PICME/IME/USP COMBINATÓRIA/PROBABILIDADE

YOSHIHARU KOHAYAKAWA E MIGUEL ABADI

1. Projetos para 2011

Para entender melhor sobre alguns dos tópicos listados abaixo e ver as definições necessárias, veja as notas de aula do programa, que podem ser encontradas na página do programa de combinatória do PICME no IME/USP: `http://www.ime.usp.br/~mota/PICME/combinatoria/`. A seguir são apresentados oito tópicos de pesquisa.

1.1. **Convergência de T_n.** Sabemos que T_n/n converge para 1 quando n tende a infinito. Mas temos $T_n(w) = 1$ quando $w = (1^n)$. Logo, $T_n(w)/n$ converge para zero. A proposta é refinar o conceito de limite, estudando o sentido de limite em probabilidade e em quase-certeza. Outro ponto interessante é estudar o crescimento assintótico de T_n, isto é, construir T_{n+1} a partir de T_n e observar os possíveis limites de T_n/n.

É possível provar que $\lim_{n\to\infty} T_n/n$ para casos mais gerais de duas formas diferentes:

i) Usando o conceito de complexidade de Kolmogorov–Afraimovich–Saussol–Vaienti.
ii) Usando os teoremas de Shannon–McMillan–Breiman e Saussol–Troubetzkoy–Vaienti.

Bibliografia básica: [5, 6, 9]

1.2. **Limitantes para $\Pr(S_n = 0)$ e $\lim_{n\to\infty}\Pr(S_n = 0)$.** Existem expressões explícitas para $\Pr(S_n = 0)$ e $\lim_{n\to\infty}\Pr(S_n = 0)$, que representam, respectivamente, a proporção de sequências de tamanho n sem qualquer sobreposição e a mesma proporção limite. Quando $p = 1/2$, vimos a relação entre estas quantidades e a decomposição em primos de cada um dos números naturais. Propomos encontrar limitantes inferiores e superiores para estas proporções. O mesmo pode ser feito para a esperança de S_n e a esperança limite. Estes valores se apresentam como novos quantificadores da complexidade de uma sequência, não analizados antes na literatura.

1.3. **Jogos sobre sequências.** Consideramos agora dois tipos de jogos, onde estamos considerando sequências de tamanho cinco.

Jogo 1: Uma moeda honesta é lançada cinco vezes, de modo que a sequência que aparecer é a vencedora. Caso não apareça nenhuma das sequências, a moeda é lançada mais cinco vezes e assim por diante.

Jogo 2: Uma moeda honesta é lançada seis vezes, de modo que a sequência que aparecer é a vencedora. Caso não apareça nenhuma das sequências, a moeda é lançada mais cinco vezes e assim por diante.

Gostaríamos de analizar as seguintes questões:

- Estes jogos são honestos? Se não, qual jogador leva a maior vantagem?
- Os jogos são equivalentes? Se não, qual jogo é o mais rápido?
- O que acontece se repetimos o mesmo jogo, mas lançando a moeda sete vezes?
- Há alguma regra para lançamentos de tamanho n arbitrário?
- O que ocorre se consideramos sequências de tamnho k arbitrário, para $k \leq n$?

1.4. **Grafos aleatórios.** Estudo de tópicos clássicos, seguidos de tópicos de pesquisa atual.

1.4.1. *A evolução de grafos aleatórios.* Estudo da "transição de fase", um resultado clássico obtido por Erdős e Rényi sobre a estrutura dos grafos aleatórios, onde observaram a evolução da maior componente conexa em $G(n,p)$, à medida que p cresce (bibliografia inicial: Bollobás [2]).

1.4.2. *Funções limiares para subgrafos.* Estudo dos resultados clássicos (subgrafos de tamanho fixo) e resultados para subgrafos "grandes" (bibliografia inicial: Bollobás [2] e, para resultados mais recentes, por exemplo, Riordan [11]). É bem possível que surjam problemas originais ao se estudar funções limiares considerando grafos "grandes".

1.5. **Versões probabilísticas de resultados extremais e resultados Ramseyanos.** Houve grandes avanços nessa linha de pesquisa em 2009/2010.

1.5.1. *Teoremas de Schacht e de Conlon e Gowers.* Estudo dos trabalhos desses autores [12, 4].

1.5.2. *Versões probabilísticas da teoria de Ramsey.* Trabalho maximal: Friedgut, Rödl e Schacht [7].

1.6. **O lema de regularidade de Szemerédi.** Ferramenta crucial em várias linhas de pesquisa da teoria dos grafos, hipergrafos e outros, com aplicações ainda não exploradas.

1.6.1. *Resenha clássica.* A resenha clássica nessa área é devido a Komlós e Simonovits [10].

1.6.2. *Quase-aleatoriedade.* Tópico intimamente relacionado com o lema de regularidade. Artigos seminais: Thomason [14, 15] e Chung, Graham e Wilson [3] (veja, também, Alon e Spencer [1]).

1.7. **Combinatória aditiva.** Aqui a bibliografia moderna mais ilustrativa é Tao e Vu [13]. Uma monografia clássica da área é devido a Halberstam e Roth [8].

1.8. **Métodos analíticos em combinatória.** Há uma literatura crescente de aplicações de álgebra linear (análise harmônica) em combinatória. Vejam, por exemplo:

1. Curso de Dinur e Friedgut: `http://www.cs.huji.ac.il/~analyt/`
2. Curso de Linial: `http://www.cs.huji.ac.il/~nati/PAPERS/uw/`
3. Curso de Szabó e Wagner: `http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/Fourier06/`
4. Apenas para inspiração: `http://www.ipam.ucla.edu/programs/cmaws4/`

2. Dinâmica do PICME/Combinatória & Probabilidade para 2011

Idealmente, todos os participantes do PICME/Comb & Prob terão um tema de estudo/pesquisa e cada participante deverá fazer apresentações de seus estudos nas reuniões semanais. Podemos escolher a ordem das apresentações por sorteio.

No caso dos participantes formais (bolsistas ou não), as apresentações e a participação nas reuniões serão obrigatórias.

Referências

[1] N. Alon and J. H. Spencer, *The probabilistic method*, second ed., Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000, With an appendix on the life and work of Paul Erdős.

[2] B. Bollobás, *Modern graph theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] F. R. K. Chung, R. L. Graham, and R. M. Wilson, *Quasi-random graphs*, Combinatorica **9** (1989), no. 4, 345–362.

[4] D. Conlon and W. T. Gowers, *Combinatorial theorems in sparse random sets*, in preparation.

[5] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of information theory*, second ed., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006.

[6] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*, Third edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

[7] E. Friedgut, V. Rödl, and M. Schacht, *Ramsey properties of random discrete structures*, submitted.

[8] H. Halberstam and K. F. Roth, *Sequences*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] J. Kåhre, *The mathematical theory of information*, The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science, 684, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2002.

[10] J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295–352.

[11] O. Riordan, *Spanning subgraphs of random graphs*, Combin. Probab. Comput. **9** (2000), no. 2, 125–148.

[12] M. Schacht, *Extremal results for random discrete structures*, submitted, 2009, 27pp.

[13] T. Tao and V. Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 105, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[14] A. Thomason, *Pseudorandom graphs*, Random graphs '85 (Poznań, 1985), North-Holland Math. Stud., vol. 144, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 307–331.

[15] ———, *Random graphs, strongly regular graphs and pseudorandom graphs*, Surveys in combinatorics 1987 (New Cross, 1987), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 123, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, pp. 173–195.