Aula 21 - Algoritmos e Funções Recursivas

Considere a definição da função fatorial:

```
n! = 1 se n <= 0
     n.(n-1).(n-2). . . . 3.2.1 se n > 0
```

Considere agora a seguinte definição equivalente:

```
n! = 1 se n <= 0
     n.(n-1)! se n > 0
```

Dizemos que essa última definição é uma definição recursiva, pois usa a função fatorial para definir a função fatorial. Note que chamando a função de f temos:

```
f(n) = 1 se n <= 0
       n.f(n-1) se n > 0
```

A princípio parece estranho usar uma função para definir a si própria, mas vejamos como se calcula o fatorial usando a definição recursiva.

```
5!=5.4!=5.4.3!=5.4.3.2!=5.4.3.2.1!=5.4.3.2.1.0!=5.4.3.2.1.1 = 120
```

A definição acima faz sentido, pois tem uma regra de parada, isto é, tem um caso (n igual a zero) onde a função não é usada para calcular a si própria e que sempre vai ocorrer.

Muitas outras funções admitem definições recorrentes deste tipo, ou seja, usa-se a função para definir a si própria, com um caso particular não recorrente.

Funções recursivas em C

Já vimos que uma função em C pode chamar outras funções. Em particular pode chamar a si mesma. Quando isso ocorre dizemos que a função é recursiva.

A função fatorial pela definição recursiva acima ficaria:

```
int fatrec(int n) {
   if (n <= 0) return 1;
   return n * fatrec(n-1);
}
```

Vamos agora ilustrar as chamadas recorrentes da função `fatrec` com o programa abaixo. Para isso, fizemos uma pequena modificação na `fatrec` e colocamos dois comandos `printf`. O primeiro mostra qual o parâmetro com o qual a função foi chamada e o segundo mostra o mesmo parâmetro após a multiplicação.
Observe na saída do programa abaixo a ordem das chamadas e a ordem das multiplicações. As multiplicações ficam pendentes até que a última chamada da função `fatrec` (**`fatrec(0)`**) seja feita.

Dado `n` inteiro, calcular o valor de `n!`, usando a função recursiva `fatrec`.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int fatrec(int n) {
   int f;
   printf("\nchamando fatorial de %10d", n);
   if (n <= 0) return 1;
   f = n * fatrec(n-1);
   printf("\nfeita a multiplicacao por %10d", n);
   return f;
}

/* dado n>=0 calcular o fatorial de n usando fatrec */
int main() {
   int n; /* numero dado */
   /* ler o n */
   printf("digite o valor de n:");
   scanf("%d", &n);
   /* calcule e imprima o resultado de fatorial de n */
   printf("\n\nfatorial de %10d = %10d\n", n, fatrec(n));
   system("PAUSE");
   return 0;
}
```

Veja o que será impresso:

```
digite o valor de n:5

chamando fatorial de          5
chamando fatorial de          4
chamando fatorial de          3
chamando fatorial de          2
chamando fatorial de          1
chamando fatorial de          0
feita a multiplicacao por           1
feita a multiplicacao por           2
feita a multiplicacao por           3
feita a multiplicacao por           4
feita a multiplicacao por           5

fatorial de           5 =         120
```

Outro exemplo:

```
digite o valor de n:10

chamando fatorial de         10
chamando fatorial de          9
chamando fatorial de          8
chamando fatorial de          7
chamando fatorial de          6
chamando fatorial de          5
chamando fatorial de          4
chamando fatorial de          3
```

```
chamando fatorial de          2
chamando fatorial de          1
chamando fatorial de          0
feita a multiplicacao por           1
feita a multiplicacao por           2
feita a multiplicacao por           3
feita a multiplicacao por           4
feita a multiplicacao por           5
feita a multiplicacao por           6
feita a multiplicacao por           7
feita a multiplicacao por           8
feita a multiplicacao por           9
feita a multiplicacao por          10

fatorial de         10 =    3628800
```

Números Harmônicos

Considere agora a função que calcula o `n`-ésimo número harmônico:

```
H(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + . . . + 1/n (n >= 1)
```

Uma outra definição recursiva:

```
H(n) = 1 se n <= 1
       1/n + H(n-1) se n > 1
```

Usando a definição recursiva acima:

```
H(4)=1/4+H(3)=1/4+1/3+H(2)=1/4+1/3+1/2+H(1)=1/4+1/3+1/2+1
```

Análogo ao fatorial, a função acima também tem o caso de parada (`n` igual a `1`), onde o valor da função não é recorrente.

Portanto, usando a definição acima:

```
double harmrec(int n) {
   if (n == 1) return 1;
   return 1.0 / (double)n + harmrec(n-1);
}
```

Para ilustrar o funcionamento de `harmrec`, veja o programa abaixo, no qual adicionamos um `printf` dentro de `harmrec`, para esclarecer qual a chamada em andamento:

Dado `n>0` inteiro, calcular o número harmônico de ordem `n`, usando a função recursiva `harmrec`.

```
#include <stdio.h>

double harmrec(int n) {
   printf("\nchamando harmrec de %10d", n);
   if (n == 1) return 1;
   return 1.0 / (double)n + harmrec(n-1);
```

```
}

/* dado n > 0 calcular o número harmônico de oredem n */
int main() {
 int n;    /* numero dado */
 /* ler o n */
 printf("digite o valor de n:");
 scanf("%d", &n);
 /* calcule e imprima o n-ésimo número harmônico */
 printf("\n\nharmonico de %10d = %lf", n, harmrec(n));
}
```

Veja o que será impresso:

```
digite o valor de n:10

chamando harmrec de         10
chamando harmrec de          9
chamando harmrec de          8
chamando harmrec de          7
chamando harmrec de          6
chamando harmrec de          5
chamando harmrec de          4
chamando harmrec de          3
chamando harmrec de          2
chamando harmrec de          1

harmonico de         10 = 2.928968
```

Nos dois casos acima, não parece existir nenhuma vantagem, da solução recursiva para a solução iterativa. De fato, a solução recursiva é até pior em termos de gasto de memória e de tempo, pois a cada chamada é necessário guardar o contexto da chamada anterior, até ocorrer o caso de parada, ou o caso não recorrente. Isto é, as chamadas todas ficam pendentes, esperando a chamada sem recorrência, só ocorrendo o retorno de cada uma delas seqüencialmente após esse evento.

A vantagem, se é que há alguma, é que a estrutura da função em C, fica análoga à estrutura da definição da função.

A seqüência de Fibonacci

Vejamos outro exemplo:

A seqüência de Fibonacci, assim conhecida porque foi proposta pelo matemático italiano do século XI, Leonardo Fibonacci, é tal que cada elemento (com exceção dos dois primeiros que são `0` e `1`), é igual à soma dos dois anteriores.

```
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, . . .
```

A seqüência possui algumas propriedades matemáticas que não são objeto de análise neste curso.

Dado `n > 1`, imprimir os `n+1` primeiros números de Fibonacci.

```
#include <stdio.h>

/* dado n > 1, imprime os n+1 primeiros elementos da sequência
   de fibonacci (f0, f1, f2, ... fn) */
int main() {
 int n,    /* numero dado */
     i, atual = 1, anterior = 0, auxiliar;
 /* ler o n */
 printf("digite o valor de n:");
 scanf("%d", &n);
 /* imprima os 2 primeiros f0 e f1 */
 printf("\nfibonacci de %10d = %10d", 0, 0);
 printf("\nfibonacci de %10d = %10d", 1, 1);
 /* calcule e imprima f2, f3, . . ., fn */
 for (i = 2; i <= n ; i++) {
          auxiliar = atual;
          atual = atual + anterior;
          anterior = auxiliar;
          printf("\nfibonacci de %10d = %10d", i, atual);
 }
}
```

Veja o que será impresso:

```
digite o valor de n:20
fibonacci de          0 =          0
fibonacci de          1 =          1
fibonacci de          2 =          1
fibonacci de          3 =          2
fibonacci de          4 =          3
fibonacci de          5 =          5
fibonacci de          6 =          8
fibonacci de          7 =         13
fibonacci de          8 =         21
fibonacci de          9 =         34
fibonacci de         10 =         55
fibonacci de         11 =         89
fibonacci de         12 =        144
fibonacci de         13 =        233
fibonacci de         14 =        377
fibonacci de         15 =        610
fibonacci de         16 =        987
fibonacci de         17 =       1597
fibonacci de         18 =       2584
fibonacci de         19 =       4181
fibonacci de         20 =       6765
```

Uma função não recursiva para determinar o `n`-ésimo número de Fibonacci:

```
int fibonacci(int n) {
   int i, atual = 1, anterior = 0, auxiliar;
   if (n == 0) return 0;
   if (n == 1) return 1;
```

```
   for (i = 2; i <= n ; i++) {
          auxiliar = atual;
          atual = atual + anterior;
          anterior = auxiliar;
   }
   return atual;
}
```

Por outro lado, a definição da função para o n-ésimo número de Fibonacci é claramente recursiva:

f(0) = 0
f(1) = 1
f(n) = f(n-1) + f(n-2) se n > 1

Vejamos agora uma versão recursiva da mesma função:

```
int fibonaccirec(int n) {
   if (n == 0) return 0;
   if (n == 1) return 1;
   return fibonaccirec(n - 1) + fibonaccirec(n - 2);
}
```

Para ilustrar o funcionamento de `fibonaccirec`, veja o program abaixo, onde inserimos na função o `printf`, para esclarecer qual a chamada corrente:

Dado `n`, calcular o número de Fibonacci de ordem `n`, usando `fibonaccirec` e `fibonacci`.

```
#include <stdio.h>

int fibonaccirec(int n) {
   printf("\nchamando fibonacci recursiva de %10d", n);
   if (n == 0) return 0;
   if (n == 1) return 1;
   return fibonaccirec(n - 1) + fibonaccirec(n - 2);
}

int fibonacci(int n) {
   int i, atual = 1, anterior = 0, auxiliar;
   if (n == 0) return 0;
   if (n == 1) return 1;
   for (i = 2; i <= n ; i++) {
        auxiliar = atual;
        atual = atual + anterior;
        anterior = auxiliar;
   }
   return atual;
}

/* dado n > 0 calcular o n-ésimo número de Fibonacci */
int main() {
 int n;    /* numero dado */
 /* ler o n */
```

```
 printf("digite o valor de n:");
 scanf("%d", &n);
 /* calcule e imprima o n-ésimo número de Fibonacci */
 printf("\n\nfibonacci de %10d recursivo = %10d  nao recursivo = %10d",
          n, fibonaccirec(n), fibonacci(n));
}
```

Veja o que será impresso:

```
digite o valor de n:5

chamando fibonacci recursiva de          5
chamando fibonacci recursiva de          4
chamando fibonacci recursiva de          3
chamando fibonacci recursiva de          2
chamando fibonacci recursiva de          1
chamando fibonacci recursiva de          0
chamando fibonacci recursiva de          1
chamando fibonacci recursiva de          2
chamando fibonacci recursiva de          1
chamando fibonacci recursiva de          0
chamando fibonacci recursiva de          3
chamando fibonacci recursiva de          2
chamando fibonacci recursiva de          1
chamando fibonacci recursiva de          0
chamando fibonacci recursiva de          1

fibonacci de          5 recursivo =          5  nao recursivo =          5
```

A versão recursiva é muito mais ineficiente que a versão interativa, embora mais elegante. Note que cada chamada gera duas novas chamadas. No exemplo acima, para calcular `fibonaccirec(5)`, foram geradas 14 chamadas adicionais.

Exercício – Quantas chamadas são necessárias, em função de `n`, para se calcular `fibonaccirec(n)`.

Máximo Divisor Comum – Algoritmo de Euclides

Outro exemplo que converge rapidamente para o caso de parada, mas também não é melhor que a versão iterativa, já vista anteriormente, é o cálculo do `mdc` entre dois números, usando o algoritmo de Euclides.

Quociente		1	1	2
dividendo/divisor	30	18	12	6
Resto	12	6	0	

Veja a versão iterativa:

```
int mdc(int a, int b) {
   int r;
   r = a % b;
   while (r ! = 0) {
      a = b; b = r; r = a % b;
```

```
   }
   return b;
}
```

Estamos usando a seguinte definição (recursiva) para o mdc:

```
mdc(a, b) = b se b divide a, ou seja a%b = 0
            mdc(b, a%b) caso contrário
```

Portanto a versão recursiva ficaria:

```
int mdc_recursiva(int a, int b) {
   if (a % b == 0) return b;
   return mdc_recursiva (b, a % b);
}
```

Veja agora no programa abaixo, o funcionamento de mdc_recursiva. Também acrescentamos um `printf` na função.

Dados `a` e `b` inteiros > `0`, calcular `mdc` entre `a` e `b`, usando `mdc_recursiva`.

```
#include <stdio.h>

int mdc_recursiva(int a, int b) {
   printf("\nchamando mdc entre %5d e %5d", a, b);
   if (a % b == 0) return b;
   return mdc_recursiva (b, a % b);
}

/* dados a e b > 0 calcular o mdc entre a e b usando mdc_recursiva */
int main() {
 int a, b;    /* dados */
 /* ler a e b */
 printf("digite os valores de a e b:");
 scanf("%d%d", &a, &b);
 /* calcule e imprima o resultado de fatorial de n */
 printf("\n\nmdc entre %5d e %5d = %5d", a, b, mdc_recursiva(a, b));
}
```

Veja o que será impresso:

```
digite os valores de a e b:14 568

chamando mdc entre    14 e   568
chamando mdc entre   568 e    14
chamando mdc entre    14 e     8
chamando mdc entre     8 e     6
chamando mdc entre     6 e     2

mdc entre    14 e   568 =     2
```

Busca Sequencial

Outra função que já conhecemos é a busca seqüencial numa tabela, cuja versão iterativa é:

```
/* procura x no vetor a, devolvendo o índice do elemento igual ou -1 */
int busca (int a[], int n, int x) {
   int i;
   for (i = 0; i < n; i++)
     if (a[i] == x) return i;
   return -1;  /* foi até o fim do for e não encontrou */
}
```

Vejamos agora a seguinte definição:
Procurar um elemento numa tabela de `n` elementos, é o mesmo que comparar com o primeiro e se não for igual, voltar a procurar o mesmo elemento na tabela restante de `n-1` elementos. Ou seja:

```
busca (a, k, n , x) = -1 se k == n (não encontrou)
                       k se a[k] == x
                       busca (a, k+1, n, x) caso contrário
```

A chamada inicial teria que ser: `busca (a, 0, n, x).`

```
/* procura x no vetor a, devolvendo o índice do elemento igual ou -1 */
int busca (int a[], int k, int n, int x) {
   if (k == n) return -1;
   if (a[k] == x) return k;
   return busca (a, k + 1, n, x);
}
```

Observe que adicionamos um parâmetro `k`, cujo objetivo na verdade é funcionar como um contador. Outra forma é usar o número de elementos como um contador e nesse caso seriam necessários só 3 parâmetros:

```
busca (a, k, x) =   -1 se k == 0 (não encontrou)
                     k-1 se a[k-1] == x
                     busca (a, k-1, x) caso contrário
```

A chamada inicial teria que ser `busca (a, n, x)`. Veja que na primeira chamada o valor do parâmetro k é n. Enquanto na versão anterior os elementos são comparados na ordem `a[0], a[1], ..., a[n-1],` nessa as comparações são feitas na ordem `a[n-1], a[n-2], ..., a[0].`

Exercício – Reescreva a função busca com essa nova definição.

Veja agora um programa que usa a busca e o que imprime:

Programa que testa a função busca recursiva.

```
#include <stdio.h>

int busca (int a[], int k, int n, int x) {
   if (k == n) return -1;
   if (a[k] == x) return k;
   return busca (a, k + 1, n, x);
}
```

```
int main() {
 int tabela[] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29};
 int n = 10, zz, r;
 zz = 23;
 /* procura o valor zz na tabela */
 r = busca(tabela, 0, n, zz);
 printf("\nprocura %d resultado = %d", zz, r);

 zz = 26;
 /* procura o valor zz na tabela */
 r = busca(tabela, 0, n, zz);
 printf("\nprocura %d resultado = %d", zz, r);
}
```

```
procura 23 resultado = 8
procura 26 resultado = -1
```

Busca Binária

Quando a tabela está ordenada, fazemos busca binária.
Comparamos com o elemento médio da tabela. Se for igual, a busca termina. Se for maior, fazemos a busca na metade superior, senão na metade inferior.

```
/* procura x no vetor a, devolvendo o índice do elemento igual ou -1 */
int busca_binaria (int a[], int inicio, int final, int x) {
   int k;
   if (inicio > final) return -1;
   k = (inicio + final) / 2;
   if (a[k] == x) return k;
   if (a[k] > x) return busca_binaria(a, inicio, k - 1, x);
   if (a[k] < x) return busca_binaria(a, k + 1, final, x);
}
```

A chamada inicial tem como parâmetros os índices inicial e final da tabela, zero e n-1:

```
busca_binaria(a,0,n-1,x)
```

Maior elemento da tabela

Mais um exemplo no mesmo estilo é uma função que calcular o máximo entre os elementos de um vetor, cuja versão iterativa está abaixo:

```
int maximo (int a[], int n) {
   int i, max;
   max = a[0];
   for (i = 1; i < n; i++)
       if (a[i] > max) max = a[i];
   return max;
}
```

Uma forma de entender a função `maximo`:

(i) O máximo de uma tabela de `n` elementos, é o maior entre o primeiro e o máximo entre os `n-1` elementos posteriores.

Outra forma:

(ii) O máximo de uma tabela de `n` elementos, é o maior entre o último e o máximo entre os `n-1` elementos anteriores.

Usando a forma (ii):

```
maximo(a, n) = a[0] se n = 1
               maior entre a[n] e maximo(a, n-1) se n > 1
```

```
int maior (int x, int y) {
  if (x >= y) return x; else return y;
}

int maximo_recursiva (int a[], int n) {
   if (n == 1) return a[0];
   return maior (a[n-1], maximo_recursiva(a, n-1));
}
```

Agora, um programa e o que é impresso usando a função. Acrescentamos também um `printf`, tanto na `maximo_recursiva` como na `maior`.

Verifique pela saída a seqüência de chamadas. As chamadas da função maior, ficam pendentes, até que a última chamada da maximo_recursiva seja resolvida, isto é, até chegar no caso em que a função não é recorrente.
Programa que dado n inteiro > 0 gera uma seqüência de n elementos aleatórios e calcula o máximo dos elementos, usando a função `maximo_recursiva` acima.

```
#define nmax 100
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int maior (int x, int y) {
   printf("\n>>>>chamada de maior com x = %5d e y = %5d", x, y);
   if (x >= y) return x; else return y;
}

int maximo_recursiva (int a[], int n) {
   printf("\n####chamada de maximo_recursiva com n = %3d", n);
   if (n == 1) return a[0];
   return maior (a[n-1], maximo_recursiva(a, n-1));
}

/ Gerar nummax números aleatórios i calcular o máximo */
int main() {
 int tabela[nmax];
 int n, i;
 /* ler n */
 printf("**** entre com n:");
 scanf("%d", &n);
```

```
 /* gerar e imprimir n números aleatórios inteiros entre 0 e 9999 */
 srand(1234);
 printf("\n********** numeros gerados\n");
 for (i = 0; i < n; i++)
      printf("%5d", tabela[i] = rand() % 10000);
 /* calcular e imprimir o máximo */
 printf("\n\n********** maximo dos elementos gerados:%5d\n",
        maximo_recursiva(tabela, n));
}
```

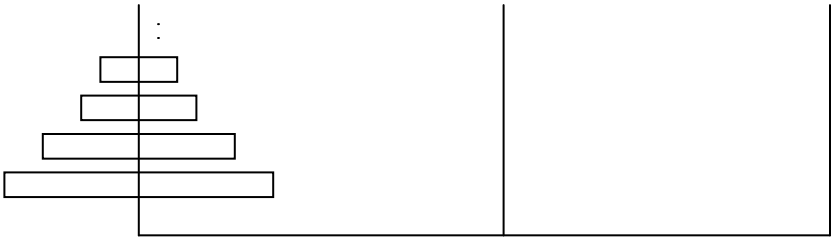
```
**** entre com n:7

********** numeros gerados
 4068  213 2761 8758 3056 7717 5274
####chamada de maximo_recursiva com n =   7
####chamada de maximo_recursiva com n =   6
####chamada de maximo_recursiva com n =   5
####chamada de maximo_recursiva com n =   4
####chamada de maximo_recursiva com n =   3
####chamada de maximo_recursiva com n =   2
####chamada de maximo_recursiva com n =   1
>>>>chamada de maior com x =   213 e y =  4068
>>>>chamada de maior com x =  2761 e y =  4068
>>>>chamada de maior com x =  8758 e y =  4068
>>>>chamada de maior com x =  3056 e y =  8758
>>>>chamada de maior com x =  7717 e y =  8758
>>>>chamada de maior com x =  5274 e y =  8758

********** maximo dos elementos gerados: 8758
```

Em todos os exemplos acima, a versão recursiva, embora às vezes mais elegante, pois é mais aderente a definição da função, não é mais eficiente que a versão iterativa. Em alguns casos, no entanto, pensar na solução de forma recursiva, facilita muito.

Torre de Hanói

O jogo Torre de Hanói, foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas (1842-1891), é um exemplo de problema que tem uma solução simples na forma recursiva.
O problema consiste em mover n discos empilhados (os menores sobre os maiores), de uma haste de origem, para uma haste de destino, na mesma ordem, respeitando as seguintes regras:

1) Apenas um disco pode ser movido por vez
2) Não colocar um disco maior sobre um menor
3) Pode usar uma haste auxiliar



```
ORIGEM                DESTINO             AUXILIAR
```

Por exemplo, uma solução para 2 discos seria:

```
move disco   1 da torre     ORIGEM para a torre   AUXILIAR
move disco   2 da torre     ORIGEM para a torre    DESTINO
move disco   1 da torre   AUXILIAR para a torre    DESTINO
```

E para 3 discos, uma solução seria:

```
move disco   1 da torre     ORIGEM para a torre    DESTINO
move disco   2 da torre     ORIGEM para a torre   AUXILIAR
move disco   1 da torre    DESTINO para a torre   AUXILIAR
move disco   3 da torre     ORIGEM para a torre    DESTINO
move disco   1 da torre   AUXILIAR para a torre     ORIGEM
move disco   2 da torre   AUXILIAR para a torre    DESTINO
move disco   1 da torre     ORIGEM para a torre    DESTINO
```

Faça agora para 4 e 5 discos só para ver o trabalho que dá.

Vejamos como seria uma função recursiva para resolver este problema.
Supondo que saibamos como mover n-1 discos respeitando as regras acima, vamos então mover n discos:

Mover n discos de ORIGEM para DESTINO, é o mesmo que:

Mover n-1 discos de ORIGEM para AUXILIAR, usando DESTINO como auxiliar
Mover disco n de ORIGEM para DESTINO
Mover n-1 discos de AUXILIAR para DESTINO, usando ORIGEM como auxiliar

Em qualquer das operações acima, não transgredimos as regras do jogo. Falta a regra de parada que ocorre quando n é 1. Neste caso, basta mover o disco 1 de ORIGEM para DESTINO.

Usando a definição acima a função ficaria:

```
/* Mover N discos da torre a para a torre b usando c como auxiliar */
void hanoi(int n, char a[], char b[], char c[]) {
    if (n == 1) writemove(1, a, b);
    else {hanoi(n - 1, a, c, b);
          writemove(n, a, b);
          hanoi(n - 1, c, b, a);
    }
}
```

O programa abaixo usa a função `hanoi` recursiva:

Dado o número de discos `n` e o nome das torres de origem, destino e auxiliar, resolver o problema das Torres de Hanói para `n` discos.

```
#include <stdio.h>

void writemove(int k, char origem[], char destino[]) {
   printf("\n move disco %3d da torre %10s para a torre %10s",
            k, origem, destino);
}

void hanoi(int n, char a[], char b[], char c[]) {
    if (n == 1) writemove(1, a, b);
    else {hanoi(n - 1, a, c, b);
          writemove(n, a, b);
          hanoi(n - 1, c, b, a);
    }
}

int main() {
   int n;
   char origem[10], destino[10], auxiliar[10];

   printf("entre com o numero de discos:");
   scanf("%d", &n);
   printf("entre com os nomes dos discos (origem destino auxiliar):");
   scanf("%s%s%s", origem, destino, auxiliar);
   // chama a função para movimentar os discos
   hanoi(n, origem, destino, auxiliar);
}
```

```
entre com o numero de discos:4
entre com os nomes dos discos (origem destino auxiliar):azul amarelo
vermelho

 move disco   1 da torre       azul para a torre   vermelho
 move disco   2 da torre       azul para a torre    amarelo
 move disco   1 da torre   vermelho para a torre    amarelo
 move disco   3 da torre       azul para a torre   vermelho
 move disco   1 da torre    amarelo para a torre       azul
 move disco   2 da torre    amarelo para a torre   vermelho
 move disco   1 da torre       azul para a torre   vermelho
 move disco   4 da torre       azul para a torre    amarelo
 move disco   1 da torre   vermelho para a torre    amarelo
 move disco   2 da torre   vermelho para a torre       azul
 move disco   1 da torre    amarelo para a torre       azul
 move disco   3 da torre   vermelho para a torre    amarelo
 move disco   1 da torre       azul para a torre   vermelho
 move disco   2 da torre       azul para a torre    amarelo
 move disco   1 da torre   vermelho para a torre    amarelo
```

Exercício: Mostre que para N discos, o algoritmo acima precisa de 2^N-1 movimentos.