

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS

Héctor Merklen
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo - BRASIL
2004.

1. Generalidades: historia y notaciones.

Sea k un cuerpo, por ejemplo $k = \mathbb{Q}$, $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$ ¹, de característica p . (Ésta se define como siendo, si existe, el menor número natural estrictamente positivo, κ , tal que $\kappa\alpha = 0$, $\forall \alpha \in k$ o, si tal número no existe, definiéndola como igual a 0).

Un *grupo* es un conjunto, G , munido de una operación asociativa, con elemento neutro y donde se verifica la existencia de inversos².

Un k -*espacio vectorial* de dimensión finita, n , es un conjunto, V , con la estructura algebraica definida por dos operaciones: suma (interna) y multiplicación por escalares (externa), que lo tornan isomorfo a k^n , el conjunto de las n -uplas de elementos de k con las operaciones usuales:

$$(a_i)_i + (b_i)_i = (a_i + b_i)_i$$
$$a(a_i)_i = (aa_i)_i.$$

(Como es sabido, este isomorfismo se puede tornar explícito cuando se da una base de V).

$M_{r \times s}(k)$, la k -álgebra de las matrices de tipo $r \times s$ con coeficientes en k , es el conjunto de todas las matrices con r filas y s columnas:

¹Este cursillo fue escrito para que pueda ser acompañado por estudiantes en el nivel inicial del pos-grado pero su aprovechamiento cabal exige un cierto dominio de las teorías de grupos, de anillos y de módulos (ver, por ejemplo, [M-V] y [C-L-S]).

²Generalmente, la operación del grupo es denotada multiplicativamente y el elemento neutro, por 1, pero a veces (por ejemplo cuando el grupo es conmutativo), se la denota aditivamente y al elemento neutro, por 0; en ese caso, obviamente, el inverso de un elemento es el opuesto del mismo.

$$(a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & a_{rs} \end{pmatrix}$$

con elementos en k . Sábese que es un espacio vectorial de dimension rs . En el caso de las matrices cuadradas ($r = s$) simplificamos la notación escribiendo solamente $\mathbb{M}_r(k)$.

Un *álgebra* sobre k (o una k -álgebra) (ver la Sección 2) es un espacio vectorial sobre k ³, Λ , provisto de una multiplicación asociativa, distributiva (bilateralmente) y con unidad (la cual opera como la identidad).

Decimos que Φ es una *acción* del álgebra Λ sobre el k -espacio vectorial V (resp. sobre el grupo conmutativo $(G, +)$) si Φ es un homomorfismo unitario de Λ en el álgebra de los endomorfismos de V (resp. en el anillo de los endomorfismos de G). Si la dimensión de V es r , esto equivale a dar un homomorfismo $\Phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{M}_r$ y se acostumbra decir que Φ es una *representación* de Λ por matrices de grado r (o de tipo $r \times r$).⁴

Para conveniencia del lector, detallamos abajo propiedades formales satisfechas por las acciones de álgebras.

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Phi(y) &= \Phi(x + y) \\ \Phi(0) &= 0 \\ \Phi(1) &= 1 = \text{identidad} \\ \Phi(x) \cdot \Phi(y) &= \Phi(xy) \end{aligned}$$

Históricamente, en los comienzos sólo tenía sentido el concepto de *representaciones equivalentes* o, como preferimos decir actualmente, *representaciones isomorfas*. Dadas dos representaciones, $\Phi_1 : \Lambda \rightarrow V_1$, $\Phi_2 : \Lambda \rightarrow V_2$, se decía que eran equivalentes o isomorfas, y se escribía

$$\Phi_1 \cong \Phi_2$$

³En este curso suponemos, salvo aviso contrario, que las k -álgebras son de dimensión finita.

⁴Analogamente son definidas las acciones de un grupo cualquiera, T , en $(G, +)$ como los homomorfismos de T en el grupo de los endomorfismos inversibles (es decir, de los automorfismos) de G , $\Phi : T \rightarrow \text{Aut}G$. Son llamados de representaciones de T .

si existía un isomorfismo $u : V_1 \rightarrow V_2$ tal que, para todo $x \in \Lambda$,

$$\Phi_2(x)(v) = u \cdot \Phi_1 \cdot u^{-1}(v) \quad \forall v \in V_2.$$

Posteriormente fue percibido que era conveniente definir *homomorfismos* entre representaciones. Como la relación anterior equivale a decir que la función u *intercambia* las representaciones: $\Phi_2 \cdot u = u \cdot \Phi_1$ resultó totalmente natural definir que una aplicación k -lineal $u : V_1 \rightarrow V_2$ define un homomorfismo de la representación Φ_1 en la representación Φ_2 si y sólo si, para todo $x \in \Lambda$,

$$\phi_2(x)u = u\phi_1(x).$$

Observación 1. *Adoptando la notación de módulos, el valor del endomorfismo $\Phi(x)$ en el elemento v , en vez de denotarse $(\Phi(x))(v)$, denótase, simplemente, como producto: xv . Haciendo así, las propiedades escritas arriba son:*

$$\begin{aligned} (x + y)v &= xv + yv \\ 0v &= 0 \\ 1v &= v \\ (xy)v &= x(yv) \end{aligned} \quad \forall x, y \in \Lambda; v \in V,$$

y, como son morfismos aditivos, vale también

$$x(v + w) = xv + xw \quad \forall x \in \Lambda; v, w \in V,$$

y en el caso vectorial, como son morfismos lineales, vale:

$$x(\alpha v) = \alpha(xv) \quad \forall \alpha \in k; x \in \Lambda; v \in V.$$

En otras palabras, dar una k -representación de Λ es equivalente a dar un Λ -módulo. El uso de la terminología de la teoría de representaciones es más antiguo, más clásico y más "significante". El uso del lenguaje de módulos es más moderno y, en muchas ocasiones, simplifica la exposición. En este cursillo nos valdremos de la una o del otro.

Entre módulos (representaciones) están definidas diversas operaciones (ver Sección 2). Las más elementales son la *suma* y la *inclusión* (es decir la noción de sub-módulo/subrepresentación). También, la *suma directa*, que

conduce naturalmente a la noción de módulos o representaciones *indescomponibles*: los módulos no nulos que no admiten una descomposición en suma directa de dos módulos no nulos.

Decimos que el módulo M es suma directa de sus submódulos M_1, M_2, \dots, M_s :

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_s$$

cuando los M_i 's son submódulos *aditivamente independientes*⁵.

Consecüentemente, si consideramos las representaciones matriciales, la suma directa de dos acciones, S, T , que actúa en la suma directa de los espacios vectoriales correspondientes, es la representación matricial dada por

$$T \oplus S = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue, salvo que sea necesario, no distinguiremos entre objetos isomorfos.

Acostumbramos considerar que un módulo M está *conocido*, cuando se conocen todos los homomorfismos, es decir todas las aplicaciones Λ -lineares, $M \rightarrow N$ y $N \rightarrow M$, para todo módulo N .⁶

-o0o-

Como veremos, la categoría de las representaciones de Λ , es decir la categoría de los Λ -módulos está conocida si se conocen todos los módulos indescomponibles y los morfismos entre ellos. Esas representaciones (por lo

⁵Es decir, cada elemento de M , m , se escribe *de manera única* como suma de elementos m_i pertenecientes, respectivamente, a los M_i ; cuando los módulos M_i no son dados como submódulos de uno dado, también puede definirse la suma directa $\oplus_{i=1}^s M_i$ como el conjunto de las sucesiones $(m_i)_{i=1, \dots, s}$ con $m_i \in M_i \forall i = 1, \dots, s$.

⁶Los homomorfismos $f : \Lambda \rightarrow M$, con dominio Λ , están determinados por el elemento $f(1)$ pues $f(\lambda) = \lambda f(1)$, de forma que *conocer* M implica en conocer la acción de Λ sobre el espacio M , o sea, conocer la estructura de módulo de M . Además, conocer M implica en conocer el reticulado de sus submódulos pues $N < M$ equivale a que exista un monomorfismo $N \rightarrow M$.

menos teóricamente) resultan más fáciles de ser estudiadas en el caso de Λ ser una *álgebra de tipo finito*, esto es, una álgebra que, salvo isomorfismo, tiene apenas un número finito de módulos indescomponibles.

Así podemos entender que, históricamente, las primeras tentativas de investigación se dirigieran a clasificar las álgebras según el número y/o el "tamaño" de sus indescomponibles. Las de tipo infinito se clasificarían en álgebras de tipo *limitado* y *no limitado*. Las primeras, serían aquéllas en que las dimensiones de los indescomponibles están acotadas. Por su vez, las de tipo no limitado se clasificarían en los tipos *débilmente no limitado* y *fuertemente no limitado*, siendo estas últimas aquellas en que hay una infinidad de dimensiones, cada una con una infinidad de indescomponibles no isomorfos dos a dos.

Esta expectativa comenzó a ser derruir por los años 40 cuando fueron divulgadas dos conjeturas, ambiciosas y perturbadoras, del gran Richard Brauer.

La primera, B-T, I, afirmaba que si un álgebra es de tipo limitado, es de tipo finito. Fue demostrada por Roiter en 1965.

La segunda, B-T, II, que toda álgebra de tipo infinito es de tipo fuertemente no limitado⁷.

Quiere decir que esta línea de investigación resultó ser poco interesante pues, prácticamente, hay apenas dos grandes tipos de álgebras: finito e infinito, siendo que, desde este punto de vista, las de tipo infinito no se pueden clasificar en subclases.

Fue más o menos por ese tiempo que surgieron otras ideas para clasificar las álgebras (del punto de vista de sus representaciones) por así decir, por el *tamaño* de sus categorías de módulos o, mejor, por la posibilidad de describir todos sus módulos indescomponibles.

Los grandes tipos son: las álgebras de tipo finito, las álgebras con un número infinito de indescomponibles, pero que pueden ser agrupados en familias paramétricas (a un parámetro) y todas las demás.

⁷La historia de ésta es mucho más larga, confusa y compleja. En 1973, Nazarova y Roiter afirmaron haberla demostrado, usando técnicas de problemas matriciales que parecieron ininteligibles, en esa época, y no convencieron a los matemáticos occidentales. Pero la B-T, II fue clara y definitivamente probada, en la década de 80, independientemente, por Bautista-Gabriel-Roiter-Salmerón y por Fischbacher (ver [BGRS] y [F]).

Inicialmente la clasificación no surgió de este modo. Se consideraban, sí, las álgebras de tipo finito y las álgebras con indescomponibles agrupables de una forma bien especial en familias monoparamétricas (las llamadas álgebras de tipo *manso* o *tame*). Pero se consideraba también un otro tipo (las *salvajes* o *wild*), cuyas categorías de módulos contenían”, en un cierto sentido, las de las álgebras libres en dos variables.

Obviamente, estos tres tipos eran interesantes *per se*, pero se estaba muy lejos de tener una clasificación satisfactoria. Después de muchos años de trabajo y perfeccionamiento de las definiciones, Y. Drozd, en un famoso artículo de 1978 (ver [D]) consiguió probar: 1) que no hay álgebras simultáneamente mansas y salvajes y 2) que toda álgebra que no es mansa, *es* salvaje. Ésa fue la célebre *dicotomía* (ya que, estrictamente hablando, las álgebras de tipo finito *son* mansas y, por lo tanto, hay sólo dos clases) de los tipos de representación⁸.

Aparte de la teoría de representaciones, y con un alcance muchísimo más general, fueron desenvolviéndose, por la década de los 50, dos grandes ramas del álgebra: el *álgebra homológica* y la *teoría de categorías*⁹. Sin embargo, no tuvieron, inicialmente, grandes aplicaciones algebraicas y, al poco tiempo, ya había muchos que pensaban que estas teorías se estaban marchitando lentamente y que no tenían casi futuro en el área de álgebra. Hasta que el prodigioso trabajo de M. Auslander (principalmente a partir de los 70), dentro de la teoría de representaciones de álgebras de Artin, las revitalizó por completo.

Fueron muchos los que integraron significativamente ese movimiento de revitalización y no podemos hacer mención de todos, pero debemos reconocer la importancia de los trabajos pioneros de otro campeón de la teoría de categorías: P. Gabriel. Fue él que nos condujo como que de la mano a los enfoques más combinatorios, en tanto que Auslander explotaba con impresionante fertilidad los puntos de vista más homológicos.

⁸Ya desde los primeros años de la década de los 70 se había conseguido clasificar ciertas álgebras (las *hereditarias*, ver más adelante) en los tres tipos: finito, manso y salvaje, valiéndose de la presencia de una forma cuadrática bastante natural de origen geométrico. Las álgebras hereditarias son de tipo finito cuando la forma cuadrática es positiva definida; de tipo manso, cuando es positiva semi-definida y de tipo salvaje, cuando es indefinida.

⁹Puede pensarse, hoy, que la segunda es apenas un capítulo de la primera.

Y fueron ambos, y sus escuelas de Brandeis y Zürich, los grandes responsables por el resurgimiento de la teoría de representaciones y los que la hicieron crecer hasta el monumental deficio que conocemos hoy.

Aprovechando los desarrollos que se sucedieron, resultó posible, y hasta natural, introducir muchísimos otros tipos de álgebras que enriquecen la clasificación arriba mencionada. Muy poco podremos hablar de ellos.

-o0o-

Probablemente, la teoría de representaciones de álgebras comenzó a desarrollarse motivada por la teoría de representaciones de grupos, que había comenzado mucho antes ¹⁰.

Básicamente, los científicos estudiaban grupos más o menos concretos (que aparecieron en diversas teorías científicas¹¹) y grupos abstractos (estudiados especialmente por los matemáticos y por quienes tenían expectativas de, a partir de ellos, obtener nuevos resultados sobre los primeros). Rápidamente se vio que los grupos “concretos” eran representaciones” de grupos “abstractos”, y que las modalidades más importantes consistían en representaciones de estos grupos mediante matrices (es decir, representaciones lineales).

Así surgió la idea que, en lenguaje de nuestros días, se expresa diciendo que una *representación* lineal de un grupo G es un *homomorfismo* $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{M}_n(k)$, donde k era \mathbb{Q} o \mathbb{R} o \mathbb{C} . Los estudios que se siguieron mostraron que la teoría gana en belleza y simplicidad si se sustituye la representación, $\varphi(G)$, por la subálgebra generada por ella dentro del álgebra $\mathbb{M}_n(k)$.

Ya desde los antiguos tiempos de Hamilton se sabía que, trabajando formalmente, cualquier grupo, G , genera (por linealidad) un álgebra, kG , y fue evidente que el álgebra de matrices aludida más arriba no es nada más que una representación de esta álgebra kG . ¡Había nacido nuestra teoría!

Por ser la estructura de grupo mucho más rica e interesante que la estructura de álgebra, rápidamente se idearon métodos y desarrollaron técnicas

¹⁰Otro tema que, enseguida que se desarrolló el concepto, fue visto como un asunto típico de la teoría de representaciones de álgebras fue el de determinar las *formas canónicas* de matrices o de sistemas de matrices (ver 3).

¹¹Por ejemplo, los grupos clásicos, que aparecieron en la Geometría y en sus aplicaciones a la ciencia natural.

para estudiar sus representaciones (la teoría de anillos, y por ende la de álgebras, estaba totalmente "en pañales" todavía). Las representaciones de grupo más simples, claro, eran las llamadas *irreducibles*, es decir aquéllas que no admiten subrepresentaciones propias. Y rápidamente se percibió que (en los casos clásicos y salvo isomorfismo) ellas podían ser caracterizadas por ciertas funciones escalares muy peculiares: los *caracteres* del grupo, cuyo número era finito. (En verdad, en estos casos, cada representación tiene un carácter, el cual, de hecho, la caracteriza.)

Fue por ese entonces que se demostró uno de los teoremas capitales de la teoría:

Teorema de Maschke (primera versión). *En los casos clásicos ($k = \mathbb{Q}$, $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$) toda representación de un grupo finito es completamente reducible.*

Más precisamente: toda tal representación es suma directa de representaciones irreducibles (y su carácter, suma de caracteres irreducibles). Por lo tanto, en el caso, por ejemplo, de las representaciones complejas de los grupos finitos, bastaba dar un conjunto finito de números (la *tabla* de caracteres del grupo) para determinar todas sus representaciones.

Y no fue difícil desarrollar técnicas que, generalmente, permitían calcular la tabla de caracteres complejos de un grupo dado¹².

A partir de este momento, la gran teoría de representaciones de grupos se dividió en dos: el caso clásico (o *semisimple*), donde $p \nmid |G|$ y el *caso modular* (o no semisimple), donde $p \mid |G|$ ¹³.

Independientemente, la teoría general de anillos (y de álgebras) se iba desarrollando a gran velocidad y rápidamente fue percibido, como ya vimos, que las representaciones corresponden a ciertos tipos de acciones naturales de álgebras, que recibieron el nombre de *módulos*: las representaciones indescomponibles correspondiendo a los módulos indescomponibles; las subrepresentaciones, a los submódulos; las representaciones irreducibles, a los módulos *simples*; y las completamente reducibles a los módulos *semisimples*.

¹²Recíprocamente, existen apenas algunas familias de grupos finitos, particularmente de grupos *simples*, que son caracterizados (salvo isomorfía) por sus tablas de caracteres.

¹³Salvo pocas excepciones, todas las álgebras kG de este caso son salvajes y su teoría de representaciones se ha tornado sumamente sofisticada, compleja y difícil.

En la nueva teoría, el Teorema de Maschke adquirió máxima generalidad y hoy en día se le enuncia así:

Teorema de Maschke (segunda versión). *Si la característica de k no divide al orden de un grupo finito, G , entonces el álgebra del grupo, kG , es semisimple.*

1.1. Jacobson, Morita, Gabriel.

Desde los primeros días de la teoría de álgebras se observó que lo que era determinante para tener complicaciones y situaciones complejas era la presencia de la *nilpotencia*, es decir de objetos no nulos que admiten potencias nulas. Esto ya se evidencia con la no existencia de elementos nilpotentes. Por ejemplo, un cuerpo o un álgebra con división no tienen elementos nilpotentes (salvo el 0).

Mismo así, no es tan importante la existencia de *elementos* nilpotentes, sino la existencia *auto-representaciones*, es decir subrepresentaciones de ${}_{\Lambda}\Lambda$ (o, en lenguaje propio de la teoría de anillos, ideales de Λ), que sean nilpotentes. En ese sentido, basta observar que las álgebras de matrices, tienen todas sus representaciones completamente reducibles, no tienen ideales (no nulos) nilpotentes, pero sí contienen elementos nilpotentes. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así cobró importancia el ideal \underline{r} , o \underline{r}_{Λ} , llamado el *radical* de Λ que contiene todos los ideales nilpotentes. Resulta que él mismo es nilpotente y que es estable por multiplicaciones a la derecha. Por lo tanto, es el máximo ideal nilpotente del álgebra y que es un ideal bilateral¹⁴. Y puede probarse (ver la sección 2.4) que el álgebra es "óptima" (es decir, semisimple) si y sólo si su ideal \underline{r} es 0.

Con los progresos alcanzados en la teoría de anillos, también el concepto de radical fue mucho mejor estudiado y comprendido y se le pudo generalizar para un anillo cualquier. Ya no es más nilpotente en el caso general. En

¹⁴Un ideal de Λ , $I < \Lambda$ se llama *bilateral*, y se escribe $I \triangleleft \Lambda$, si $\forall x \in \Lambda, Ix \subset I$ (ver sección 2).

homenaje a su creador, y gran algebrista, N. Jacobson recibe el nombre de *radical de Jacobson* del anillo (ver [J]).

Una propiedad característica de los ideales bilaterales, como \underline{r} , es que el espacio vectorial cociente, en el caso $\Lambda/\underline{r} = \{x + \underline{r}/x \in \Lambda\}$, tiene una estructura natural de álgebra (definiendo el producto de clases $(x + \underline{r}) \cdot (y + \underline{r})$ como igual a la clase del producto $xy + \underline{r}$).

Corroborando la importancia del radical para el buen comportamiento del álgebra en cuanto a sus representaciones, podemos anotar que el álgebra cociente por el radical, Λ/\underline{r} , es siempre un álgebra semisimple. A veces se la llama el *topo* o el *topo semisimple* del álgebra Λ .

Otro de los progresos que son importantes para nosotros son los *teoremas de Morita*. Sin entrar en detalles, expliquemos lo que nos interesa a partir de la siguiente definición.

Definición 1. El álgebra Λ se llama *básica* si en su descomposición en suma directa de proyectivos indescomponibles no hay repeticiones”, es decir todos ellos son no isomorfos dos a dos.

Si Λ y Γ son álgebras tales que las categorías $\text{mod-}\Lambda$ y $\text{mod-}\Gamma$ son equivalentes, entonces se dice que Λ y Γ son *Morita-equivalentes*.

Los teoremas de Morita garantizan que toda álgebra es Morita-equivalente a un álgebra básica, que es única salvo isomorfía¹⁵.

Puesto que, si dos álgebras son Morita-equivalentes, sus categorías de módulos son categorías equivalentes, se suele estudiar la teoría de representaciones suponiendo que el álgebra es básica.

También se deduce inmediatamente del Teorema de Wedderburn (ver teorema 5) que una álgebra es básica si y sólo si su topo es producto de álgebras con división (cuerpos no necesariamente conmutativos, extensiones finitas de k). Por lo tanto (cuando k es algebraicamente cerrado), si y sólo si

$$\Lambda/\underline{r} \cong k \times k \times \cdots \times k \text{ (como álgebra),}$$

y

$$\Lambda/\underline{r} \cong k \oplus k \oplus \cdots \oplus k \text{ (como módulo).}$$

Finalmente, el último progreso relevante que queremos mencionar en esta introducción histórica está relacionado con la siguiente definición.

¹⁵Como se dice, la única álgebra básica Morita-equivalente a ella.

Definición 2. Se dice que el álgebra Λ es *split* si el radical \underline{r} , como submódulo, es sumando directo de ${}_{\Lambda}\Lambda$, es decir, existe un submódulo S tal que $\Lambda = S \oplus \underline{r}$. En tal caso, S contiene todos los idempotentes de Λ y es una álgebra isomorfa al topo semisimple.

El Teorema de Wedderburn+Malcev (ver [C-R, Theorem 72.19]) permite deducir de forma directa que, si k es algebraicamente cerrado, entonces Λ es split.

Los hechos anotados arriba permitieron a Gabriel realizar sus descubrimientos fundamentales de 1972 que, como ya anotamos, llevaron a un verdadero resurgimiento y a una total renovación de la Teoría de Representaciones de Álgebras.

Inicialmente (pero siempre cuando k es algebraicamente cerrado) Gabriel asoció al álgebra un *quiver*, o grafo orientado, llamado el *quiver ordinario* de Λ y denotado por \mathbf{Q}_{Λ} (ver la definición 23). Los teoremas más importantes de Gabriel en este momento del desarrollo de la teoría son:

Teorema 1. (Gabriel - caracterización combinatoria). *Sea Λ una álgebra básica sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, k , y sea \mathbf{Q} su quiver ordinario. Entonces, existe un ideal $\mathbf{I} \triangleleft k\mathbf{Q}$, que no contiene ninguna combinación lineal de flechas, tal que $\Lambda \cong k\mathbf{Q}/\mathbf{I}$ y tal que el radical de este cociente es generado por los representantes de las flechas de \mathbf{Q} . (Ver secciones 2.5 y 5.)*

Teorema 2. (Gabriel - álgebras hereditarias). *Λ es hereditaria si y sólo si $\Lambda \cong k\mathbf{Q}_{\Lambda}$ y, si k es algebraicamente cerrado, Λ es de tipo de representación finito si y sólo si \mathbf{Q}_{Λ} es un diagrama de Dynkin de tipo \mathbf{A}_n o \mathbf{D}_n ($n \geq 4$) o $\mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$. (Ver sección 5.)*

2. Conocimientos básicos, preliminares.

Comenzamos en esta sección la parte matemática del cursillo. Vamos a incluir en este "punto de partida" los conocimientos básicos necesarios. Se les supone conocidos pero pensamos que, anotándolos, será más fácil acompañar el texto.

En todo lo que sigue, k es un cuerpo de característica p y Λ un álgebra de dimensión finita sobre k . En ciertas ocasiones precisaremos la hipótesis de k ser algebraicamente cerrado (por ejemplo, $k = \mathbb{C}$). Para indicar esto, denotaremos $k = \bar{k}$.

2.1. Álgebras y módulos.

Definición 3. Una k -álgebra es un k -espacio vectorial, Λ , munido de una operación doblemente distributiva, asociativa y con elemento neutro, 1 , tal que (denotándola multiplicativamente)

$$(\alpha 1)x = x(\alpha 1) = \alpha x \quad \forall \alpha \in k, x \in \Lambda.$$

Ejemplo 1.

- Sea V un k -espacio vectorial de dimensión finita d y sea $\mathcal{L}(V)$ el conjunto de los k -endomorfismos de V . $\mathcal{L}(V)$, con las operaciones lineales usuales, es un k -espacio vectorial de dimensión d^2 . Y, con la multiplicación definida por la composición de funciones, es una k -álgebra.
- Si V es una suma directa de k -espacios vectoriales

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_t,$$

los endomorfismos de V son representados por matrices $(f_{ij})_{ij}$, de tamaño $t \times t$:

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1t} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f_{t1} & \cdots & f_{tt} \end{pmatrix}$$

donde $f_{ij} : V_i \rightarrow V_j$ es la proyección sobre V_j de la restricción de f a V_i .

Más explícitamente,

$$\mathcal{L}(V) \cong \begin{pmatrix} \mathcal{L}(V_1, V_1) & \cdots & \mathcal{L}(V_t, V_1) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \mathcal{L}(V_1, V_t) & \cdots & \mathcal{L}(V_t, V_t) \end{pmatrix},$$

donde utilizamos el símbolo usual $\mathcal{L}(U, W)$ para denotar el k -espacio vectorial de las aplicaciones lineales del espacio vectorial U en el espacio vectorial W .

- En el ejemplo anterior, si todos los V_i son isomorfos a k , todas las f_{ij} consisten en la multiplicación por un escalar $\alpha_{ij} \in k$ y recuperamos el primero de estos ejemplos. El resultado es conocido:

$$\mathcal{L}(V) \cong \mathbb{M}_t(k) \quad t = \dim(V).$$

Ejemplo 2. Sea G un grupo (denotado multiplicativamente). El k -espacio vectorial de las combinaciones k -lineales formales $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ (es decir, el k -espacio vectorial de base G) se transforma en una k -álgebra si se extiende a él (por linealidad) la multiplicación de G . Esta álgebra es el *álgebra de G con coeficientes en k* , y se la puede denotar por kG . Si G es un grupo finito, su dimensión es igual al orden de G . Admite una *base multiplicativa*: el propio grupo G ¹⁶.

Definición 4. Dado un epimorfismo de k -álgebras, $\pi : \Lambda \rightarrow \bar{\Lambda}$, él *aplica en su imagen, $\bar{\Lambda}$, las operaciones de Λ ¹⁷ induciendo en ella una estructura de k -álgebra. En este caso, se dice que $\bar{\Lambda}$ es un cociente de Λ .*

De hecho, el cociente depende solamente del núcleo de π : $\ker(\pi) = \{x \in \Lambda / \pi(x) = 0\}$, que es un ideal bilateral de Λ (ver la definición más adelante) y el cociente $\bar{\Lambda}$ puede ser construido directamente a partir de él. Si se denota este kernel por I , $\bar{\Lambda}$ es isomorfa al álgebra obtenida a partir del conjunto de las clases módulo I : $\{x + I / x \in \Lambda\}$, con las operaciones óbvias: si \bar{x} denota en general la clase de x módulo I , $x + I$, las operaciones son $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$, etc. Este cociente, en particular, se denota por Λ/I y el epimorfismo $x \mapsto \bar{x}$, se llama *canónico*.

Definición 5.

1. Una álgebra se llama *simple* si no tiene cocientes propios.

¹⁶Una base B de un álgebra es *multiplicativa* si el producto de dos cualesquiera de sus elementos es 0 u otro de esos elementos.

¹⁷Por ejemplo, el producto de dos imágenes, $\pi(x)\pi(y)$, es la imagen del producto, $\pi(xy)$, que es idependiente de los representantes x, y elegidos.

2. Un álgebra se llama *semisimple* si es un producto directo de álgebras simples.

Ejercicio(s) 1.

- Mostrar que una álgebra es simple si y sólo si no tiene ideales bilaterales no triviales (es decir, $\neq 0, \Lambda$).
- Mostrar que toda álgebra de matrices sobre k , $\mathbb{M}_n(k)$, es simple.
- Generalizar.

Observación 2. Dada una k -álgebra Λ , la dimensión del k -espacio vectorial Λ se llama también dimensión *del álgebra* Λ . Como ya lo hemos dicho, en este curso todas las álgebras consideradas, salvo aviso en contrario, son de dimensión finita.

Para facilitar la siguiente exposición, denotemos la dimensión de Λ por d .

La multiplicación (del lado izquierdo o del lado derecho) por un elemento fijo define un endomorfismo lineal del álgebra el cual, en la presencia de una base, puede representarse por una matriz con entradas en k . Es un simple ejercicio comprobar que la asociación $x \mapsto x \cdot$ define un monomorfismo de álgebras de Λ en $\mathcal{L}(\Lambda) = \text{End}_k(\Lambda)$. En este sentido, toda álgebra (de dimensión finita) es una subálgebra de una álgebra de matrices. Más precisamente, salvo isomorfía, $\Lambda \subset \mathbb{M}_d(k)$.

Definición 6. Sea Λ una k -álgebra y V un k -espacio vectorial. Decimos que V tiene una estructura de Λ -módulo (o que *es* un Λ -módulo) si se fija un homomorfismo de k -álgebras:

$$\Phi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}_k(V).^{18}$$

Por ejemplo, Λ en sí misma es, trivialmente, un Λ -módulo. Algunas veces escribiremos ${}_{\Lambda}\Lambda$ en lugar de Λ para enfatizar esto.

Observación 3. Historicamente, tuvieron, naturalmente, gran importancia los problemas relacionados con la clasificación de sistemas de matrices. Los más simples se plantean la clasificación, salvo isomorfía, de una matriz. Veamos algunos ejemplos.

¹⁸La dimensión del espacio V es también llamada dimensión del módulo V . En todo lo que sigue, salvo aviso en contrario, todos los módulos considerados son de dimensión finita.

- Consideremos primero el problema de clasificar matrices rectangulares o, equivalentemente, el problema de clasificar homomorfismos entre espacios vectoriales: $U \xrightarrow{T} V$. Este problema, así como su solución, son bien conocidos: toda matriz (aplicación lineal) es equivalente, salvo isomorfía, a una matriz diagonal de la forma $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$, con r , digamos, 1's. (Si no es vacía) la matriz es caracterizada, salvo isomorfía, por el número r , llamado *rango* (*rank*) de la matriz. (Esta diagonalización se obtiene por el conocido algoritmo de escalonamiento.)

También es claro que toda aplicación lineal es suma directa de indecomponibles y son los representantes de éstas que se llaman las formas canónicas que resuelven el problema. En este caso, son tres: $k \xrightarrow{1} k$, $0 \rightarrow k$ y $k \rightarrow 0$, siendo que solamente la primera corresponde a una matriz ñão vacía.

- El siguiente problema es el de clasificar las matrices cuadradas *salvo semejanza*. Aquí, dos aplicaciones lineales T, T' se consideran isomorfas cuando hay un diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{T} & U \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ U & \xrightarrow{T'} & U \end{array},$$

(con φ un automorfismo) es decir cuando vale que $T' = \varphi T \varphi^{-1}$.

Hallar las formas canónicas, es decir los representantes de las clases de isomorfía, de matrices semejantes, es un problema bastante difícil. Cuando $k = \bar{k}$, las formas canónicas de los endomorfismos indecomponibles son precisamente las *matrices de Jordan*. Son infinitas en número y, como es conocido, tienen la forma general siguiente.

$$J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ 0 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(k).$$

- Finalmente, otro problema famoso fue el de clasificar todos los *pares ordenados* de matrices, es decir todos los sistemas de aplicaciones lineales de la forma

$$U \begin{array}{c} \xrightarrow{T} \\ \xrightarrow{S} \end{array} V.$$

Este problema fue resuelto por Kronecker por el fin del siglo XIX y en las últimas décadas se prefiere denominarlo *problema de Kronecker* (ver el penúltimo ejemplo de 4).

Todos estos problemas son, en verdad, problemas de la teoría de representaciones de álgebras.

Ejercicio(s) 2. Para cada uno de estos problemas clásicos, hallar un álgebra cuyos módulos corresponden exactamente a las instancias particulares del problema.

Observación 4. Es óbvio que, dado un k -espacio vectorial, M , y una k -álgebra libre, Λ (como, por ejemplo, el álgebra de los polinomios en una indeterminada, sobre k), cuando se conoce un conjunto de generadores (generadores de álgebras), A , de Λ (es decir una base del álgebra libre), para definir una estructura de Λ -módulo sobre M basta definir una aplicación $A \rightarrow \text{End}_k(M)$ y extenderla a Λ ¹⁹. Por ejemplo, en ese caso de Λ ser el anillo de los polinômios en una indeterminada, X , con coeficientes en k , $k[X]$, (que tiene como base el monomio X), para definir una estructura de módulo en M basta escoger *una* aplicación lineal $T : M \rightarrow M$, que realice la acción de X .

¹⁹Esa es, precisamente, la propiedad universal que caracteriza las álgebras libres.

Para simplificar la exposición, denotaremos el módulo indescomponible definido por la matriz $T = J_{n,\lambda}$, simplemente, por $J_{n,\lambda}$, y lo llamaremos el *módulo de Jordan* de dimensión n y valor propio λ .

De esta forma vemos que el problema de clasificar los endomorfismos, bajo semejanza, es el mismo que el problema de estudiar las representaciones de $k[X]$, o de determinar los módulos indescomponibles sobre $k[X]$. Este problema, con todo, queda fuera del ámbito de nuestro cursillo, porque esta álgebra es de dimensión infinita.

Definición 7. Dados los Λ -módulos M_1, M_2 , definidos por sendos homomorfismos $\Phi_1 : \Lambda \rightarrow \text{End}M_1$, $\Phi_2 : \Lambda \rightarrow \text{End}M_2$, un *homomorfismo* de M_1 en M_2 es una aplicación aditiva $u : M_1 \rightarrow M_2$ tal que, para todo $x \in \Lambda$, $\Phi_2(x)u = u\Phi_1(x)$.

Con estos *morfismos*, los Λ -módulos (de dimensión finita, forman una *categoría* que denotaremos por $\text{mod } \Lambda$.

Si se usa en general, como es habitual, la notación $x \cdot$ (en lugar de $\Phi(x)$) para todas las representaciones, Φ , un Λ -módulo es un k -espacio vectorial munido de una multiplicación por escalares de Λ para la cual la unidad, 1 , actúa como la identidad (ver detalles en la observación 1).

Con esta notación, un homomorfismo de M_1 en M_2 es una aplicación k -lineal, $u : M_1 \rightarrow M_2$ tal que

$$u(xm) = xu(m) \quad \forall x \in \Lambda; m \in M_1,$$

es decir, tal que es Λ -lineal.

Definición 8.

1. Dado un monomorfismo de módulos, $i : L \rightarrow M$, él aplica la estructura de L en su imagen dentro de M . Este subconjunto de M se llama *submódulo* de M , y si $i(L) = N$ se acostumbra denotar esta situación por el símbolo $N < M$. También puede pensarse que esa estructura de módulo en el subconjunto N es *inducida* por o *heredada* de la estructura de M .

2. Dado un epimorfismo de módulos $\pi : M \rightarrow N$, él aplica la estructura de M en su imagen, N y se dice que este módulo es un *cociente* de M . En verdad él está determinado, salvo isomorfía, por el núcleo de π , $\ker(\pi)$ (que es un submódulo $K < M$), y puede ser identificado al conjunto de las clases módulo K : $\{\bar{x} = x + K/x \in M\}$. Este cociente, en particular, se denota por M/K y el epimorfismo $x \mapsto \bar{x}$ se llama *canónico*.

Los submódulos de ${}_{\Lambda}\Lambda$ se llaman *ideales* de Λ .

Los ideales estables para endomorfismos de Λ se llaman *bilaterales*. Como ${}_{\Lambda}\Lambda$ es generado por el idempotente 1, todo endomorfismo de Λ consiste en la multiplicación por la derecha por un elemento $x \in \Lambda$ (ver más abajo el corolario 1 y su demostración). Consecuentemente, un ideal $I < \Lambda$ es un ideal bilateral si $\forall x \in \Lambda, Ix \subset I$. Para decir que I es un ideal bilateral de Λ , se usa la notación $I \triangleleft \Lambda$.

Cada elemento m de un módulo cualquiera define (o genera) un submódulo, llamado *cíclico*, $\Lambda m = \{\lambda m/\lambda \in \Lambda\}$. Más generalmente, cualquier subconjunto, A , del módulo *genera* un submódulo (que es la suma de los submódulos cíclicos definidos por cada uno de sus elementos):

$$\Lambda A = \sum_{a \in A} \Lambda a.$$

Siendo de dimensión finita, todos nuestros módulos son *finitamente generados*.

La *suma* de una familia (cualquiera) de submódulos de M es, por definición, el menor submódulo que los contiene a todos, es decir el submódulo formado por todas las sumas posibles de elementos de esos submódulos. Esta operación de suma es asociativa, conmutativa y tiene como elemento neutro el submódulo 0 (cuyo único elemento es el 0 del espacio). Es claro que la suma de varios submódulos es el mínimo submódulo que los contiene a todos²⁰.

Toda familia (no vacía) de submódulos tiene elementos maximales y minimales (son, respectivamente, los elementos de dimensión máxima y de dimensión mínima).

²⁰ Así, entre módulos, esta operación, suma, es como la operación unión, entre conjuntos.

Definición 9.

1. Decimos que un módulo no nulo es *simple* o *irreducible* si no tiene submódulos propios²¹.
2. Decimos que un módulo es *semisimple* si es suma directa²² de módulos simples.

Para que un módulo cíclico, no nulo, sea simple es necesario y suficiente que sea generado por cada uno de sus elementos no nulos.

Repitiéndonos un poco, digamos que puede ser definida naturalmente la *suma directa* de Λ -módulos, y que un módulo es *indescomponible* si no es isomorfo a la suma directa de dos submódulos distintos de 0 y de él mismo. Obviamente, todo módulo simple es indescomponible (pero el recíproco no es válido necesariamente).

Dados los submódulos N, M con $N < M$, decimos que N es *sumando directo* de M y escribimos $N|M$ si existe $N' < M$ tal que $M = N \oplus N'$. En este caso, acostúmbrase decir que N y N' son complementarios en M , o que N' es un suplemento de N en M .

Los ideales se pueden también *multiplicar*: si $I, J < \Lambda$, IJ es el ideal generado por todos los productos xy con $x \in I$ e $y \in J$. El producto de ideales es asociativo y tiene como elemento neutro el ideal trivial ${}_{\Lambda}\Lambda$. El producto de ideales es distributivo (por ambos lados) con relación a la suma de ideales²³.

Ejercicio(s) 3.

- Probar las propiedades del producto de ideales que acabamos de mencionar.

²¹Rigurosamente hablando, los módulos irreducibles serían aquéllos que no tienen submódulos propios y, los simples, los que no tienen cocientes propios. Como $\text{mod-}\Lambda$ es una *categoría abeliana* (es decir, como todo homomorfismo de módulos tiene núcleo y conúcleo), resulta que estos dos conceptos coinciden.

²²Ver la definición más abajo.

²³Esta notación IJ para el producto de dos ideales es un caso particular de la siguiente. Si $A \subset \Lambda$ y M es un Λ -módulo, AM , como ya vimos, es el submódulo generado por todos los productos de un elemento de A por un elemento de M , es decir el conjunto de todas las sumas de esos productos.

- Probar que el ideal I^n es el ideal generado por todos los productos de n factores pertenecientes a I .
- Dados $I, J < \Lambda$, probar que $(I + J)^n$ es el ideal generado por todos los productos de n factores pertenecientes a I o a J , es decir a $I \cup J$.

Una de las propiedades básicas más importantes es el

Teorema 3. (Krull-Schmidt) *Todo módulo, M , es suma directa de una familia finita (eventualmente vacía) de submódulos indescomponibles:*

$$M = \bigoplus_{j=1}^m M_j \quad (M_j \text{ indescomponible, par todo } i = 1, \dots, m)$$

y esta descomposición es única, en el sentido de que cualquier otra descomposición es conjugada de ella.

O sea, si, además,

$$M = \bigoplus_{j=1}^{m'} M'_j \quad (M'_j \text{ indescomponible, para todo } j = 1, \dots, m'),$$

entonces $m = m'$ y existe un elemento inversible de Λ , u , tal que

$$M'_i = uM_iu^{-1}, \quad (\forall i = 1, \dots, m).$$

Consecuentemente, todo Λ -homomorfismo es de la forma

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_s \xrightarrow{f} N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r,$$

es decir es definido por una matriz $r \times s$

$$f = (f_{ij})_{ij},$$

donde $f_{ij} : M_j \rightarrow N_i$. Eso significa que la función f está dada por la siguiente multiplicación de matrices.

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_s \end{pmatrix}.$$

$$x_j \in M_j, \quad f(x_i) = \sum_j f_{ij}(x_j) \in N_i.$$

Demostración. Omitida.

Observación 5. En particular, ${}_{\Lambda}\Lambda$ tiene una descomposición esencialmente única en suma directa de indescomponibles:

$$\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_t.$$

Observación 6. Toda vez que se tiene una descomposición de Λ :

$$\Lambda = P \oplus Q,$$

la correspondiente descomposición de la unidad:

$$1 = e_P + e_Q \quad (e_P \in P, e_Q \in Q),$$

nos da los elementos e_P, e_Q que, como es muy fácil comprobar, son idempotentes ortogonales (y complementarios, en el sentido de que su suma es 1)²⁴.

2.2. Módulos proyectivos.

Definición 10. Um Λ -módulo se llama *proyectivo* si es suma directa de sumandos directos de Λ .

Por lo visto arriba, es inmediato probar que

Proposición 1. *Los módulos proyectivos que son submódulos de Λ , son generados por idempotentes.*

Es decir: $P < \Lambda \Rightarrow$ existe $e \in \Lambda$ tal que $e^2 = e$ y $P = \Lambda e$.

Corolario 1. *Si $P < \Lambda$ es un módulo generado por un idempotente, e , $\text{Hom}_{\Lambda}(P, M) \cong_k eM$*

²⁴Es un ejercicio simple probar que, si un módulo es generado por un idempotente y se descompone como suma directa de varios, entonces cada uno de ellos también es generado por un idempotente, éstos son dos a dos ortogonales y su suma es el idempotente generador del módulo dado.

Demostración. Si $P = \Lambda e$ y $f : P \rightarrow M$, f está determinado por $f(e) = f(e^2) = ef(e) \in eM$. \square

Todo módulo es imagen de un proyectivo. En efecto, si M tiene como conjunto generador a m_1, m_2, \dots, m_r , existe un epimorfismo del módulo proyectivo $\bigoplus_{i=1}^r \Lambda$ que asigna a cada sucesión (x_1, \dots, x_r) la suma $\sum_i x_i m_i$.

Definición 11. Si P es un proyectivo de dimensión mínima entre los que admiten un epimorfismo f sobre M , se dice que $f : P \rightarrow M$ es una *cobertura proyectiva minimal* de M .

Ejercicio(s) 4.

- Muestre que todo diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow & & \\ M_1 & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

com P proyectivo y el homomorfismo de la línea inferior un epimorfismo, puede sumergirse en un diagrama conmutativo del tipo siguiente.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ M_1 & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Recíprocamente, pruebe que, si un módulo, en el lugar de P , satisface esta propiedad universal, entonces es proyectivo.

- Pruebe que para que P sea proyectivo es necesario y suficiente que todo epimorfismo con imagen P sea escindido.
- todas las coberturas proyectivas minimales de un módulo son isomorfas entre sí.

Observación 7. Los módulos proyectivos encierran casi todas las propiedades homológicas más importantes del álgebra. En particular, se dice que la *dimensión homológica* de un módulo M es $\leq s$, y se escribe $\text{hd}(M) \leq s$, si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow P_s \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con todos los P_i 's proyectivos ²⁵. Si todos los módulos tienen dimensión proyectiva $\leq s$, se dice que la *dimensión global* de Λ es $\leq s$ y se escribe $\text{gldim}(\Lambda) \leq s$.

Salvo isomorfismo, los módulos proyectivos indescomponibles son en número finito; son los P_i 's de la observación 5.

Notación 1. La categoría de los Λ -módulos, proyectivos se denota $\mathcal{P}(\Lambda)$. Es la subcategoría plena de $\text{mod } \Lambda$ cuyos objetos son todos los módulos proyectivos de dimensión finita.

2.3. El radical.

Definición 12.

- Un ideal, I , se llama *idempotente*, si $I^2 = I$.
- Un ideal, I , se llama *nilpotente*, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$. (El menor de tales exponentes n se llama *índice de nilpotencia* de I).

Ejercicio(s) 5.

- Muestre que la suma de dos ideales nilpotentes es nilpotente (sugerencia: aproveche el último ejercicio de 3 y muestre que esa suma, elevada a la suma de los índice de nilpotencia, es 0).

Proposición 2. *Toda álgebra, Λ (de dimensión finita) tiene un (único) ideal nilpotente maximal, \underline{r} , llamado el radical de Λ .*

Demostración. Sea $N < \Lambda$ nilpotente maximal (es decir, de dimensión máxima entre los nilpotentes). Si $I < \Lambda$ es nilpotente, entonces $N+I$ también lo es (ver el último de los ejercicios 5), de modo que $I \subset N$. \square

Definición 13. Dado un módulo, M , se llama *radical* de M al submódulo $\underline{r}M$, donde \underline{r} es el radical del álgebra.

Ejemplo 3. Sea G un p -grupo metabeliano elemental (es decir, un producto de grupos cíclicos de orden p). Entonces, para cada $g \in G$, $(g - 1)^p = 0$, de forma que el ideal ΔG generado por esas diferencias es nilpotente. Se deduce que él es el radical de kG .

²⁵Una tal sucesión exacta, desconsiderando el primer módulo, 0, se llama una *resolución* (proyectiva) de M y, si $s = 1$, una *presentación proyectiva* de M .

2.4. Álgebras y módulos semisimples.

Definición 14. Diremos que un ideal I es un *imi* si es un ideal idempotente minimal.

Teorema 4. (Lema de Schur) *Dado un Λ -homomorfismo $f : S \rightarrow M$, si S es un módulo simple, entonces o $f = 0$ o f es un monomorfismo. Como corolario, $\text{End } S$ es una k -álgebra con división.*

Ejercicio(s) 6.

- Sean $I_1, I_2 < \Lambda$ y supongamos que I_2 es un imi no contenido en I_1 . Muestre que $I_1 + I_2 = I_1 \oplus I_2$.
- Muestre que si $I < \Lambda$ es un imi, entonces I es generado por un idempotente *indescomponible* (es decir, existe un idempotente, e , que no puede ser escrito de manera no trivial como suma de dos idempotentes ortogonales, tal que $I = \Lambda e$). (Sugerencia: Como $I^2 = I$, existe en I un elemento no nulo, x , tal que $I = Ix$. Entonces, existe otro, y , tal que $yx = x$. La multiplicación $\cdot x$ define, entonces, un endomorfismo no nulo de I . Como $(y - y^2)x = 0$, resulta $y = y^2$.)

Lema 1. *Si $I_1, I_2 < \Lambda$ son imis, entonces son equivalentes:*

- $I_1 I_2 \neq 0$;
- $I_1 I_2 = I_2$;
- $I_1 \cong I_2$.

Demostración. Como el producto está contenido en I_2 , si no es nulo debe ser igual a I_2 . Si $x \in I_2$, $x \neq 0$ es tal que $I_1 x = I_2$, pelo Lema de Schur, $\cdot x$ define un isomorfismo. Finalmente, como I_1, I_2 son generados por sendos idempotentes, e_1, e_2 , todo homomorfismo $I_1 \rightarrow I_2$ es dado por multiplicación por un elemento de la forma $e_1 a e_2$, lo que prueba que $I_1 e_2 \neq 0$. ■

Lema 2. *Si un módulo es una suma (no necesariamente directa) de módulos simples, entonces es semisimple.*

Demostración. Sea $M = \sum_i S_i$, con los S_i simples. Sea M' un submódulo de dimensión máxima entre los que son suma directa de algunos S_i . Entonces, por el primero de los ejercicios anteriores, M' contiene a todos los S_i , es decir: $M' = M$. ■

Proposición 3. *Dado una álgebra Λ , son equivalentes:*

- *El radical de Λ , \underline{r} es nulo;*
- *${}_{\Lambda}\Lambda$ es semisimple.*

Demostración. Si $\underline{r} = 0$, todo ideal minimal es un imi. Sea $M < {}_{\Lambda}\Lambda$ maximal entre los que son suma directa de imis. Entonces, M mismo es generado por un idempotente, e , y es, por lo tanto, sumando directo de Λ . Si $e \neq 1$ y si I es un imi contenido en el complemento $\Lambda(1 - e)$, de M , $I \not\subseteq M$ y por lo tanto, $M + I = M \oplus I$, una contradicción que demuestra una de las implicaciones. Recíprocamente, sea ${}_{\Lambda}\Lambda$ semisimple y sea I un ideal cualquiera. Se tiene:

$$I = \Lambda I = \sum_{m \in I} \Lambda m.$$

Como cada Λm es suma de imis, I es semisimple y, consecuentemente, generado por un idempotente, lo que prueba que no es nilpotente. ■

Teorema 5. (Teorema de Wedderburn) *Las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

1. Λ es un álgebra semisimple;
2. ${}_{\Lambda}\Lambda$ es un módulo semisimple;
3. Λ es un producto de álgebras de matrices $M_{n_i}(F_i)$ de álgebras con división, F_i .

Corolario 2. Λ es un álgebra simple si y sólo si es de la forma $M_n(F)$, donde F es un álgebra con división.

Demostración. Supongamos la afirmación 1. Por la definición, Λ es un producto de álgebras simples, las cuales no tienen ideales no triviales. Se deduce que el radical de Λ es nulo, lo que prueba 2 por la proposición 3. Si vale 2, Λ es suma directa de imis y podemos asociar éstos en las sumas de sus clases de isomorfía, B_i . De modo que $\Lambda = \bigoplus B_i$. Ahora, cada B_i es un módulo semisimple isotípico (es decir, sus componentes son imis isomorfos dos a dos), de modo que, por el lema 1, los B_i 's son ideales bilaterales ortogonales dos a dos. Esto quiere decir, precisamente, que $\Lambda = \prod B_i$. Consideremos ahora uno de estos ideales bilaterales B_i y denotémoslo simplemente por B . Por lo visto más arriba, $B^2 = B$ y B es generado por un idempotente, e , que es elemento

neutro para la multiplicación restringida a B . Entonces B es isomorfo a su álgebra de endomorfismos que, por los ejemplos de 1 y por 2.1, es isomorfa al álgebra de matrices $\mathbb{M}_n(F)$, donde n es el número de sumandos imis cuya suma es B (que son todos ellos isomorfos a uno solo, digamos I) y donde F es el álgebra $\text{End}(I)$ que, por el lema de Schur, es un álgebra con división. Esto prueba la validez del enunciado 3. ■

Ejercicio(s) 7.

- Muestre que, si Λ es semisimple, todo Λ -módulo es semisimple.
- Muestre que Λ es semisimple si y sólo si todo módulo es proyectivo.
- Muestre que el *topo* de un módulo M (es decir el cociente de M por su radical $\underline{r}M$), a veces denotado $\text{top}(M)$, es semisimple. (Sugerencia: observar que $M/\underline{r}M$ es un Λ/\underline{r} -módulo.
- Muestre que el topo de un módulo proyectivo indescomponible es simple.
- Muestre que si $P \xrightarrow{\bar{\pi}} \text{top}M$ es una cobertura proyectiva del topo de M , entonces ella conduce naturalmente a una cobertura proyectiva, π , de M .

Observación 8. Los resultados de esta subsección muestran claramente cómo la teoría de módulos (o de representaciones) se complica en presencia de ideales nilpotentes, es decir en presencia de un radical no nulo. Podemos decir, en un cierto sentido poco preciso (y que vale solamente estadísticamente) que el índice de nilpotencia del radical mide su "profundidad", la cual mide la "profundidad." complejidad de la teoría de representaciones del álgebra.

2.5. Álgebras de caminos.

Definición 15. Un *quiver*, \mathbf{Q} , es una terna (V, F, \mathbf{L}) donde V y A son conjuntos (que supondremos finitos) (respectivamente, el conjunto de los *vértices* y el conjunto de las *flechas*), y donde $\mathbf{L} : A \rightarrow V \times V$

$$\mathbf{L}(\alpha) = (s(\alpha), e(\alpha))$$

$s(\alpha)$ se llama el *vértice inicial* y $e(\alpha)$ el *vértice final* de la flecha α .

Acostumbramos utilizar aquí una terminología intuitiva natural. Por ejemplo, decimos que la flecha α va de $s(\alpha)$ a $e(\alpha)$, etc.

Definición 16. Sea \mathbf{Q} un quiver y fijemos un conjunto de objetos ϵ_i ($i \in V$).

1. Um *camino*, p , de \mathbf{Q} es una sucesión finita de flechas

$$p = \alpha_t \alpha_{t-1} \cdots \alpha_1,$$

concatenada, es decir tal que $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ $i = 1, 2, \dots, t-1$.

El vértice $s(\alpha_1)$ se llama vértice inicial de p y se denota por $s(p)$; el vértice $e(\alpha_t)$ se llama vértice final de p y se denota por $e(p)$; el número t se llama *longitud* de p ; si $s(p) = e(p)$, se dice que p es un *ciclo* o un em circuito orientado. Los ciclos de longitud 1 se llaman *loops* o *lazos*.

2. Para cada i , ϵ_i , se llama el *camino trivial* asociado a i el cual, por definición, es el vértice inicial y el vértice final del mismo. Por definición, la longitud de ϵ_i es 0.
3. Si p, q son dos caminos de \mathbf{Q} ,

$$pq = \begin{cases} \text{la yuxtaposición de las sucesiones de flechas de } p \text{ y } q \\ o \\ 0 \end{cases}$$

según que $e(q) = s(p)$ o que $e(p) \neq s(p)$, respectivamente.

Por definición, $\epsilon_i p = p$ (resp. $p \epsilon_i = p$) si $e(p) = i$ (resp. $s(p) = i$); en cualquier otro caso, el producto de un camino (trivial o no) por un camino trivial, a la izquierda o a la derecha, se define como igual a 0.

Por lo tanto, si el producto de dos caminos no es nulo, su longitud es igual a la suma de las longitudes de ambos.

Notación 2. Como ya observamos, si ϵ_i es un camino trivial, usaremos i para denotar el vértice correspondiente.

Definición 17. Dado un quiver \mathbf{Q} se llama *k-álgebra de caminos de \mathbf{Q}* (y se denota por $k\mathbf{Q}$ al k -espacio vectorial que tiene como base todos los caminos muniendo de la operación *producto de caminos* extendida, a partir de la base, por linealidad.

Notación 3.

- El ideal de $k\mathbf{Q}$ generado por las flechas del quiver, será denotado por $\vec{F}_{\mathbf{Q}}$ o, simplemente, por \vec{F} ;
- El conjunto de las flechas pertenecientes a $\epsilon_i \vec{F} \epsilon_j$, es decir el conjunto de las flechas con origen en el vértice j y que terminan en el vértice i , será denotado por ${}_i \vec{F}_j$.

Observación 9. Obviamente, para que el número de caminos, o la dimensión de $k\mathbf{Q}$, sea finito, es necesario y suficiente que \mathbf{Q} no tenga circuitos orientados.

Vale la pena observar que, de acuerdo con la definición 16, los ϵ_i son idempotentes ortogonales de \mathbf{Q} cuya suma es la unidad del álgebra. Es un ejercicio interesante demostrar que ellos son, además, *idempotentes indescomponibles*, o *irreducibles* como se les llama también. Es decir, si $\epsilon_i = \epsilon' + \epsilon''$ donde éstos son ortogonales, entonces o $\epsilon_i = \epsilon'$ o $\epsilon_i = \epsilon''$.

Como consecuencia inmediata, $k\mathbf{Q}$ es suma directa de los módulos cíclicos $k\mathbf{Q}\epsilon_i$ y ellos son, salvo isomorfía, (los) módulos proyectivos indescomponibles.

Si ϵ_i es el camino trivial asociado al vértice i , una base del proyectivo indescomponible $P_i = k\mathbf{Q}\epsilon_i$ está formada por todos los caminos *que salen* de i .

Ejemplo 4.

- Una álgebra de caminos $k\mathbf{Q}$ es semisimple si y sólo si \mathbf{Q} no tiene ninguna flecha: es, simplemente, un conjunto finito de vértices;
- El álgebra de caminos de

$$1 \longrightarrow 2$$

resuelve al problema de estudiar las matrices rectangulares;

- El álgebra de los polinomios, $k[X]$ es isomorfa al álgebra de caminos del *lazo*, es decir de un quiver que tiene solamente un vértice y solamente un flecha con origen y extremo en éste.
- El álgebra del quiver

$$1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 2$$

es el álgebra de matrices

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ k \oplus k & k \end{pmatrix} =: \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c+d & e \end{pmatrix} / a, b, c, d, e \in k \right\}.$$

El problema de Kronecker equivale a caracterizar, salvo isomorfía, los módulos indescomponibles sobre esta álgebra. Por eso, llamaremos a este quiver de *quiver de Kronecker*.

- El álgebra $k\mathbf{Q}$ es *indescomponible como álgebra* si y sólo si \mathbf{Q} es *conexo*;

Observación 10. Descripción de los módulos de un álgebra de caminos. Sea $\Lambda = k\mathbf{Q}$, sea n el número de vértices de \mathbf{Q} y sea M un Λ -módulo de dimensión finita. Para definir o determinar M debemos describirlo como k -espacio vectorial y decir como operan en él los elementos de Λ . Vamos a hacer esto describiendo M por un diagrama "calcado" en el diagrama del quiver \mathbf{Q} .

En primer lugar, observamos que, como $1.M = M$, el espacio vectorial M es suma directa de los subespacios $M_i := \epsilon_i M$ que, salvo isomorfismo, son de la forma k^{d_i} . Esto quiere decir que M puede ser descrito por un diagrama como \mathbf{Q} donde escribimos k^{d_i} en lugar del vértice i . Si α es una flecha que va de i a j , vale que $\epsilon_j \alpha = \alpha = \alpha \epsilon_i$, de forma que la multiplicación (por la derecha) por α define una aplicación lineal de M_i en M_j , que puede ser descrita por una matriz $A \in \mathbb{M}_{d_j \times d_i}(k)$, que escribimos encima de la flecha que representa α . Al mismo tiempo, observamos que la multiplicación por α da la aplicación nula a partir de todo otro espacio M_s con $s \neq i$.

Como todos los elementos de Λ son combinaciones lineales de compuestas de flechas, ese diagrama caracteriza M por completo.

En otras palabras, los módulos de dimensión finita sobre un álgebra de caminos son dados por diagramas como el quiver (o, mejor, diagramas calcados encima del diagrama del quiver) que tienen un k^{d_i} en el lugar del vértice i y una matriz de tipo $d_j \times d_i$ encima de cada flecha de i a j . Si la matriz es de tipo 1×1 , se escribe solamente el número que la representa (si no es el 1; el 1, para simplificar, no se escribe).

3. Sucesiones de Auslander-Reiten.

Dada la k -álgebra Λ , por el Teorema de Krull-Schmidt, podemos conocer la categoría de módulos, $\text{mod-}\Lambda$, a partir del conocimiento de los módulos indescomponibles. Eso justifica introducir una nueva categoría, $\text{Ind-}\Lambda$, formada por las clases de isomorfía de los módulos indescomponibles, $[M]$ ($M \in \text{mod}\Lambda$) con los morfismos dados por $\text{Hom}([M], [N]) =: [\text{Hom}(M, N)]$ ²⁶ y las composiciones inducidas por los homomorfismos, en esas clases, de manera natural.

Definición 18. Un homomorfismo de Λ -módulos, $f : M \rightarrow N$ (con N indescomponible) (resp. $f : M \rightarrow N$, con M indescomponible) se llama *right almost split*, o casi escindido a la derecha; abreviadamente, RAS (resp. *left almost split*, o casi escindido a la izquierda; abreviadamente, LAS), si todo no-isomorfismo $X \rightarrow N$ (resp. $M \rightarrow X$) con X indescomponible se puede *levantar* (resp. *extender*) a M (resp. a N)²⁷

En otras palabras, f es RAS si el siguiente diagrama a la izquierda puede ser inmerso en un diagrama conmutativo como el de la derecha, cuando la flecha vertical no representa un isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} & X & X \\ & \downarrow & \swarrow \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

y f es LAS si el siguiente diagrama a la izquierda puede ser inmerso en un diagrama conmutativo como el de la derecha, cuando la flecha vertical no representa un isomorfismo.

²⁶Dados $M \cong M', N \cong N', f : M \rightarrow N, f' : M' \rightarrow N'$ decimos que $f \cong f'$, o que $[f] = [f']$, si existen isomorfismos ϕ, ψ que hacen conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' \end{array} .$$

²⁷Es inmediato comprobar que, si X no es necesariamente indescomponible, el morfismo $M \rightarrow N$ es right almost split si y sólo si todo morfismo $X \rightarrow N$, que no es un epi escindido, se levanta a M ; análogamente para aplicaciones left almost split.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow & & \downarrow \swarrow \\ X & & X \end{array} .$$

Dado N (resp. M), el homomorfismo RAS (resp. LAS) $f : M \rightarrow N$ se llama *minimal* si M (resp. N) tiene dimensión mínima posible.

En general, los morfismos RAS son epimorfismos, y los morfismos LAS, monomorfismos (¡ demuéstrela!). Las excepciones se encuentran en los ejemplos abajo.

En lo que sigue deberemos considerar más de una vez estas aplicaciones right almost split minimales (resp. left almost split minimales) y las abreviaremos con MRAS (resp. MLAS). Ellas son únicas salvo isomorfismo.

Ejemplo 5.

- Si $N = P$ es proyectivo indescomponible, un homomorfismo MRAS terminando en P , $M \rightarrow P$, es la inclusión del radical de P en P .
- Si $M = I$ es inyectivo indescomponible, un homomorfismo MLAS comenzando en I , $I \rightarrow N$, es el epimorfismo de I en el cociente $I/\text{soc}(I)$ ²⁸.

Ejercicio(s) 8.

- Pruebe que, si $M \xrightarrow{g} N$ es MRAS y si φ es un endomorfismo tal que $g\varphi = g$, entonces φ es un automorfismo (sugerencia: use el Lema de Fitting);
- Pruebe que si $L \xrightarrow{f} M$ es MLAS y si ψ es un endomorfismo tal que $\psi f = f$, entonces ψ es un automorfismo (sugerencia: use el Lema de Fitting).

Definición 19. Una sucesión exacta corta²⁹ que no escinde³⁰

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

²⁸Por definición, $\text{soc}(M)$ es el máximo submódulo semisimple de M .

²⁹Una sucesión de dos morfismos $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ es *exacta* en M si f es el kernel de g y g es el cokernel de f . Una sucesión de morfismos es exacta si es exacta en cada uno de los módulos intermediarios.

³⁰Es decir, que no es isomorfa a una trivial de la forma $0 \rightarrow L \rightarrow L \oplus N \rightarrow N \rightarrow 0$.

se llama *sucesión que casi escinde*, o *sucesión de Auslander y Reiten*, abreviadamente ARS, si se verifican las dos siguientes condiciones.

1. L y N son módulos indescomponibles;
2. g es MRAS;
3. f es MLAS.

Teorema 6. (Auslander+Reiten)

- Dado el módulo indescomponible no proyectivo, N , existe una MRAS $M \rightarrow N$ (y ésta es única salvo isomorfía) que, con su núcleo, define una ARS terminando en N .
- Dado el módulo indescomponible no inyectivo, L , existe una MLAS $L \rightarrow M$ (y ésta es única salvo isomorfía) que, con su conúcleo, define una ARS comenzando en L .

Demostración. La demostración de este resultado fundamental es muy elaborada y queda fuera del nivel de este cursillo y, aunque no fuera así, es muy extensa y no cabría en el espacio de este cursillo.

Ejercicio(s) 9.

- Muestre que si $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$ es una sucesión exacta (corta) de módulos, entonces $M \cong_k N \oplus L$.

Observación 11. Este Teorema garantiza la existencia de dos aplicaciones biyectoras dentro de $\text{Ind-}\Lambda$. Una, τ , tiene como dominio el conjunto de clases de isomorfía de módulos indescomponibles no proyectivos y como imagen el conjunto de las clases de isomorfía de módulos indescomponibles no inyectivos. La otra, es su inversa y la denotaremos τ^- . Pueden ser definidas así: $\tau[L]$ es la clase de los indescomponibles donde comienzan las ARS terminando por L ; $\tau^-[N]$ es la clase de indescomponibles donde terminan las ARSD que comienzan en N . Estas biyecciones se llaman las *traslaciones* de Auslander y Reiten.

Es común descartar (para indescomponibles) la notación $[M]$, usándose, simplemente, M . De acuerdo con esa costumbre (que adoptaremos), las biyecciones definidas antes pueden ser caracterizadas en la forma siguiente.

Son ARS's (para un módulo intermediario conveniente):

$$0 \rightarrow \tau(N) \rightarrow \circ \rightarrow N \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow L \rightarrow \circ \rightarrow \tau^-(L) \rightarrow 0$$

Observación 12. Homomorfismos irreducibles. En la clase de morfismos del *esqueleto*³¹ de $\text{mod-}\Lambda$, que es, en verdad, un conjunto, están definidas dos operaciones: la suma directa, \oplus , una ley de composición interna, y la composición, \cdot , una "multiplicación" parcialmente definida, que lo transforman en algo parecido a un anillo. En una tal estructura algebraica adquieren importancia los homomorfismos que se comportan como los elementos primos de un anillo, es decir los homomorfismos no-triviales que no se pueden factorizar no-trivialmente.

Desde este punto de vista, hay que considerar como triviales (análogos a las unidades, en el caso de un anillo) a aquellos morfismos "no inversibles, lateralmente". Queremos decir, morfismos no nulos $f : M \rightarrow N$ para los cuales no existen ni un $h : N \rightarrow M$ tal que $hf = 1_M$ ni un $g : N \rightarrow M$ tal que $fg = 1_N$. Son los homomorfismos que escinden. Cuando vale $hf = 1_M$, f es una inmersión de M en un sumando directo de N , y cuando vale $fg = 1_N$, f es la proyección de M en uno de sus sumandos directos. En el primer caso, se suele decir que f es un *mono escindido*, y en el segundo, que es un *epi escindido*.

Visto eso, se entiende la siguiente definición.

Definición 20. Dícese que un homomorfismo de módulos $f : M \rightarrow N$ (resp. M) indescomponible es *irreducible a la derecha* (resp. a la izquierda) si no es escindido y si para toda factorización $f = hg$, o g es un mono escindido o h es un epi escindido.

La cualificación *a la derecha/izquierda*.^{es} usada solamente para indicar el lado donde el módulo es indescomponible. Si ambos lo son, la aplicación es irreducible de los dos lados. En lo que sigue, si no es relevante, omitiremos esta cualificación.

³¹El esqueleto de una categoría es la clase cuyos elementos son las clases de isomorfía de sus objetos; si se introducen comomorfismos entre ellos a las clases de isomorfía de los morfismos entre objetos, el esqueleto es una categoría, también llamada con el mismo nombre.

Ejercicio(s) 10.

- Mostrar que, entre módulos proyectivos indescomponibles, un morfismo es irreducible si y sólo si $\in \underline{r} \setminus \underline{r}^2$, donde \underline{r} es el radical de Λ .
- Generalizar el resultado del ejercicio anterior.

Teorema 7.

- Dado un módulo indescomponible, N , salvo isomorfismo, los homomorfismos irreducibles terminando en N , $X \rightarrow N$, son exactamente las componentes de la aplicación MRAS que termina en N .
- Dado un módulo indescomponible, L , salvo isomorfismo, los homomorfismos irreducibles saliendo de L , $L \rightarrow X$ son exactamente las componentes de la aplicación MLAS que comienza en L .

Demostración. Demostraremos solamente el primer enunciado pues el segundo se prueba dualmente. Dado $\varphi : X \rightarrow N$, irreducible, sea $g : M \rightarrow N$ MRAS. Por definición, existe un levantamiento a M , φ' , es decir tal que $\varphi = g\varphi'$. Como g no escinde, φ' es un mono escindido.

Veamos el recíproco. Consideremos primero el homomorfismo MRAS g . Supongamos que existe una factorización $g = rs$. Si r no fuera un epi escindido, tendríamos que $r = gr'$ y $g = gr's$. Entonces, por los ejercicios de 8, $r's$ sería un automorfismo y, por lo tanto, s sería un mono escindido, ¡contradicción! La demostración para el caso de g es análoga.

Demostremos ahora que toda componente de g es irreducible. Consideremos una aplicación de la forma $g\varphi$, con $\varphi : X \rightarrow M$ un mono escindido. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $X \mid M$, o sea, que M se descompone en la forma $M = X \oplus Y$, y que φ es la restricción de g a X . Debemos mostrar que φ es irreducible.

Supongamos que tenemos una factorización $\varphi = rs$, $X \xrightarrow{s} Z \xrightarrow{r} N$, en la cual s nmo es un mono escindido, y consideremos la siguiente factorización de g .

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{s} & Z & \searrow^r & \\ \oplus & & \oplus & & N \\ Y & \xrightarrow{1} & Y & \nearrow^{g^2} & \end{array}$$

Como acabamos de ver, esto exige que el primer homomorfismo sea un mono escindido o que el segundo sea un epi escindido. Lo primero no puede ser,

porque s no es un mono escindido. Entonces, como g_2 no es un epi escindido (porque g no lo es), debe serlo r . ■

Corolario 3. *En $\text{Ind-}\Lambda$, el número de morfismos irreducibles que llegan a un objeto es finito; también lo es el número de los que salen de un objeto. Además, el número de morfismos que llegan a un objeto no proyectivo, M (resp. no inyectivo, N), es igual al número de morfismos que salen de $\tau(M)$ (resp. que llegan a $\tau^-(N)$).*

En otras palabras, en esta categoría, las ARS's se representan por diagramas como el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E_1 & & \\
 & & \cdot & & \\
 & \nearrow & \cdot & \searrow & \\
 \tau(M) & & \cdot & & M \\
 & \searrow & \cdot & \nearrow & \\
 & & \cdot & & \\
 & & \cdot & & \\
 & & E_r & &
 \end{array}$$

que son llamados de *mallas*.

Ejemplo 6. Álgebras de Nakayama.

Definición 21. Se dice que un módulo, M , es *uniserial* si tiene una única serie de composición (o de Jordan-Hölder).

En otras palabras: M tiene un único submódulo maximal (que es el radical de M), el cual tiene un único submódulo maximal, el cual tiene un único submódulo maximal, etc..

Obviamente, si M es uniserial, él es el cociente de un módulo proyectivo indescomponible.

Definición 22. Se dice que Λ es un *álgebra de Nakayama* si todos sus módulos indescomponibles son uniseriales³².

³²Es posible demostrar que, para que Λ sea de Nakayama es suficiente que sus proyectivos indescomponibles y sus inyectivos indescomponibles sean módulos uniseriales, pero no es suficiente, por ejemplo, que solamente los proyectivos indescomponibles sean uniseriales (ver [A-R-S]). Vale la pena destacar que, según este libro, las álgebras de Nakayama son las que mejor se conocen y entienden, después de las semisimples.

Resulta entonces que, si Λ es de Nakayama, sus módulos son cociente de proyectivos indescomponibles (que también son uniseriales) y, por lo tanto, Λ es de tipo de representación finito.

Ejercicio(s) 11.

- Demuestre que toda álgebra de la forma:

$$k[X]/k[X]X^n,$$

es decir un cociente del álgebra de polinomios, es de Nakayama.

- Pruebe que los módulos indescomponibles, $J_{n,\lambda}$ sobre $k[X]$, es decir los módulos de Jordan, son uniseriales. (Sugerencia: fijado λ , proceder por inducción sobre la dimensión del módulo probando inicialmente que todo módulo de Jordan tiene un único submódulo simple.)
- Mostrar que, si $\lambda \neq \mu$, no existe ningún homomorfismo no nulo de un módulo de Jordan $J_{n,\lambda}$ en un módulo de Jordan $J_{m,\mu}$. (Sugerencia: tomar un homomorfismo $f : J_{n,\lambda} \rightarrow J_{m,\mu}$, es decir una aplicación lineal tal que $fJ_{n,\lambda} = J_{m,\mu}f$, y considerar un vector propio, v , de $J_{n,\lambda}$ con valor propio λ .)
- Demuestre que toda álgebra de matrices triangulares inferiores (resp. superiores) es un álgebra de Nakayama.

Observación 13. Si Λ es de Nakayama y M es un módulo indescomponible, $\text{top}(M)$ es un módulo simple, S , y, por su vez, S es el top de un proyectivo indescomponible, P , exactamente aquél del cual M es un cociente. Siendo P uniserial, vemos que M queda determinado, salvo isomorfía, por su *top* y su *longitud*.

Proposición 4. Si Λ es un álgebra de Nakayama y si L es un módulo indescomponible no proyectivo, entonces la ARS terminando en L es la siguiente.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & M & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 0 & \rightarrow & \tau(L) & \oplus & L & \rightarrow & 0, \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & E & & &
 \end{array}$$

donde M tiene una longitud una unidad mayor que L , y el mismo top, y donde (si L no es simple) E tiene una longitud una unidad menor y el mismo soc (y si L es simple, E es 0), y donde las aplicaciones son los epimorfismos/monomorfismos obvios.

Demostración. Basta probar que la aplicación a la derecha es MRAS. La demostración de que es almost split se hace como sigue. Sea $X \xrightarrow{f} L$, con X indescomponible, un no-isomorfismo no nulo. Si f es sobre, X tiene longitud mayor que L y el mismo top, y, por lo tanto, f se factoriza a través de M . Si f es sobre un submódulo de L , X tiene longitud menor o igual que la de E , y f se factoriza a través de E (¡demuéstreló!). La prueba de que esa aplicación del lado derecho es almost split minimal se deja como ejercicio. ■

Corolario 4. Si Λ es de Nakayama y L es un módulo indescomponible, entonces la longitud de L es igual a la longitud de $\tau(L)$.

Demostración. Usar un ejercicio de 9. ■

4. El teorema de Gabriel.

Notación 4. Sea $k = \bar{k}$. Dadas dos clases de módulos indescomponibles, $M, N \in \text{Ind} - \Lambda$ denotamos por ${}_N\text{Irr}_M$ el conjunto de morfismos irreducibles de M en N (en $\text{Ind} - \Lambda$). Si M, N son proyectivos indescomponibles, $M \cong \Lambda e_1$, $N \cong \Lambda e_2$, solemos utilizar, en lugar de la notación anterior, la notación ${}_{e_2}\text{Irr}_{e_1}$. Si es conveniente para la exposición, usaremos esas notaciones para un conjunto de representantes (morfismos de $\text{mod} - \Lambda$) de los objetos del conjunto en cuestión, es decir para una base del k -espacio vectorial $\underline{r}/\underline{r}^2$.

Definición 23. El quiver ordinario. Sea $k = \bar{k}$ y Λ una k -álgebra de dimensión finita: $\Lambda = S \oplus \underline{r}$. Supongamos, además, que Λ es *básica*, es decir que $S \cong k \times k \times \cdots \times k$. Sea V un conjunto en correspondencia biunívoca con una k -base, contenida en S , de idempotentes ortogonales, e_1, \dots, e_n , de Λ (o sea, de S), digamos $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Se llama *quiver ordinario* de Λ (y se denota por $\mathbf{Q}(\Lambda)$) al quiver definido (a menos de isomorfía) de la manera siguiente.

- V es el conjunto de vértices;

- Para cada par $(i, j) \in V \times V$, el conjunto de flechas de i a j es ${}_jF_i =: e_j \text{Irr}_{e_i}$, donde, para cada $i \in V$, e_i es el idempotente indescomponible correspondiente a i y donde ${}_jF_i$ es un conjunto de representantes de una base de

$$\underline{r}\text{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, \Lambda e_i) / \underline{r}^2\text{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, \Lambda e_i) \cong e_j \underline{r} e_i / e_j \underline{r}^2 e_i$$

(obsérvese que

$$\dim \text{Irr}(\Lambda e_i, \Lambda e_j) =: \dim \underline{r}\text{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, \Lambda e_i) / \underline{r}^2\text{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, \Lambda e_i).$$

De acuerdo con esta definición, el número de flechas de i a j en el quiver ordinario es igual a número de morfismos irreducibles k -independientes del proyectivo indescomponible asociado al vértice j en el proyectivo indescomponible asociado al vértice i .

Es claro que el quiver ordinario es único salvo isomorfía.

Teorema 8. (Teorema de Gabriel) *Sea $k = \bar{k}$ y sea \mathbf{Q} el quiver ordinario de Λ . Entonces, existe un ideal $\mathbf{I} \triangleleft k\mathbf{Q}$ tal que las afirmaciones siguientes son verificadas.*

1. \mathbf{I} es admisible, es decir, está contenido en \vec{F}^2 y contiene una potencia de \vec{F} ;
2. $\Lambda \cong k\mathbf{Q}/\mathbf{I}$, es decir, existe un epimorfismo de $k\mathbf{Q}$ sobre Λ

$$k\mathbf{Q} \longrightarrow \Lambda \rightarrow 0$$

con kernel \mathbf{I} ;

3. en ese isomorfismo, \underline{r} se corresponde con \vec{F} ;
4. en ese isomorfismo, las flechas de \mathbf{Q} se corresponden con los morfismos irreducibles de $\text{Ind}-\Lambda$.

Ya observamos que \mathbf{Q} está determinado por Λ a menos de isomorfía. En cambio, el ideal \mathbf{I} , *no lo está*. Cualquier conjunto generador de cualquier \mathbf{I} tal que $\Lambda \cong k\mathbf{Q}/\mathbf{I}$, es llamado *un conjunto de relaciones definidores* de Λ .

Demostración. La prueba es casi trivial. Para comenzar, fijamos una descomposición $\Lambda = S \oplus \underline{r}$.

Sea \mathbf{Q} el quiver ordinario de Λ . Elegimos una k -base de S formada por idempotentes ortogonales dos a dos: e_1, \dots, e_n (recuérdese que $S \cong k \times k \times \dots \times k$). El álgebra de caminos tiene como k -base, el conjunto de todos los caminos. Asociamos los caminos triviales a esos idempotentes (de acuerdo con la definición de \mathbf{Q}). El espacio vectorial $\underline{r}/\underline{r}^2$ es suma directa de la familia de subespacios $(e_j(\frac{\underline{r}}{\underline{r}^2})e_i)_{i,j}$. Asociamos las flechas de los ${}_j\vec{F}_i$ consigo mismas (es decir con bases de estos subespacios) y extendemos esta aplicación, por multiplicación, a todos los caminos propios. De esta manera, una base del álgebra de caminos queda asociada a un conjunto de elementos de Λ , lo cual determina una aplicación lineal. Como \underline{r} es nilpotente, es fácil ver que esta aplicación lineal es sobreyectora. En seguida, deducimos de la propia definición que, como esta aplicación es multiplicativa sobre la base del álgebra de caminos, es multiplicativa sobre todo $k\mathbf{Q}$. Finalmente, como es inyectiva en flechas y vértices, su núcleo está contenido en \vec{F}^2 . Esto completa la demostración. ■

5. Álgebras hereditarias.

Definición 24. Se llaman *hereditarias* las álgebras de dimensión global ≤ 1 .

De acuerdo con la definición, un álgebra es hereditaria si y sólo si todo submódulo de un módulo proyectivo es proyectivo. (A rigor, la clase de las álgebras hereditarias incluye la clase de las álgebras semisimples, pero es frecuente sobrentender, cuando se considera un álgebra hereditaria, que no es semisimple.)

Proposición 5. Λ es hereditaria si y sólo si su radical, \underline{r} es proyectivo.

Demostración. Como ${}_{\Lambda}\Lambda$ es proyectivo, si Λ es hereditaria \underline{r} es proyectivo. Recíprocamente, si \underline{r} es proyectivo, para cada proyectivo indescomponible, Λe , su radical $\underline{r}e$ es proyectivo. Esto implica que, para todo proyectivo de dimensión, digamos, m , todo submódulo de dimensión $m - 1$ es proyectivo. Por inducción, todo submódulo de un proyectivo es proyectivo, y Λ es hereditaria. ■

Proposición 6. Si Λ es hereditaria y si \mathbf{Q} es su quiver ordinario, entonces $\Lambda \cong k\mathbf{Q}$.

Demostración. Sea Λ una k -álgebra hereditaria. Por el teorema de Gabriel, podemos suponer que $\Lambda = k\mathbf{Q}/\mathbf{I}$, con \mathbf{I} un ideal admisible de $k\mathbf{Q}$ (ver el teorema 8). Consideremos preliminarmente, para Λ hereditaria, un proyectivo indescomponible generado, digamos, por el idempotente, e_i , y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ las imágenes de las flechas con origen i . Si el final de α_i es j , y si P_j es el proyectivo generado por el idempotente e_j , tenemos un homomorfismo:

$$\bigoplus_j P_j \longrightarrow P_{i_0}$$

definido por multiplicación, a la derecha, por $\sum_j \alpha_j =: a$. Siendo Λ hereditaria, la imagen de este homomorfismo es un proyectivo y, consiguientemente, su kernel es un sumando directo de $\bigoplus_j P_j$.

Con nuestras notaciones, como ninguna flecha está en \mathbf{I} (porque $\mathbf{I} \subset \vec{F}^2$), nuestra aplicación, $\cdot a$ tiene que ser inyectiva³³.

Mostremos ahora que la hipótesis $\mathbf{I} \neq 0$ conduce a una contradicción. Cada elemento, z , de \mathbf{I} es una combinación lineal de caminos de \mathbf{Q} . Denotemos por $p(z)$ el máximo de las longitudes de esos caminos y elijamos un tal elemento con $p(z)$ mínimo posible. El teorema de Gabriel garantiza que ese mínimo es por lo menos 2. Denotémoslo por z_0 . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que todas los caminos que aparecen en z_0 tienen un mismo origen, i .

En este momento, llamando a la suma de las imágenes de estas flechas de a y llamando b al elemento tal que $z_0 = ba$, tenemos que $b \notin \mathbf{I}$, de forma que la imagen de b en Λ , \bar{b} , no es 0. Pero, por lo dicho, $\bar{b}a = 0$. Eso contradice que $\cdot a$ es inyectiva, contradicción que completa la demostración. ■

Ejemplo 7. El recíproco de este corolario también es verdadero: Las álgebras de caminos de un quiver que no tiene circuitos orientados (o sea, las álgebras de caminos que tienen dimensión finita) son hereditarias.

En efecto, para estas álgebras, todo conjunto de caminos es linealmente independiente sobre k . Si P es el proyectivo indescomponible correspondiente al vértice i y al idempotente e , la multiplicación a la derecha por una flecha, α , saliendo de i es, por lo tanto, inyectiva y define, entonces, un monomorfismo del proyectivo asociado al vértice $e(\alpha)$ en P . Por otro lado, el radical

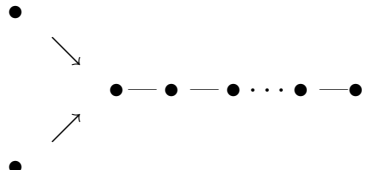
³³Esto implica, en particular, que el quiver ordinario de una álgebra hereditaria no puede tener flechas múltiples

de P es claramente la suma directa de esas imágenes, para las diferentes flechas saliendo de i . Consecuentemente, el radical de P es proyectivo. Como esto vale para cada vértice, el radical de Λ es proyectivo. Esto completa la demostración, por la proposición anterior.

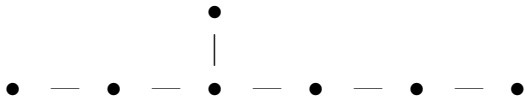
Teorema 9. (Teorema de clasificación) *Sea Λ una k -álgebra hereditaria. Por el teorema 8, si \mathbf{Q} es el quiver ordinario de Λ , $\Lambda = k\mathbf{Q}$. Entonces valen las afirmaciones siguientes.*


1. Λ é de tipo finito si y sólo si el grafo subyacente a \mathbf{Q} es uno de los siguientes diagramas de Dynkin (donde n denota el número de vértices).

\mathbf{A}_n :  $(n \geq 1)$

\mathbf{D}_n :  $(n \geq 4)$

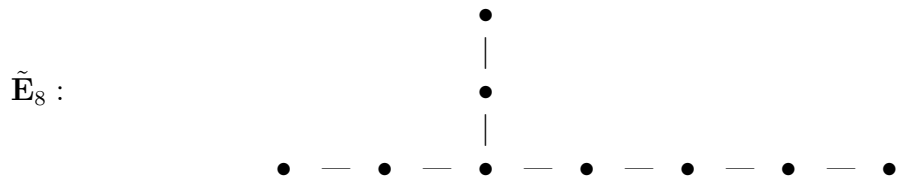
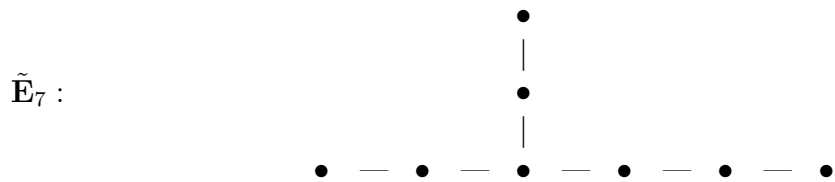
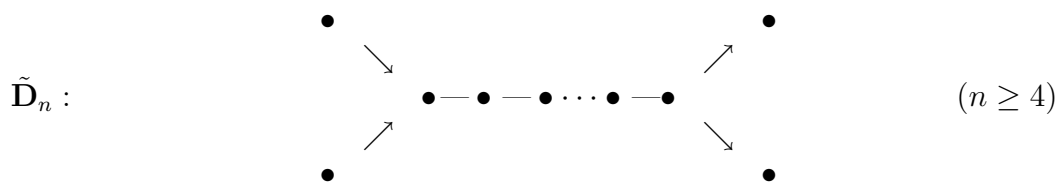
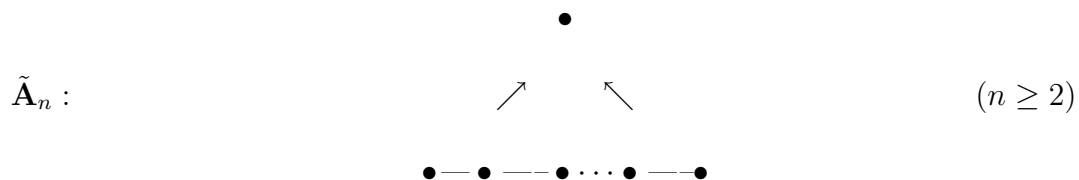
\mathbf{E}_6 : 

\mathbf{E}_7 : 

\mathbf{E}_8 : 

;

2. Λ es de tipo manso (tame) si y sólo si el grafo subyacente a \mathbf{Q} es uno de los siguientes diagramas de Dynkin extendidos o euclidianos (donde el número de vértices es $n - 1$).



3. Λ es de tipo salvaje si y sólo si su quiver ordinario tiene un grafo asociado que no es de ninguno de los tipos anteriores.

Demostración. La prueba es demasiado larga para este cursillo. El lector interesado puede consultar [D-F] o [M] para la primera parte, [D-R, 1] para la segunda y [J-M] para las tres.

6. El quiver AR .

Por lo visto arriba (especialmente el teorema 7 y el corolario 3), es posible definir un quiver localmente finito que encierra toda la información "combinatoria" de $\text{Ind-}\Lambda$: es el llamado *quiver de Auslander-Reiten*.

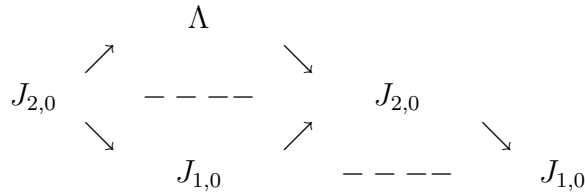
Definición 25. El quiver AR . Dada la k -álgebra Λ , se llama *quiver AR* , o *quiver de Auslander-Reiten*, de Λ , y se le denota por $AR(\Lambda)$ al quiver cuyos objetos son los objetos de $\text{Ind-}\Lambda$ y cuyas flechas son los morfismos irreducibles de $\text{Ind}\Lambda$. En él actúan las traslaciones de Auslander-Reiten, τ y τ^- .

Ejemplo 8.

- Si Λ es semisimple, suma directa de n proyectivos simples, entonces $AR(\Lambda)$ consiste de n vértices y ninguna flecha.
- Sea $\Lambda = k[X]/X^3$. Entonces, Λ es el único proyectivo indescomponible y tiene longitud 3. Por lo que ya vimos, Λ es un álgebra de Nakayama con 3 módulos indescomponibles, que son Λ y los módulos de Jordan $J_{2,0}$ y $J_{1,0}$. Cada uno de estos últimos es su propio trasladado de Auslander-Reiten.

Su quiver AR es el siguiente (donde, en el diagrama, repetimos los indescomponibles no proyectivos ligados por una línea de guiones que refleja las traslaciones τ y τ^-). Obsérvese que el proyectivo queda como punto "aislado" para estas traslaciones. Esto es debido a que Λ también es el único indescomponible inyectivo³⁴.

³⁴Ésta es un álgebra autoinyectiva.



Observación 14. Al quiver AR se aplica, generalmente sin mucha precisión, la terminología propia de la topología. Así, se habla de vértices aislados, de componentes conexas, etc. y se suele decir de una componente que es "plana" o que es un "tubo", etc. Tiene bastante importancia estudiar el comportamiento de las traslaciones. Las imágenes de un vértice M por τ y τ^- forman lo que se llama la *órbita* de M y hay órbitas finitas, periódicas e infinitas o ilimitadas (ilimitadas "hacia la derecha", "hacia la izquierda." "hacia ambos lados").

Los llamados *tubos regulares* son componentes conexas que pueden "materializarse".^{en} un cilindro con una base (la *boca*) pero ilimitado "hacia arriba". La base está formada por una órbita periódica, digamos de cardinalidad s y de cada vértices salen sucesiones infinitas de flechas (los rayos ascendentes", correspondientes a monomorfismos). Cada una de estas flechas sucesivas termina en una órbita diferente (todas con la misma cardinalidad, s). Las demás flechas (que corresponden a epimorfismos) están dispuestas como sucesiones "invertidas", que terminan en la boca (son los rayos descendentes"). Salvo para los vértices de la boca, todas las mallas tienen exactamente dos vertices intermediarios; las de la boca tienen solamente un vértice intermediario. A veces, al número s se le llama la *espesura* del tubo. Los *tubos delgados* son los que tienen espesura mínima, igual a 1, es decir, para todo vértice, M , se verifica que $\tau(M) = M$.

Ejemplo 9. Sea Λ el álgebra de los polinomios, $k[X]$ (con $k = \bar{k}$), un álgebra de dimensión infinita. En general, para las álgebras de dimensión infinita no valen o no se aplican los conceptos que estamos considerando. Pero, en este caso especial, podemos decir algunas cosas (que el propio lector puede probar, con los conocimientos que ya hemos anotado).

- la categoría $\text{mod-}\Lambda$ no tiene ningún módulo proyectivo ni ningún inyectivo;

- el quiver AR de esta álgebra tiene como vértices los módulos $J_{n,\lambda}$; en cada uno, comienza y termina una ARS y cada uno es invariante para las traslaciones de Auslander-Reiten;
- hay una componente del quiver AR para cada valor de λ y todas ellas son tubos delgados.

Observación 15. Una formulación moderna de la primera conjetura de Brauer y Thrall es corolario del siguiente teorema (ver [A-R-S, Ch. 6, Theorem 1.4]): si una álgebra indescomponible (como álgebra) Λ es tal que existe una componente de su quiver AR que es finita o, más generalmente, que tiene las dimensiones de sus módulos acotadas, entonces Λ es de tipo de representación finito y ésta es la única componente de dicho quiver.

El recíproco de este resultado, es decir que si Λ es de tipo finito, entonces su quiver AR tiene una única componente, es uno de los clásicos problemas de nuestra teoría que todavía hoy se mantiene abierto.

Ejemplo 10. El quiver AR de un álgebra hereditaria de tipo finito. El quiver AR de un álgebra hereditaria de tipo finito puede determinarse calculando las dimensiones de los indescomponibles y colocando estos números en los lugares de los vértices.

El proceso es de carácter recursivo y tiene como comienzo los módulos proyectivos indescomponibles, cuyas dimensiones se calculan fácilmente a partir del quiver ordinario de Λ .

El paso de inducción se realiza a partir de las dimensiones $(d_i)_i$ de los módulos de una familia de indescomponibles, $(M_i)_i$, tales que son conocidos todos los antecesores inmediatos (y, por tanto, sus dimensiones) y todas las flechas que salen de ellos.

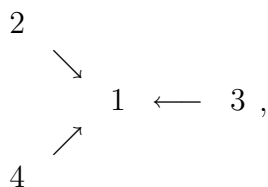
Si estos datos son conocidos, la recurrencia puede aplicarse a cualquier álgebra, y puede determinarse todo el quiver AR si ella es de tipo finito. Justamente, lo que hace la diferencia es que para las álgebras hereditarias eso vale para la familia de los proyectivos: Primero, porque TODO irreducible llegando en un proyectivo es un monomorfismo que SALE de un proyectivo; y, segundo, porque, para la familia de los proyectivos todas las flechas son conocidas, por definición, si se conoce el quiver ordinario.

Para cada antecesor inmediato de nuestra familia, N , se consideran sus sucesores inmediatos. Si la suma de sus dimensiones, s , es mayor que la

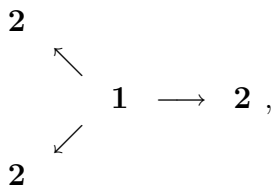
dimensión de N , d , entonces existe su trasladado $\tau^-(N)$, cuya dimensión es exactamente $s - d$ y al cual llegan flechas en correspondencia biunívoca (para poder formar la malla) con las flechas que salen de N . Haciendo esto con todos los antecesores como N , quedan determinadas todas las dimensiones de los sucesores de nuestra familia y todas las flechas que salen de sus módulos de nuestra familia. Consecuentemente, el proceso puede repetirse.

Repitiendo lo dicho arriba, cuando Λ es hereditaria y cuando la familia inicial es la de las dimensiones de los proyectivos, todas las flechas llegando a ellos son conocidas, porque salen de ellos y reproducen el opuesto del quiver ordinario del álgebra.

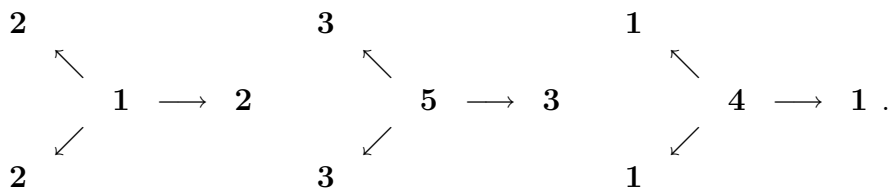
Veamos, como ejemplo, el "quiver de dimensiones" de un álgebra con quiver de tipo \mathbf{D}_4 :



cuyo quiver AR de los proyectivos es



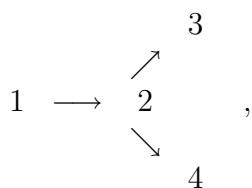
Mostramos a continuación el quiver AR indicando los trasladados pero sin poner ni la línea punteada ligando cada módulo con su trasladado, ni las flechas que ligan los módulos e una copia con los de la copia trasladada.



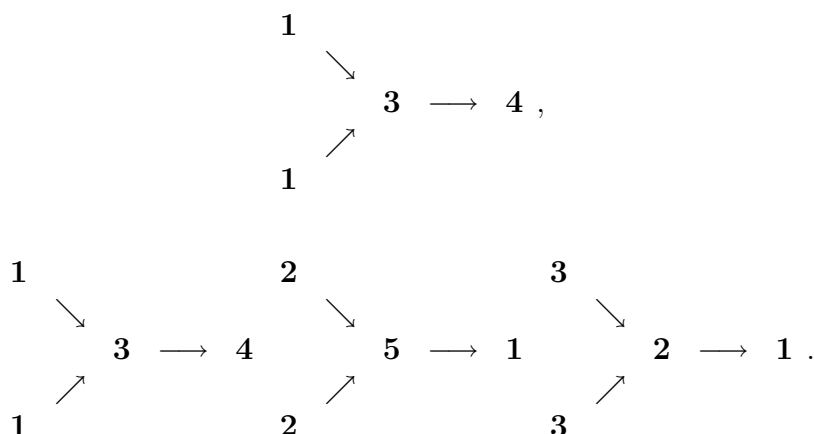
Por ejemplo, la órbita correspondiente al módulo que está en el centro del quiver está indicada por los números $\mathbf{1}$, $\mathbf{5}$, $\mathbf{4}$, y las otras tres órbitas, por

los números **2**, **3** y **1**. Vemos que los módulos correspondientes a la última copia son exactamente los inyectivos indescomponibles, y que ellos forman un quiver isomorfo al de los proyectivos.

Veamos ahora otro ejemplo. Calculemos el quiver AR de dimensiones para el álgebra cuyo quiver ordinario tiene el mismo diagrama de Dynkin que el anterior, pero con una orientación diferente, digamos:



cuyo quiver AR de dimensiones de los proyectivos es



De nuevo ocurre en este ejemplo que la última copia del quiver original es el quiver de los inyectivos. Esto no tiene por qué suceder en general. Pero sí se puede demostrar que, alterando solamente la orientación del quiver del álgebra hereditaria de tipo finito, no se altera el número de indescomponibles.

7. Para ampliar lecturas: metodologías y algunos tipos de álgebras que han sido estudiadas.

Citamos a continuación algunas metodologías desarrolladas en los últimos treinta años de crecimiento de la Teoría de Representaciones de Álgebras. En cada caso damos una cita bibliográfica representativa que puede ser vista por los iniciantes interesados.

En seguida de esto, mencionamos algunas familias de álgebras que han sido estudiadas con mayor o menor éxito, también apuntando algunas referencias bibliográficas.

Estas listas son el resultado de una evocación muy rápida y subjetiva. No pretendemos ser completos con ninguna de ellas, ni pretendemos atender adecuadamente a ningún criterio de relevancia.

Algunas metodologías y técnicas.

1. Equivalência estable.

Dada Λ , se consideran ciertos *ideales* (ver la definición más abajo) de la categoría $\text{mod}\Lambda$ (el de los morfismos que se factorizan a través de proyectivos y el de los que se factorizan a través de inyectivos) y los cocientes correspondientes se llaman *categorías estables* de Λ . Dos álgebras con categorías estables equivalentes se llaman *establemente equivalentes*. Ver [A-R].

2. Geometría algebraica.

Dada $\Lambda = k\mathbf{Q}/\mathbf{I}$, con k algebraicamente cerrado, ella define, ciertas variedades algebraicas. Una de ellas es definida para un vector $\underline{\dim}$ ³⁵ dado. Es una variedad algebraica constituida por las matrices posibles que caracterizan las aplicaciones lineales asociadas a las flechas. En esta variedad actúa, como grupo algebraico, el grupo de los automorfismos de los módulos que tienen este vector de dimensión. Cada módulo de estos corresponde a un punto de la variedad y cada clase de isomorfía

³⁵El vector $\underline{\dim}$ de un módulo M es el vector de \mathbb{R}^n que asocia a cada uno de los n vértices i del quiver la dimensión del espacio vectorial $e_i M$.

corresponde a una órbita de la acción de este grupo. Los indescomponibles no isomorfos de las álgebras de tipo finito definen un conjunto de puntos aislados, y los de las álgebras tame, una familia de curvas algebraicas. Ver [G] y [L-R-S].

3. Tilteos o volteos.

Dada Λ y un módulo T , ellos definen una nueva álgebra: $\Lambda_T = \text{End}_\Lambda(T)$ que, si T satisface condiciones convenientes, tiene una categoría de módulos parecida a $\text{mod}-\Lambda$. Tienen una importancia especial los módulos T llamados *tilting* (son sumas de indescomponibles no isomorfos entre sí, tantos como simples tiene Λ , tienen dimensión homológica menor que 2 y). Un tipo especial de módulos tilting fue usado por Auslander y otros para dar una descripción abstracta de los funtores de Coxeter (los que primero sirvieron, definiendo casos particularísimos de las que después serían reconocidas como traslaciones AR, para obtener todos los indescomponibles de las álgebras hereditarias de tipo finito). Ver [A, 1], [H-R], [A-P-R] y [M].

4. Recubrimientos.

Dada Λ se consideran ciertos funtores $F : \text{mod}-\Gamma \rightarrow \text{mod}-\Lambda$ o $p : \Gamma \rightarrow \Lambda$ ³⁶ con propiedades como las que tienen los recubrimientos usuales en topología. Hay, como en ésta, un *recubrimiento universal*. Eso permite pasar de una categoría con circuitos orientados a una que no los tiene. Generalmente, las propiedades "locales" de ambas álgebras son esencialmente iguales. Ver [B-G] y [M-P].

5. BOC'ses, categorías vector-espaciales y problemas matriciales.

Los BOC'es (*bimodules over categories*) son contextos introducidos por la Escuela de Kiev (probablemente inspirados en las categorías de representaciones de bimódulos, es decir de álgebras de la forma

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_S M_R & S \end{pmatrix},$$

³⁶Para que esto tenga sentido se aprovecha el hecho de que a cualquier álgebra está naturalmente asociada a una categoría. Los objetos son una familia completa de idempotentes ortogonales indescomponibles, $(e_i)_i$, generalmente los que se fijan en la definición del quiver ordinario, y los morfismos entre ellos son los espacios $e_j \Lambda e_i$.

donde R y S son álgebras dadas), para mejor formalizar las técnicas algorítmicas utilizadas para resolver los llamados *problemas matriciales* y que se mostraron tan fructíferas, en los trabajos de Drozd, Nazarova y Roiter. La teoría de representaciones de BOC'es también engloba, como caso particular, la teoría de las categorías vector-espaciales. No existen referencias suficientemente adecuadas en la literatura occidental. Ver [G-R] y [S].

6. El radical infinito".

En la categoría $\text{mod-}\Lambda$ se considera un cierto *ideal* (es decir, una familia de homomorfismos cerrada para sumas y productos bilaterales por homomorfismos cualesquiera) llamado el *radical* de la categoría. Es el ideal generado por no-isomorfismos entre indescomponibles. Para éste se definen naturalmente las diversas potencias y a la intersección de todas ellas se la llama *radical infinito* y se la denota por $\text{rad}^\infty \Lambda$. Propiedades de este ideal y, particularmente, de las potencias de este ideal, encierran propiedades bastante profundas del álgebra. Ver, por ejemplo, [CMMS].

7. Categorías derivadas.

Siguiendo ideas originales de Grothendieck realizadas por su ex-alumno Verdier, se *localiza* (como se localiza un anillo) la categoría de complejos de módulos (tornando inversibles los *casi isomorfismos*) y se obtiene la *categoría derivada*, un tipo especial en el tipo de categorías llamadas *trianguladas* que admiten, por lo tanto, un tipo especial de equivalencia entre ellas. Dos álgebras se llaman *derivadamente equivalentes* si sus categorías derivadas son triangularmente equivalentes. Recientemente se han obtenido sorprendentes resultados relacionados con esta metodología. La literatura sobre esto (bastante reciente) ya es muy abundante. Ver, por ejemplo [H] y [K].

Algunas álgebras y otros objetos de estudio.

1. Álgebras con radical al cuadrado igual a 0.

Ya desde tempranos años, las equivalencias estables permitieron reducir el problema a ciertas álgebras hereditarias. Ver [M-P] y [J-M].

2. Álgebras canónicas y álgebras tubulares.

Introducidas e inicialmente estudiadas por C. M. Ringel. Posteriormente fueron estudiadas con métodos parecidos las representaciones de *weighed curves* y los haces coherentes. Ver [R, 1], [R, 2] y [L-M].

3. Álgebras con crecimiento polinomial.

Cierto tipo de álgebras tame cuyo "tamaño" de las familias paramétricas de indescomponibles no crece demasiado. Ver, por ejemplo, [Sk1].

4. Álgebras simplemente conexas y fuertemente simplemente conexas.

Cierto tipo de álgebras tame cuyas categorías de módulos no contienen, o no contienen fuertemente, representaciones de álgebras de tipo $\tilde{\mathbf{A}}_n$. Ver, por ejemplo, [Sk2].

5. Extensiones y co-extensiones.

Puede decirse que son iteraciones de la construcción

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ M & \Lambda \end{pmatrix},$$

que puede considerarse como la ampliación de Λ a un álgebra con un módulo simple más. Trátase de un primer paso, bastante simple, en el sentido de "ampliar" un álgebra. Han sido estudiadas de diversos puntos de vista, particularmente utilizando la metodología de las categorías vector-espaciales. Ver [R, 1].

6. Álgebras quasi-hereditarias.

Cierto tipo de álgebras que aparecieron en estudios recientes relativos a álgebras de Lie y grupos cuánticos y que fueron inicialmente examinadas por C. M. Ringel. Ver [D-R, 2].

7. Álgebras casi-hereditarias.

Cierto tipo de álgebras cuyos indescomponibles tienen dimensión proyectiva o dimensión inyectiva menor o igual que 1. Han sido estudiadas utilizando metodologías de categorías derivadas. Ver [R-S].

8. Álgebras con buena partición.

Álgebras cuyos indescomponibles son distribuidos en tres clases, L, , R satisfaciendo ciertas propiedades "direccionales" de los homomorfismos. Ver, [H-R-S].

9. Álgebras estratificadas.

Motivados por los clásicos trabajos de Cline, Parshall y Scott (ver [C-P-S]) y de Ringel (ver [R, 3]), V. Dlab y otros introdujeron este tipo de álgebras a partir de, digamos, 19.. Ver [D,D-K]

Referencias

- [A, 1] - I. Assem, *Tilting theory, an introduction*, Univ. de Sherbrook, 1986.
- [A-P] - M. Auslander, M. I. Platzeck, *Representation theory of hereditary Artin algebras*, Lect. notes in p.& app. math **17**, M. Dekker, 1978.
- [A-P-R] - M. Ausander, M. I. Platzeck, I. Reiten, *Coxeter functors without diagrams*, Trans. A. M. S. **250** (1979) 1-12.
- [A-R] - M. Auslander, I. Reiten, *Stable equivalence of Artin algebras*, Springer L. N. M. **353** (1972) 8-51.
- [A-R-S] - M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics 36, Cambridge Univ. Press, 1995, xiv+423 pp.
- [B-G] - K. Bongartz, P. Gabriel, *Covering spaces in Representation Theory*, Invent. Math. **65** (1981/82) 331-378.
- [BGRS] - R. Bautista, P. Gabriel, A. Roiter, L. Salmerón, *Representation-finite algebras and multiplicative bases*, Invent. Math. **81** (1985) 277-285
- [C-L-S] - C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón, *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*, UNAM , Monografía 11, México, 1982.
- [C-P-S] - E. Cline, B. Parshall, L. Scott, *Finite dimensional algebras and heighest weight categories*, J. Reine Angew. Math. **39** (1988) 85-99.
- [CMMS] - F. U. Coelho, E. Marcos, H. Merklen, A. Skowroński, *Module categories with infinite radical cube zero*, J. Algebra **183** (1996) 1-23.

- [C-R] - C. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, 1966.
- [D] - Y. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, ruso: Kiev, 1979; inglés: Springer L. N. M. **832** (1980) 242-258.
- [D,D-K] - V. Dlab, *apéndix in* Y. Droz, V. Kirichenko, *Finite dimensional algebras*, Springer-Verlag.
- [D-R, 1] - V. Dlab, C. M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Memoirs A. M. S. 173 (1976).
- [D-R, 2] - V. Dlab, C. M. Ringel, *The module theoretic approach to quasi-hereditary algebras*, London Math. Soc. L. N. Series **168** (1992) 200-224.
- [D-F] - P. Donovan, M. R. Freislich, *The representation theory of finite graphs and associative algebras*, Carleton Lecture notes, 5, Ottawa, 1973.
- [F] - U. Fischbachaer, *Une nouvelle preuve d'un théorème de Nazarova et Roiter*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 9 (1985) 25-262
- [G] - P. Gabriel, *Finite representation type is open*, (ICRA I, 1974), Springer L. N. M. **488**, 1975.
- [G-R] - P. Gabriel, A. Roiter, *Representations of finite dimensional algebras*, Algebra VIII, Encyclopedia of the Mathematical Sciences, Springer, (1992).
- [H] - D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. Lect. Notes, **119**, Cambridge U. P.
- [H-R-S] - D. Happel, I. Reiten, S. Smalø, *Tilting in abelian categories and Quasi tilted algebras*, Mem. A. M. S. **575**, 1996.
- [H-R] - D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted algebras*, Trans. A. M. S. **274** (1982) 399-443.
- [J] - N. Jacobson, *Basic Algebra*, W. H. Freeman, San Francisco, 1974.

- [J-M] - A. Jones, H. Merklen, *Representações de álgebras - Métodos diagramáticos*, IME/USP, São Paulo, 1984.
- [K] - B. Keller, *Derived categories and their uses*, preprint.
- [L-M] - H. Lenzing, H. Meltzer, *curvas y coer.* 1988.
- [L-R-S] - F. Larrión, A. G. Raggi-Cárdenas, L. Salmerón, *Rudimentos de masedumbre y salvajismo en teoría de las representaciones*, UNAM, México y Morelia, 1994.
- [M] - H. Merklen, *Representaciones de aljabas y el teorema de Gabriel*, Pub. 8^a Semana Mat., Univ. Cat. Valparaíso, Chile, 1981.
- [M-V] - R. Martínez-Villa. *Introducción a la teoría de representaciones de álgebras*, UNAM, Monografía 23, México, 1992.
- [M-P] - R. Martínez-Villa, J. A. de la Peña, *The universal cover of a quiver with relations*, J. Pure & App. Algebra **30** (1983) 277-292.
- [R, 1] - C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Springer L. N. M., 1099, 1984.
- [R, 2] - C. M. Ringel, *The canonical algebras*, Topics in Algebra, I, Banach Center, Varsovia, 1990.
- [R, 3] - C. M. Ringel, *The category of modules with a good filtration over a quase-hereditary algebra has Almost Split Sequences*, Math Z. **208** (1991) 209-223.
- [R-S] - I. Reiten, O. Smalø, *casi hered.*
- [S] - L. Salmerón, *Métodos categóricos en problemas matriciales*, master's thesis, UNAM, México, 1980.
- [Sk1] - A. Skowroński, *Algebras of polynomial growth*, Topics in Algebra, Banach Center pub. **26** 535-568.
- [Sk2] - A. Skowroński, *Simply Connected Algebras and Hochschild Cohomologies*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. **14** 1993.