq N \text{ e } x \in X.$$

Prova.

($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$ e $x \in X$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ e $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$. Logo, $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$.

($\Leftarrow$) Dado $x \in X$, a sequência $\big(f_n(x)\big)$ é de Cauchy e converge. Seja

$$f(x) = \lim f_n(x).$$

Dado $\epsilon > 0$, seja N tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, para todos $n \geq N$, $m \geq N$, e $x \in X$. Para $m \to +\infty$, obtemos $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ para todos $n > N$ e $x \in X$♣

5.2 - Séries de Funções

Dada (f_n) uma sequência de funções em X e a valores em $\mathbb{K}$, o símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

denota a série de funções cujas somas parciais são as funções

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n.$$

Esta série de funções converge, em seu domínio X, para uma função $s : X \to \mathbb{K}$ se temos $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x)$, para cada x em X.

A função

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x),$$

definida nos pontos em que tal série numérica converge, é a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

A série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente à função $s : X \to \mathbb{K}$ se a sequência (s_n) de suas somas parciais converge uniformemente a $s : X \to \mathbb{K}$.

5.5 Teorema. *Seja* $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, *com* $x \in [a,b]$, *uma série uniformemente convergente de funções reais e contínuas. Então,* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua e*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Prova. Trivial, pelos teoremas 5.1 e 5.2♣

5.6 Critério de Cauchy para Séries de Funções. *A série de funções* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, *definidas em* X *e a valores em* $\mathbb{K}$, *converge uniformemente à função*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

se e somente se para todo $\epsilon > 0$ *existir* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \epsilon\,, \quad \textit{quaisquer que sejam } n \geq N,\, p \in \mathbb{N} \textit{ e } x \in X.$$

Prova.

Basta aplicar o critério de Cauchy 5.4 à sequência de funções $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. De fato, vale a identidade $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| = |s_{n+p}(x) - s_n(x)|$♣

5.7 Teorema (Teste M de Weierstrass). *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *uma série de funções, de* X *em* $\mathbb{K}$, *e uma sequência numérica de majorantes* (M_n) *satisfazendo*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \ \textit{para todos } n \in \mathbb{N} \textit{ e } x \in X, \ \textit{com } \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < \infty.$$

Então, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente em* X *e à função*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Prova. Seja x arbitrário em X.

Pelo critério de Cauchy para séries numéricas, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} < \epsilon$, se $n > N$ e $p \in \mathbb{N}$. A sequência $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ satisfaz

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon, \text{ se } n > m > N.$$

Logo, $(s_n(x))$ converge. Impondo $n \to +\infty$ segue $|s(x) - s_m(x)| \leq \epsilon$ para todo $m > N$♣

5.3 - Derivada Complexa

A derivada complexa é o limite de quocientes de Newton, como no caso real. Nestas notas, Ω é um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dada na variável complexa z. Por vezes, z indica um ponto em Ω.

5.8 Definição. *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é* derivável *(*diferenciável*,* $\mathbb{C}$-derivável*,* $\mathbb{C}$-diferenciável*,* derivável-complexa *ou* diferenciável-complexa*) em $z \in \Omega$ se existe*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Tal limite, se existir, é a derivada de f em z *e é denotado por $f'(z)$. Se a função f é derivável em todo ponto de Ω, dizemos que f é* holomorfa.

Analogamente ao caso real a função $f(z) = z^2$, para $z \in \mathbb{C}$, é derivável em todo ponto e $f'(z) = 2z$. Entretanto a função $g(z) = \overline{z}$, para $z \in \mathbb{C}$, não é derivável em nenhum z_0. No ponto $z = 0$, os quocientes $\frac{\overline{h}}{h}$, com $h \neq 0$, não tendem a um número se $h \to 0$, o que é óbvio escolhendo $h = x \neq 0$ e $h = iy$, $y \neq 0$. Se $z \neq 0$ a explicação é similar.

5.9 Proposição. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivável em $z \in \Omega$. Então, f é contínua em z.*

Prova.

Segue de

$$\lim_{w \to z} [f(w) - f(z)] = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}(w - z) = f'(z)0 = 0 \clubsuit$$

Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deriváveis no ponto z. Similarmente ao caso real, as funções $f + g$, fg, λf [com $\lambda \in \mathbb{C}$] e f/g [com $g(z) \neq 0$] são deriváveis em z e satisfazem

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z), \qquad (\lambda f)'(z) = \lambda f'(z),$$

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad \text{e} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

5.10 Proposição (Regra da Cadeia). *Sejam $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ e $f : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ com Ω_1 e Ω_2 abertos em $\mathbb{C}$. Se g é derivável no ponto z e f é derivável em $g(z)$, então $f \circ g$ é derivável em z e*

$$(f \circ g)'(z) = f'\big(g(z)\big)g'(z).$$

Prova.

Para w em $\Omega_1 \setminus \{z\}$, seja $N(w)$ o quociente de Newton

$$\frac{f(g(w)) - f(g(z))}{w - z} = \begin{cases} \frac{f(g(w))-f(g(z))}{g(w)-g(z)} \frac{g(w)-g(z)}{w-z}, & \text{se } g(w) - g(z) \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja (w_n) uma sequência em $\Omega_1 \setminus \{z\}$ e convergente a z.

- ⋄ Suponhamos $g(w_n) = g(z)$ para todo n. Então, temos $N(w_n) = 0$ para todo n e, é trivial ver, $g'(z) = 0$. Logo, $N(w_n) \to f'(g(z))g'(z)$.
- ⋄ Suponhamos $g(w_n) \neq g(z)$ para todo n. Então, pela continuidade de g segue que $N(w_n) \to f'(g(z))g'(z)$♣

Apesar que não usaremos até o capítulo 6 o resultado abaixo, é reconfortante demonstrá-lo aqui . Identifiquemos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ e este com o espaço das matrizes-colunas $M_{2\times1}(\mathbb{R})$. A transposta de uma matriz A é a matriz A^T. Dados dois números complexos $a + ib$ e $h + ik$, com a, b, h e k números reais, temos

$$(a + ib)(h + ik) \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Seja $z = x + iy$, com x e y em $\mathbb{R}$, a variável complexa. Dada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, escrevemos f em termos de suas partes real e imaginária,

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Consideremos a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (chamado campo vetorial associado a f),

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

5.11 Teorema. *A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é complexa-derivável no ponto $z = x + iy$ se e somente se o campo associado $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é real-diferenciável no ponto $(x, y)^T$ e satisfaz, neste ponto, as* equações de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \ \text{ e } \ u_y = -v_x.$$

Prova.

Sejam $w = h + ik$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\zeta = a + ib$ em $\mathbb{C}$, ambos arbitrários. Temos

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z) - \zeta w}{w} = 0 \iff \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z) - \zeta w}{|w|} = 0.$$

Então, com as identificações já citadas, o teorema segue da identidade

$$\frac{f(z+w) - f(z) - \zeta w}{|w|} \equiv \frac{F\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \clubsuit$$

Interpretação para as equações de Cauchy-Riemann. Destaquemos a identidade $-b + ai = i(a + bi)$. Desta forma, na matriz jacobiana de F, o vetor segunda coluna é obtido girando por 90 graus, no sentido anti-horário, o vetor primeira coluna.

5.4 - Séries de Potências e Propriedades Operatórias

Dada uma sequência $(a_n) \subset \mathbb{C}$ e um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, a série de funções complexas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \text{ na variável } z \in \mathbb{C},$$

é a série de potências com coeficientes (a_n), centrada em z_0, ou em torno de z_0. Tal série de potências é convergente (divergente) no ponto w se a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (w - z_0)^n$ é convergente (divergente).

Com a translação $w = z - z_0$ passamos da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ para a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n.$$

Desta forma, simplificamos a exposição supondo a série centrada em $z_0 = 0$.

Dadas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ convergentes no ponto z em $\mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{e} \quad \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n.$$

5.12 Teorema (Abel). *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *uma série de potências e*

(Fórmula de Hadamard) $$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

com $\rho = +\infty$ *se* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *e* $\rho = 0$ *se* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$.

(a) *Se* $|z| < \rho$ *a série converge absolutamente.*

(b) *Se* $|z| > \rho$ *a série diverge.*

(c) *A série converge absolutamente e uniformemente em* $D(0;r)$*, se* $0 < r < \rho$. *Ainda mais,* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *é contínua em* $B(0;\rho)$*, se* $\rho > 0$.

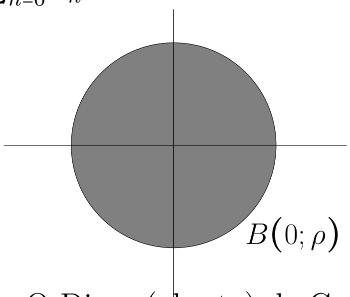

Figura 5.4: O Disco (aberto) de Convergência.

Prova.

(a) e (b). Seguem do teste da raíz e de $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

(c) A primeira afirmação segue de (a) e do Teste-M, pois $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$, se $z \in D(0;r)$, e $\sum |a_n| r^n < \infty$.

A segunda afirmação segue do Teorema 5.1 (o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua)♣

Seja (a_n) em $\mathbb{C}^*$, com

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0, \infty].$$

Se $z \neq 0$ então

$$\lim \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| L.$$

Pelo teste da razão, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge se $|z|L < 1$ e diverge se $|z|L > 1$.

Pelo teorema de Abel (e sua notação) segue

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{L}.$$

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, o valor

$$\rho \in [0, +\infty] \ \text{ (dado na fórmula de Hadamard)}$$

é seu raio de convergência (da série de potências) e a bola aberta

$$B(0;\rho), \ \text{ se } \rho > 0,$$

é seu disco (aberto) de convergência. Se $\rho = 0$, temos o disco degenerado $\{0\}$.

Se $\rho > 0$ e z pertence a $B(0;\rho)$, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolutamente e a sequência $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é somável. É lícito então indicarmos $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ por

$$\sum a_n z^n.$$

Comentário (Unicidade dos coeficientes de uma série de potências complexa). *Supondo $r > 0$ e*

$$\sum a_n z^n = 0 \ \textit{para todo } z \in B(0;r),$$

então temos $a_n = 0$ para todo n. De fato, substituindo $z = 0$ obtemos $a_0 = 0$ e

$$z(a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots) = 0 \text{ para todo } z \in B(0;r) \smallsetminus \{0\}.$$

Logo, por continuidade segue

$$a_1 + a_2 z + a_3 z^2 \cdots = 0 \text{ se } |z| < r \text{ e } a_1 = 0.$$

Então, por indução concluímos que $a_n = 0$ para todo n.

Dessa forma, supondo $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$, para todo $z \in B(0;r)$, onde $r > 0$, obtemos as identidades $a_n = b_n$ para todo n.

Com uma argumentação análoga, é bastante trivial concluir que também vale a **unicidade dos coeficientes de uma séries de potências real**.

A seguir, mostremos que toda série de potências é desenvolvível como uma série de potências em torno de cada ponto no disco de convergência. Destacamos que tal fato não é óbvio.

5.13 Propriedade da Translação. *Seja* $f(z) = \sum a_n z^n$*, com raio de convergência* $\rho > 0$*. Fixado* $z_0 \in B(0;\rho)$*, existe uma sequência* (b_n) *em* $\mathbb{C}$ *tal que*

$$f(z) = \sum b_n (z - z_0)^n, \ \textit{para todo } z \in B(z_0; \rho - |z_0|).$$

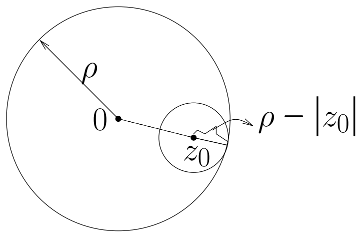

Figura 5.5: Propriedade da Translação.

Prova. Seja z tal que $|z_0| + |z - z_0| < \rho$.

Como a série de potências dada converge absolutamente em $B(0;\rho)$, segue que são iguais e finitos os valores das somas não ordenadas

$$\sum_n |a_n|\big(\,|z_0| + |z - z_0|\,\big)^n = \sum_n \sum_{0 \leq p \leq n} |a_n| \binom{n}{p} |z_0|^{n-p} \, |z - z_0|^p.$$

Pela associatividade para somas não ordenadas seguem as identidades

$$\sum_n \sum_{0 \leq p \leq n} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p} \, (z - z_0)^p = \begin{cases} \sum\limits_n a_n (z_0 + z - z_0)^n = \sum\limits_n a_n z^n = f(z) \\[2ex] \sum\limits_{p \geq 0} \left[\sum\limits_{n \geq p} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p} \right] (z - z_0)^p \ \clubsuit \end{cases}$$

5.14 Propriedade do Produto. *Sejam* $\sum a_n z^n$ *e* $\sum b_n z^n$ *convergentes em* $B(0;r)$*, com* $r > 0$*. Então temos*

$$\Big(\sum a_n z^n\Big)\Big(\sum b_n z^n\Big) = \sum c_n z^n, \ \forall z \in B(0;r), \ \textit{com } \ c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k\,, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prova. Seja $z \in B(0;r)$.

É fácil ver que [particione $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times \mathbb{N}$ e use a lei associativa]

$$\sum_{n,m} |a_n z^n b_m z^m| = \Big(\sum_n |a_n z^n|\Big) \Big(\sum_m |b_m z^m|\Big) < \infty.$$

Assim, pela associatividade para somas não ordenadas,

$$\sum_{n,m} a_n z^n b_m z^m = \begin{cases} \left(\sum\limits_n a_n z^n\right)\left(\sum\limits_m b_m z^m\right) \\[2ex] \sum\limits_n \left(\sum\limits_{j+k=n} a_j b_k \right) z^n \ \clubsuit \end{cases}$$

5.15 Propriedade da Composição. *Sejam* $g(z) = \sum a_n z^n$ *e* $f(z) = \sum b_m z^m$, *ambas convergentes em* $B(0;R)$, *com* $R > 0$. *Se* $f(0) \in B(0;R)$, *então existem uma sequência complexa* (c_m) *e* $r > 0$ *tais que*

$$g(f(z)) = \sum c_m z^m, \text{ para todo } z \in B(0;r).$$

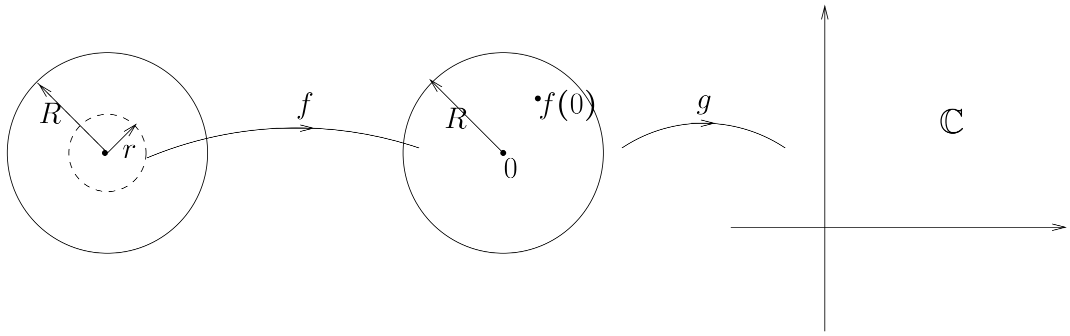

Figura 5.6: Propriedade da composição.

Prova.

Por hipótese, $|b_0| = |f(0)| < R$.

Por continuidade existe $0 < r < R$, tal que $\sum |b_m||z|^m < R$ se $|z| < r$. Dado um tal ponto z, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum |b_m||z|^m\right)^n$$

converge absolutamente.

Segue então que [vide propriedade para o produto (5.14)]

$$\infty > \sum_n |a_n| \Big(\sum_m |b_m||z|^m \Big)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \sum_{m_1 \in \mathbb{N}, \ldots, m_n \in \mathbb{N}} |b_{m_1}||z|^{m_1} \ldots |b_{m_n}||z|^{m_n}.$$

A associatividade para somas não ordenadas garante

$$\sum_n a_n \sum_{m_1, \ldots, m_n} b_{m_1} z^{m_1} \ldots b_{m_n} z^{m_n} = \begin{cases} \sum\limits_n a_n \Big(\sum\limits_m b_m z^m \Big)^n = g\big(f(z)\big) \\ \\ \sum\limits_m \Big(\sum\limits_n a_n \sum\limits_{m_1 + \cdots + m_n = m} b_{m_1} \ldots b_{m_n} \Big) z^m \clubsuit \end{cases}$$

5.16 Propriedade do Inverso Algébrico. *Seja*

$$f(z) = \sum a_n z^n, \;\; \textit{onde } z \in B(0;r) \textit{ e } r > 0, \;\; \textit{e tal que } a_0 \neq 0.$$

Então, existem $\delta > 0$ *e uma sequência complexa* (b_n) *para os quais vale a expansão*

$$\frac{1}{f(z)} = \sum b_n z^n \quad \textit{para todo } z \in B(0;\delta).$$

Prova.

Podemos supor $a_0 = 1$ [cheque]. Então, as funções

$$1 - f(z) = \sum_{n \geq 1} (-a_n) z^n \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$$

estão definidas em torno de $z = 0$ e temos $1 - f(0) = 0$. Pela propriedade de composição (5.15), existe um raio $\delta > 0$ tal que

$$g(1 - f(z)) = \frac{1}{1 - [1 - f(z)]} = \frac{1}{f(z)}$$

é dada por uma série de potências centrada na origem e convergente na bola aberta $B(0;\delta)$♣

5.17 Teorema (Derivação). *As séries de potências*

$$f(z) = \sum a_n z^n \quad \textit{e} \quad g(z) = \sum n a_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$$

tem mesmo raio de convergência ρ. *Se* $\rho > 0$, *temos*

$$f'(z) = g(z), \;\; \textit{para todo } z \in B(0;\rho).$$

Prova.

◇ Temos $\sqrt[n]{n} \to 1$ e $\limsup \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Logo, $\sum n a_n z^n$ e $\sum a_n z^n$ tem mesmo raio de convergência. Ainda, $\sum n a_n z^n$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ converge. Logo, os raios de convergência das três coincidem.

◇ Suponhamos $\rho > 0$. Fixemos $R > 0$ e z tais que $|z| < R < \rho$. Seja $h \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |h| < r = R - |z|$.

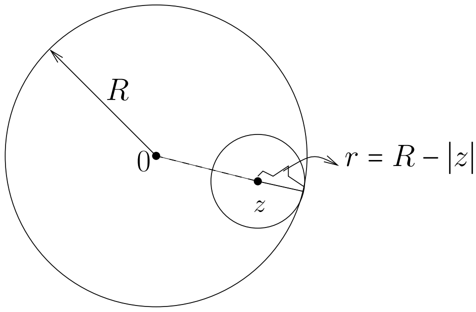

Figura 5.7: Ilustração ao teorema da Derivação, com $R < \rho$.

Para $n \geq 2$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} + h\sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p}h^{p-2} \\ \text{e} \\ \left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} |z|^{n-p}\, r^p \leq \frac{|h|}{r^2} R^n. \end{cases}$$

Notemos que $|z+h| < R < \rho$. Por fim,

$$\left| \sum a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum n a_n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum |a_n| R^n \xrightarrow{h \to 0} 0 ♣$$

5.18 Corolário. *Seja* $f(z) = \sum a_n z^n$ *com raio de convergência* $\rho > 0$*. Então,* f *é infinitamente derivável no seu disco de convergência e*

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Prova.

Pelo teorema da derivação, f é infinitamente derivável e

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n z^{n-k} = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}.$$

Substituindo $z = 0$ encontramos $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$. Logo,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} ♣$$

É claro que o corolário (5.18) acima fornece uma segunda prova da Unicidade dos coeficientes de uma série de potências. Veja também o comentário que acompanha o Teorema de Abel (5.12)].

Consideremos uma série de potências com disco de convergência $B(0;\rho)$, com $\rho > 0$, e um ponto a neste disco. Pela propriedade da translação (5.13) e o corolário 5.18 obtemos a série de Taylor de f em torno de a [ou centrada em a]:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \text{ para todo } z \in B(a;\rho-|a|).$$

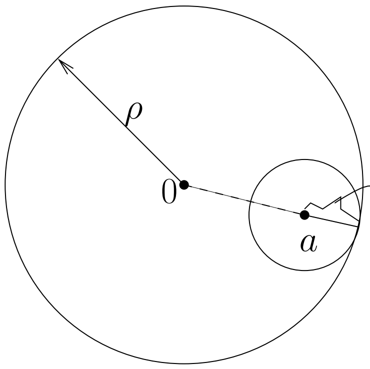

Figura 5.8: Ilustração para a série de Taylor.

A seguir, abordaremos a série binomial complexa para expoente

$$\frac{1}{p}, \text{ onde } p \in \{1,2,3,\ldots\}.$$

Inicialmente, generalizemos o usual conceito de coeficiente binomial definido para dois números naturais n e m, com $m \geq n$,

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}, \text{ onde } \binom{m}{0} = 1 \text{ e } 0! = 1.$$

Dados $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \text{ com } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Para um tal α temos a convergência absoluta da série de potências complexa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad \text{onde } |z| < 1.$$

Pois, pelo teste da razão,

$$\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)z^n} \right| = \left| \frac{(\alpha-n)z}{n+1} \right| \xrightarrow{n\to+\infty} |z| \text{ e } |z| < 1.$$

5.19 Teorema Binomial.

(A) Dado α em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, temos

$$(1+x)^{\alpha} = \sum \binom{\alpha}{n} x^n, \ \ \textit{para todo } x \in (-1,1).$$

(B) Dado p em $\{1,2,\ldots,\}$, a série de potências

$$B(z) = \sum \binom{1/p}{n} z^n$$

satisfaz $B(z)^p = 1+z$, para todo $z \in B(0;1)$, e $B(0) = 1$.

Prova.

(A) Seja

$$f(x) = \sum \binom{\alpha}{n} x^n, \ \text{onde } x \in (-1,1).$$

Pelo Teorema 5.17 (derivação),

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= \sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right] x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \left[(\alpha - n)\binom{\alpha}{n} + n\binom{\alpha}{n}\right] x^n \\ &= \alpha f(x).\end{aligned}$$

Donde segue

$$\frac{d[(1+x)^{-\alpha} f(x)]}{dx} = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} f(x) + (1+x)^{-\alpha} f'(x) = 0 \ \text{ e}$$

$$(1+x)^{-\alpha} f(x) = f(0) = \binom{\alpha}{0} = 1.$$

(B) Seja $b_n = \binom{1/p}{n}$, onde $n = 0,1,2,\ldots$. Pela propriedade para o produto (5.13), temos

$$\left(\sum b_n z^n\right)^p = \sum c_n z^n, \ \text{para todo } |z| < 1,$$

com a sequência (c_n) em $\mathbb{R}$. Pela primeira parte segue

$$\sum c_n x^n = 1 + x \ \text{para todo } x \in (-1,1).$$

Pela unicidade dos coeficientes (para série de potências tem coeficientes reais - vide comentários ao Teorema 5.12 de Abel) temos

$$c_0 = c_1 = 1 \ \text{ e } c_n = 0 \ \text{ se } \ n \geq 2 \clubsuit$$

5.20 Teorema (Inversão). *Seja $f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$, com $a_1 \neq 0$, convergente em alguma vizinhança da origem. Então, existe uma série de potências $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ tal que para todo z em alguma vizinhança da origem temos*

$$f(g(z)) = z \quad e \quad g(f(z)) = z.$$

Prova. Enfatizemos que $a_1 \neq 0$. Dividamos a prova em duas partes.

◇ Procuremos $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$, com raio de convergência não nulo, tal que $f(g(z)) = z$ (i.e., g é uma inversa à direita de f). Caso tal série exista, temos

$$a_1 g(z) - a_2 g(z)^2 - a_3 g(z)^3 - \cdots = z = z + 0z^2 + 0z^3 + \cdots$$

Donde, pela propriedade 5.15 (composição) e a unicidade dos coeficientes,

$$a_1 b_1 = 1, a_1 b_2 - a_2 b_1^2 = 0,\ a_1 b_3 - 2a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1^3 = 0, \ldots$$

$$\ldots, a_1 b_n - P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = 0,$$

com P_n um polinômio com coeficientes em $\mathbb{N}$ (logo, positivos). Devido a tais equações (onde $a_1 \neq 0$), os coeficientes $b_1, b_2, b_3 \ldots$ estão determinados!

Resta provarmos que o raio de convergência de $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ é não nulo. Podemos assumir $a_1 = 1$ [por favor, cheque]. Então, $b_1 = 1$. Sejam

$$a_1^* = 1 \quad \text{e} \quad f^*(z) = z - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n^* z^n \qquad [\text{logo, } f^*(0) = 0]$$

uma série de potências "majorante" (a escolher) com $|a_n| \leq a_n^*$ para todo n. Sejam

$$c_1 = 1 \quad \text{e} \quad \varphi(z) = z + \sum c_n z^n \qquad [\text{logo, } \varphi(0) = 0]$$

a série de potências que formalmente é a inversa à direita de $f^*(z)$. Temos

$$c_n - P_n(a_2^*, \ldots, a_n^*, c_1, \ldots, c_{n-1}) = 0$$

onde P_n é o polinômio já descrito. Por indução segue $c_n \geq 0$ para todo n. Também temos $|b_1| = 1 \leq 1 = |c_1|$ e então, por indução em n,

$$|b_n| = |P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1})| \leq P_n(a_2^*, \ldots, a_n^*, c_1, \ldots, c_{n-1}) = c_n.$$

A seguir, escolhemos f^* (convergente, trivial e com inversa φ convergente).

- *Existe $m > 0$ com $|a_n| \le m^n$, para todo n (pois, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$).*

Escolhendo $a_n^* = m^n$, definimos a série convergente (numa vizinhança de 0)

$$f^*(z) = z - \sum_{n=2}^{+\infty} m^n z^n = z - \frac{m^2 z^2}{1 - mz}.$$

Por definição, a série de potências $\varphi(z)$ é tal que $f^*(\varphi(z)) = z$. Logo,

$$\begin{cases} \varphi(z) - \frac{m^2\varphi(z)^2}{1-m\varphi(z)} = z \\ \text{e} \\ \varphi(z) = \frac{1+mz-[1+m^2z^2-(4m^2+2m)z]^{\frac{1}{2}}}{2(m^2+m)}, \text{ com } \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

O teorema binomial e a propriedade de composição expressam $\varphi(z)$ como uma série de potências com raio de convergência não nulo. Donde,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$$

tem raio de convergência não nulo.

Por construção, temos $f(g(z)) = z$ em uma vizinhança da origem.

◇ Da mesma forma, existe uma série de potências $h(z)$ [uma inversa à direita de g] satisfazendo $g(h(z)) = z$ em uma vizinhança de 0. Logo,

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= g\{f[g(h(z))]\} \\ &= g[(f \circ g)(h(z))] \\ &= g(h(z)) \\ &= z \clubsuit \end{aligned}$$

5.5 - Apêndice - A Fórmula de Taylor com Resto Integral.

Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, com $\varphi^{(n+1)}$ integrável. Integrando por partes temos

$$
\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \int_0^1 1.\varphi'(t)dt \\
&= t\varphi'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \varphi'(1) - \varphi'(0) \ - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi''(t)dt - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt \qquad \text{(substitua } u' = 1-t \text{ e } v = \varphi''\text{)} \\
&= \varphi'(0) \ - \ \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)\Big|_0^1 \ + \ \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt \qquad \left(\text{pomos } u' = \frac{(1-t)^2}{2} \text{ e } v = \varphi'''\right) \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2} \ - \ \frac{(1-t)^3}{6}\varphi^{(3)}(t)\Big|_0^1 \ + \ \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{6}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \ + \ \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&\ \vdots \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \ + \ \cdots \ + \ \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \ + \ \int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt \ .
\end{aligned}
$$

A seguir, provemos a Fórmula de Taylor. Vale a pena observar que tal fórmula generaliza o Teorema do Valor Médio (TVM).

5.21 Teorema (Fórmula de Taylor com Resto Integral). *Consideremos uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada $f^{(n+1)}$ integrável. Dado $x \in [a,b]$, temos*

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Prova.

Seja $\varphi(t) = f\big(a + t(x-a)\big)$, com $t \in [0,1]$. Então,

$$\begin{cases} \varphi(0) = f(a) \text{ e } \varphi(1) = f(x), \\[2ex] \varphi'(t) = f'\big(a + t(x-a)\big)(x-a), \\[2ex] \varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}\big(a + t(x-a)\big)(x-a)^k, \text{ para } 0 \le k \le n+1, \\[2ex] \varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)(x-a)^k, \text{ para } 0 \le k \le n+1. \end{cases}$$

Também temos

$$\int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt = \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}\big(a + t(x-a)\big)(x-a)^{n+1}}{n!}(1-t)^n\, dt =$$

$\Big[$efetuando a troca de variável: $y = a + t(x-a)$, com $\frac{dy}{dt} = (x-a)$ e $t = \frac{y-a}{x-a}\Big]$

$$= \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)(x-a)^{n+1}}{n!}\left(1 - \frac{y-a}{x-a}\right)^n \frac{dy}{x-a}$$

$$= \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy \clubsuit$$

5.6 - Apêndice - A Série Binomial Real via Fórmula de Taylor

5.22 Teorema Binomial. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Então temos,*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \text{ para todo } x \in (-1,1).$$

Prova.

A função $f(x) = (1+x)^\alpha$ satisfaz

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(k-1)](1+x)^{\alpha-n}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Temos $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]$, para $n \geq 1$, e $f^{(0)}(0) = 1$. Donde segue

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

A fórmula de Taylor com resto integral fornece

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n + R_N(x), \quad \text{com } R_N(x) = \int_0^x \frac{f^{(N+1)}(t)}{N!}(x-t)^N\, dt \text{ e } x \in (-1,1).$$

Fixemos $x \in (-1,1)$. Provemos que $R_N(x) \to 0$ se $N \to +\infty$.

Notemos que

$$\begin{cases} \frac{f^{(N+1)}(t)}{N!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-N)}{N!}(1+t)^{\alpha-N-1} = \alpha\binom{\alpha-1}{N}(1+t)^{\alpha-N-1}, \\ \\ R_N(x) = \alpha\binom{\alpha-1}{N}\int_0^x (1+t)^{\alpha-N-1}(x-t)^N\, dt. \end{cases}$$

Analisemos o valor absoluto do integrando $\left|(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^N\right|$.

Dado t entre 0 e x, com x positivo ou não, $1+t$ está entre 1 e $1+x>0$. Logo,

$$0 < (1+t)^{\alpha-1} \leq C = C(x) = \max\left(1, (1+x)^{\alpha-1}\right).$$

No caso $x>0$ temos $t \geq 0$ e então $0 \leq \frac{x-t}{1+t} \leq \frac{x}{1+t} \leq x$. Se $x<0$, temos $-x = |x|$ e

$$0 \leq \frac{t-x}{1+t} \leq \frac{t|x|+|x|}{1+t} = |x|.$$

Resumindo, obtemos

$$\left|(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^N\right| \leq C|x|^N, \text{ para todo } t \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Donde segue

$$|R_N(x)| \leq C\left|\alpha\binom{\alpha-1}{N}\right||x|^{N+1}.$$

A série $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n$ converge, e seu termo geral tende a 0. Logo, $\lim R_N(x) = 0$♣