Introdução à Análise de Algoritmos

Quanto tempo leva a execução de determinado algoritmo?
Quando temos dois algoritmos que fazem a mesma coisa, qual deles leva menos tempo?

A análise do algoritmo preocupa-se com as questões acima.
É sempre conveniente conhecer ou ter uma medida da eficiência de um algoritmo ao programá-lo.

O comportamento de alguns algoritmos

Raízes de equação do 2. grau

```
void raiz(double a,double b,double c,double *x1,double *x2){
   ...
   *x1 = (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
   *x1 = (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
}
```

Se desconsiderarmos os casos particulares (delta negativo, a=0, etc.), esse algoritmo realiza sempre o mesmo número de operações.
Podemos afirmar então que o tempo que esse algoritmo leva é uma constante.
`t = k`

Máximo de uma seqüência de n elementos

```
float max(float a[], int N) {
   int i; float m;
   m=a[0];
   for (i = 1;i < N; i++) if (m < a[i]) m = a[i];
   return m;
}
```

Esse algoritmo sempre repete um conjunto de operações N-1 vezes.
Podemos afirmar então que seu tempo é proporcional a N-1 mais uma constante.
t = k1 + k2*(N-1)

Conta a quantidade de nulos num vetor de N elementos

```
int nulos(float a[], int N) {
   int i, c;
   c = 0;
   for (i = 0; i < N; i++) if (a[i]) == 0) c++;
   return c;
}
```

Idem ao anterior. Repetindo N vezes. Portanto o seu tempo é da forma:

t = k1 + k2*N

Verifica se dois vetores de N elementos são iguais

```
/* devolve 1 se iguais e 0 se diferentes */
int compara(int a[], int b[], int N) {
   int i;
   for  (i = 0; i < N; i++)
       if (a[i] != b[i]) return 0;
   return 1;
}
```

Neste caso o resultado depende dos dados, pois termina no primeiro elemento diferente encontrado. No pior caso (todos iguais ou o último diferente) também é proporcional a N.
`t = k1+k2*N`

Conta os algarismos significativos de um inteiro

```
int num_algar(int x) {
   int c=0;
   while (x != 0) {c++; x = x / 10;}
   return c;
}
```

outra forma:

```
int num_algar(int x) {
   int c;
   for (c = 0; x > 0; c++, x = x / 10;)
   return c;
}
```

O resultado `c` é o menor inteiro maior que `log x (base 10)`.
$10^{c-1} <= x <= 10^{c}$

O tempo é então proporcional a `log x`.
`t = k1+k2*log(x)`

Conta quantos bits significativos tem um inteiro

```
int num_bits(int x) {
   int c=0;
   while (x != 0) {c++; x = x / 2;}
   return c;
}
```

outra forma:

```
int num_bits(int x) {
   int c;
   for (c = 0; x > 0; c++, x = x / 2;)
   return c;
}
```

O resultado `c` é o menor inteiro maior que `lg x (base 2).`
$2^{c-1} <= x <= 2^c$

`O tempo é então proporcional a lg x.`
`t = k1+k2*lg(x)`

Notação:

`log x` – (base 10)
`lg x` – (base 2)
`ln x` – (base e) – logaritmo natural

Observe que podemos dizer que os dois últimos exemplos acima são proporcionais ao logaritmo, sem mencionar a base, pois:

`log N = lg N/lg 10` ou `log N = k.lg N`

Imprimir tabela de i / j (1<=i<=N; 1<=j<=M)

```
void imp_tabela (int N, int M) {
 int i, j;
 for (i = 1;i <= N; i++) {
  for (j = 1;j <= M; j++)printf("%8.3lf  ",(float)i/(float)j;
  printf("\n");
}
```

O tempo é proporcional a `N*M`. Um limitante superior é `N*N`, supondo `N` o maior deles.
$t = k1+k2*N^2$.

Multiplicar matriz A[NxM] por vetor X[M]

Faça o algoritmo. São dois comandos **`for`** encaixados:

O tempo é proporcional a `N*M`. Um limitante superior é `N*N`, supondo `N` o maior deles.
$t = k1+k2*N^2$.

Idem imprimindo a tabela i*j*k (1<=i<=N; 1<=j<=M; 1<=k<=P)

Serão três comandos **`for`** encaixados. Neste caso será proporcional a `N*M*P`.
Podemos considerar `N*N*N`, supondo N o maior deles.
$t = k1+k2*N^3$.

Multiplicar matriz A[NxM] por matriz X[MxP]

Faça o algoritmo. Serão três comandos **`for`** encaixados:

O tempo é proporcional a `N*M*P`. Um limitante superior é `N*N*N`, supondo `N` o maior deles.
$t = k1+k2*N^3$.

Proporcionalidade dos algoritmos anteriores:

Os algoritmos acima são proporcionais a:

`1` – sempre executam as mesmas instruções uma só vez. Dizemos que o tempo de execução neste caso é uma constante.

`N` – dependem apenas de um parâmetro que é o número de vezes que um determinado laço é executado.

`log N` – Não importa a base, pois log N, lg N ou ln N são proporcionais. Assim não vamos indicar a base. Vamos dizer apenas que o algoritmo leva um tempo logarítmico para ser executado. Note também que um algoritmo com essa característica é muito interessante. Quando N é 1.000 o tempo é proporcional a 3. Quando N fica 1.000 vezes maior (1.000.000) o tempo apenas dobra (proporcional a 6).

N^2 – em geral esses algoritmos têm um for encaixado em outro for. Quando N é 1.000, o tempo é proporcional a 1.000.000. Quando N dobra o tempo multiplica por 4.

N^3 - em geral possuem um for dentro dum um for dentro de um for. Quando N dobra, o tempo se multiplica por 8.

Outros algoritmos podem ainda serem proporcionais a `N.log N`, ou exponenciais, proporcionais a 2^N ou 10^N.

Um pouco de intuição

É intuitivo que para valores de N grandes, quanto maior a ordem do expoente, mais tempo leva o algoritmo.

1-constante   log N   N   N.log N N^2 N^3

$\longrightarrow$

mais tempo

Sobre os algoritmos

O tempo depende dos dados em cada execução do algoritmo.
Pode ser que para um conjunto de dados o algoritmo A1 seja mais rápido que o A2. Para outro conjunto o tempo pode se inverter.
Um algoritmo pode levar um tempo pequeno quando N é pequeno, mas demorar muito quando N é grande. Por exemplo, um algoritmo que tem um tempo proporcional a N^3.

Às vezes não interessa muito se o algoritmo leva um tempo maior ou menor, pois a execução numa máquina é tão rápida que não faz diferença usarmos o algoritmo A1 ou A2.

O que realmente dá para se afirmar a respeito do tempo que um algoritmo vai demorar?

A notação O(f(N)) – Ordem de f(N) ou notação Grande-O

Para expressar essa idéia de tempo proporcional a alguma função, foi inventada a notação O(f(N)) – Ordem de f(N) ou ainda notação Grande-O (big-O notation).

Definição:

Dizemos que g(N) é O(f(N)) se existirem constantes c_0 e N_0 tais que $g(N) < c_0 f(N)$ para todo $N>N_0$. Ou seja, a partir de um determinado N, a função f(N) multiplicada por uma constante é sempre maior que g(N). Veja o gráfico abaixo.

Outra forma é definir O(f(N)) como um conjunto:

$O(f(N)) = \{\ g(N)$ se existem constantes c_0 e N_0 tais que $g(N) < c_0 f(N)$ para todo $N>N_0\ \}$

Podemos dizer livremente que $g(N) = O(f(N))$, mas o mais correto é dizer:
g(N) é O(f(N)) ou $g(N) \in O(f(N))$.

Essa definição elimina os termos que contribuem em menor grau para o tempo total.
Também é usada para classificar os algoritmos por um limitante superior.

Veja que c_0 e N_0 escondem coisas importantes sobre o funcionamento do algoritmo:

- Nada sabemos para $N<N_0$.
- c_0 pode esconder uma enorme ineficiência do algoritmo – por exemplo, é melhor N^2 nano-segundos que log N séculos.

Só interessa o termo de maior ordem.

O(1) é o mesmo que O(2) que é o mesmo que O(K) – constante

$O(1+N+N^2)$ é $O(N^2)$

Observe que $1+N+N^2 < N^2+ N^2+ N^2 =3 N^2$ para $N> N_0$

$O(N.\log N+N^2)$ é $O(N^2)$

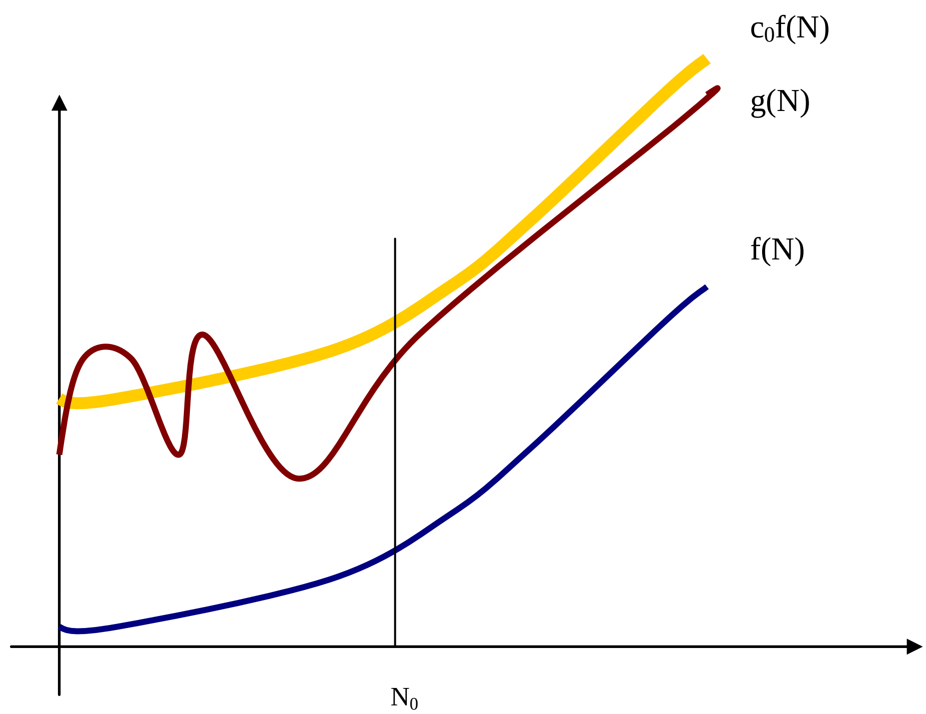
Observe que $N.\log N+ N^2 < N^2+ N^2 = 2 N^2$ para $N>N_0$

Propriedades:

a) $O(f(N)) + O(g(N))$ é $O(\max\{f(N), g(N)\})$

b) $O(f(N)).O(g(N))$ é $O(f(N).g(N))$

c) $O(k.f(N))$ é $O(f(N))$ desde que $k \neq 0$



Exemplo de análise de algoritmos

Vejamos um algoritmo simples e algumas características de sua análise.

Algoritmo de busca seqüencial:

```
/* procura x em a[0], a[1], ... a[N-1] */
int busca(int a[], int x, int N)  {
   for (i = 0; i < N; i++) if(a[i] == x) return i;
   return -1;
}
```

Existem muitas variações deste algoritmo quando se programa em C, mas todas elas têm que percorrer o vetor.

Quantas comparações são necessárias até encontrar o elemento procurado ou concluir que ele não está na tabela?

Melhor caso: 1 - uma só comparação quando `x == a[0]`.
Pior caso: N – quando não encontra ou `x == a[N-1]`.
Caso médio: (1+N)/2 – média entre o pior e o melhor ?

Para considerarmos a média entre o melhor e o pior caso, estamos assumindo uma hipótese importante. A probabilidade de ser qualquer valor entre 1 e N é a mesma. Isso normalmente não é verdade.

De uma maneira geral, a determinação do pior caso dá uma boa informação de como o algoritmo se comporta e oferece um limitante superior para o tempo que o algoritmo demandará.

O caso médio é o mais interessante de ser determinado, mas nem sempre é possível, pois muitas vezes depende de hipóteses adicionais sobre os dados.

Supondo então o pior caso, o algoritmo acima é O(N) (linear).

Outro exemplo

Determinar qual o último elemento do vetor igual a x.
A melhor solução é a busca seqüencial do fim para o começo do vetor.

```
/* procura x em a[N-1], a[N-2], ... a[0] */
int busca(int a[], int x, int N)  {
   for (i = N - 1; i <= 0; i--) if(a[i] == x) return i;
   return -1;
}
```

Uma solução menos eficiente seria procurar a partir do início do vetor.

```
/* procura x em a[0], a[1], ... a[N-1] */
int busca(int a[], int x, int N)  {
   int k = -1;
   for (i = 0; i < N; i++) if(a[i] == x) k=i;
   return k;
}
```

Ambos são O(N), embora a primeira solução seja preferível à segunda. O pior caso de ambas é o mesmo.

A notação O(f(N)) é a complexidade dos algoritmos

Como já vimos, a notação O(f(N)) ignora pontos importantes sobre o algoritmos:
Como ele funciona para N menores
Se vamos rodar num computador lento ou rápido

Mas do ponto de vista de complexidade, o que se pode afirmar e, portanto o que interessa sobre o algoritmo é o seu comportamento assintótico, isto é, qual a curva que melhor descreve o seu comportamento.

Veremos que existem algoritmos com vários comportamentos:

Constantes – O(1)
Lineares – O(N)
Quadráticos – O(N^2)
Polinomiais – O(N^k)
Exponenciais - O(k^N)
Logarítmicos – O(lg N) ou O(N.lg N)

Alguns exemplos

Vejamos os algoritmos acima:

Raízes de equação do 2. grau

O(1)

Máximo de uma seqüência de n elementos

O(N)

Conta a quantidade de nulos num vetor de N elementos

O(N)

Verifica se dois vetores de N elementos são iguais

O(N)

Conta os algarismos significativos de um inteiro

O(log N)

Conta quantos bits significativos tem um inteiro

O(log N)

Imprimir tabela de i/j (1<=i<=N; 1<=j<=M)

O(N.M) ou $O(N^2)$ se **N > M**

Multiplicar matriz A[NxM] por vetor X[M]

O(N.M) ou $O(N^2)$ se **N > M**

Idem imprimindo a tabela i*j*k (1<=i<=N; 1<=j<=M; 1<=k<=P)

O(N.M.P) ou $O(N^3)$ se **N > M,P**

Multiplicar matriz A[NxM] por matriz X[MxP]

O(N.M.P) ou $O(N^3)$ se **N > M,P**

Imprimir todos os números com N dígitos

$O(10^N)$