MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
Escola Politécnica - 3a. Prova - 29/11/2010 - Turma A

Questão 1. (3,0 pontos) a) Determine a solução geral da equação

$$(2xy\ln y - y\cos x)\,dx + (x^2 - 2y^2)\,dy = 0$$

sabendo que ela tem um fator integrante que só depende de y.

b) Determine a solução da equação

$$(xy + 4y^2)\,dx + (x^2 - 4xy)\,dy = 0$$

que satisfaz a condição inicial $y(1) = 2$.

Solução. a) Seja $\mu = \mu(y)$ um fator integrante da equação. Devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(y)(x^2 - 2y^2)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(y)(2xy\ln y - y\cos x)\right],$$

isto é,

$$2x\mu(y) = \mu(y)(2x\ln y + 2x - \cos x) + \mu'(x)(2xy\ln y - y\cos x).$$

Assim,

$$\mu'(y) = -\frac{2x\ln y - \cos x}{y(2x\ln y - \cos x)}\mu(x) = -\frac{1}{y}\mu(y)$$

e, portanto,

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ln|y|} = \frac{1}{|y|}.$$

Podemos então tomar $\mu(x) = \frac{1}{y}$ como fator integrante. Multiplicando a equação dada por μ obtemos

$$(2x\ln y - \cos x)dx + \left(\frac{x^2}{y} - 2y\right)dx = 0,$$

que é agora uma equação *exata*. Segue que a solução geral da equação é dada implicitamente pelas curvas $F(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e F satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x\ln y - \cos x & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{x^2}{y} - 2y & (2) \end{cases}$$

Equação (1) implica que $F(x, y) = x^2\ln y - \sin x + c(y)$. Substituindo em (2), obtemos

$$\frac{x^2}{y} + c'(y) = \frac{x^2}{y} - 2y, \text{ i.e., } c'(y) = -2y,$$

e portanto $c(y) = -y^2$.

Portanto, $F(x, y) = x^2\ln y - y^2 - \sin y$ e a solução geral é dada implicitamente por $x^2\ln y - y^2 - \sin x = C$, onde C é uma constante real arbitrária.

b) Escrevendo a equação dada na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 4y^2}{4xy - x^2},$$

verifcamos imediatamente que se trata de uma equação homogênea. Portanto, a mudança $y = xu(x)$ transforma a equação dada numa de variáveis separáveis:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{x^2u + 4x^2u^2}{4x^2u - x^2} = \frac{u + 4u^2}{4u - 1},$$

isto é

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u + 4u^2}{4u - 1} - u = \frac{u + 4u^2 - 4u^2 + u}{4u - 1} = \frac{2u}{4u - 1},$$

$$\left(4 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{2}{x}dx,$$

Integrando, obtemos

$$4u - \ln|u| = 2\ln|x| + C$$

e portanto, a solução geral é

$$\frac{4y}{x} - \ln|\frac{y}{x}| - 2\ln|x| = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

A condição inicial $y(1) = 2$ implica $C = 8 - \ln 2$. Portanto, a solução é dada implicitamente pela equação

$$\frac{4y}{x} - \ln|\frac{y}{x}| - 2\ln|x| = 8 - \ln 2.$$

Questão 2. (4,0 pontos) Sabendo-se que $y = x^2$ é uma solução da equação

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,$$

determine a solução geral da equação

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^4 \ln x,$$

para $x > 0$.

Solução. Seja $y_1(x) = x^2$. Vamos primeiro determinar outra solução y_2 da equação homogênea associada da forma $y_2(x) = x^2u(x)$. Seguirá que $\{y_1, y_2\}$ é L.I. Substituindo, obtemos

$$x^2(2u + 2xu' + 2xu' + x^2u'') - 3x(2xu + x^2u') + 4x^2u = 0,$$

ou seja

$$xu'' + u' = 0.$$

Colocando $u' = v$, essa última se transforma na equação linear de 1a. ordem $v' = -\frac{1}{x}v$, cuja solução é

$$v(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Dai obtemos $u' = \frac{1}{x}$ e então $u(x) = \ln x$.

Assim, $y_2(x) = x^2 \ln x$ é outra solução, de modo que a solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Agora, vamos determinar uma solução particular da equação não-homogênea da forma

$$y_p(x) = C_1(x)x^2 + C_2(x)x^2 \ln x.$$

Então, C_1 e C_2 devem satisfazer

$$\begin{pmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x \ln x + x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \ln x \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} C_1' + (\ln x)C_2' = 0 \\ 2C_1' + (2\ln x + 1)C_2' = x \ln x. \end{cases}$$

Portanto, $C_2' = x \ln x$ e $C_1' = -x(\ln x)^2$. Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} C_1 &= -\int x(\ln x)^2\, dx = -(\ln x)^2.\tfrac{x^2}{2} + \int \tfrac{x^2}{2}.2\ln x.\tfrac{1}{x}\, dx \\ &= -\tfrac{x^2}{2}(\ln x)^2 + \int x \ln x\, dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4},$$

temos finalmente $C_2 = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ e $C_1 = -\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$. Portanto, y_p é dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{x^4}{2}(\ln x)^2 + \frac{x^4}{2}\ln x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^4}{4}\ln x \\ &= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4}(\ln x - 1). \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação é dada por

$$y = \frac{x^4}{4}(\ln x - 1) + C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Questão 3. (3,0 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y''' - y'' + y' - y = 3x + e^x.$$

Solução. Vamos primeiro determinar a solução geral da equação homogênea associada

$$\text{(H)} \qquad y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Como (H) tem coeficientes constantes e o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$ se fatora como $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$, as raízes características são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = \pm i$. Logo, $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$ e $y_3 = \sin x$ são 3 soluções L.I. de (H). Assim, a solução geral de (H) é

$$y_h = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes arbitrárias.

Vamos agora determinar uma solução particular y_p da equação não-homogênea

$$\text{(NH)} \qquad y''' + y'' + y' + y = 3x + e^x.$$

Vamos procurar y_p da forma

$$y_p(x) = Ax + B + Cxe^x,$$

onde A, B e C são constantes. Temos

$$\begin{aligned}
y_p &= Ax + B + Cxe^x &&= Ax + B + Cxe^x \\
y_p' &= A + Ce^x + Cxe^x &&= A + Ce^x + Cxe^x \\
y_p'' &= Ce^x + Ce^x + Cxe^x &&= 2Ce^x + Cxe^x \\
y_p''' &= 2Ce^x + Ce^x + Cxe^x &&= 3Ce^x + Cxe^x
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$y''' - y'' + y' - y = Ax + B + A + 2Ce^x = (A - B) - Ax + 2Ce^x.$$

Comparando com (NH), obtemos $A - B = 0$, $A = -3$ e $2C = 1$. Portanto, $A = -3$, $B = -3$ e $C = \frac{1}{2}$. Logo, a solução geral de (NH) é

$$y = -3(x+1) + \frac{1}{2}xe^x + C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes arbitrárias.

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
Escola Politécnica - 3a. Prova - 29/11/2010 - Turma B

Questão 1. (3,0 pontos) a) Determine a solução geral da equação

$$(y^2 - 2x^2)\, dx + (2xy \ln x - x\text{cos}y)\, dy = 0$$

sabendo que ela tem um fator integrante que só depende de x.

b) Determine a solução da equação

$$(xy - 9y^2)\, dx + (x^2 + 9xy)\, dy = 0$$

que satisfaz a condição inicial $y(1) = 3$.

Solução. a) Seja $\mu = \mu(x)$ um fator integrante da equação. Devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)(y^2 - 2x^2)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)(2xy \ln x - x\text{cos}y)\right],$$

isto é,

$$2y\mu(x) = \mu(x)(2y \ln x + 2y - \text{cos}y) + \mu'(x)(2xy \ln x - x\text{cos}y).$$

Assim,

$$\mu'(x) = -\frac{2y \ln x - \text{cos}y}{x(2y \ln x - \text{cos}y)}\mu(x) = -\frac{1}{x}\mu(x)$$

e, portanto,

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}.$$

Podemos então tomar $\mu(x) = \frac{1}{x}$ como fator integrante. Multiplicando a equação dada por μ obtemos

$$\left(\frac{y^2}{x} - 2x\right) dx + (2y \ln x - \text{cos}y)dy = 0,$$

que é agora uma equação *exata*. Segue que a solução geral da equação é dada implicitamente pelas curvas $F(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e F satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x} - 2x & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y \ln x - \text{cos}y & (2) \end{cases}$$

Equação (1) implica que $F(x, y) = y^2 \ln|x| - x^2 + c(y)$. Substituindo em (2), obtemos

$$2y \ln|x| + c'(y) = 2y \ln x - \text{cos}y, \text{ i.e., } c'(y) = -\text{cos}y,$$

e portanto $c(y) = -\sin y$.

Portanto, $F(x, y) = y^2 \ln|x| - x^2 - \sin y$ e a solução geral é dada implicitamente por $y^2 \ln|x| - x^2 - \sin y = C$, onde C é uma constante real arbitrária.

b) Escrevendo a equação dada na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9y^2 - xy}{x^2 + 9xy},$$

verifcamos imediatamente que se trata de uma equação homogênea. Portanto, a mudança $y = xu(x)$ transforma a equação dada numa de variáveis separáveis:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{9x^2u^2 - x^2u}{x^2 + 9x^2u} = \frac{9u^2 - u}{1 + 9u},$$

isto é

$$x\frac{du}{dx} = \frac{9u^2 - u}{1 + 9u} - u = \frac{9u^2 - u - u - 9u^2}{1 + 9u} = -\frac{2u}{1 + 9u},$$

$$\left(\frac{1}{u} + 9\right) du = -\frac{2}{x}dx,$$

Integrando, obtemos

$$\ln|u| + 9u = -2\ln|x| + C$$

e portanto, a solução geral é

$$\ln|\frac{y}{x}| + 2\ln|x| + \frac{9y}{x} = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

A condição inicial $y(1) = 3$ implica $C = \ln 3 + 27$. Portanto, a solução é dada implicitamente pela equação

$$\ln|\frac{y}{x}| + 2\ln|x| + \frac{9y}{x} = \ln 3 + 27.$$

Questão 2. (4,0 pontos) Sabendo-se que $y = x^3$ é uma solução da equação

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0,$$

determine a solução geral da equação

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = x^5 \ln x,$$

para $x > 0$.

Solução. Seja $y_1(x) = x^3$. Vamos primeiro determinar outra solução y_2 da equação homogênea associada da forma $y_2(x) = x^3u(x)$. Seguirá que $\{y_1, y_2\}$ é L.I. Substituindo, obtemos

$$x^2(6xu + 3x^2u' + 3x^2u' + x^3u'') - 5x(3x^2u + x^3u') + 9x^3u = 0,$$

ou seja

$$xu'' + u' = 0.$$

Colocando $u' = v$, essa última se transforma na equação linear de 1a. ordem $v' = -\frac{1}{x}v$, cuja solução é

$$v(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Dai obtemos $u' = \frac{1}{x}$ e então $u(x) = \ln x$.

Assim, $y_2(x) = x^3 \ln x$ é outra solução, de modo que a solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = C_1x^3 + C_2x^3 \ln x,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Agora, vamos determinar uma solução particular da equação não-homogênea da forma

$$y_p(x) = C_1(x)x^3 + C_2(x)x^3 \ln x.$$

Então, C_1 e C_2 devem satisfazer

$$\begin{pmatrix} x^3 & x^3 \ln x \\ 3x^2 & 3x^2 \ln x + x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \ln x \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} C_1' + (\ln x)C_2' = 0 \\ 3C_1' + (3\ln x + 1)C_2' = x \ln x. \end{cases}$$

Portanto, $C_2' = x \ln x$ e $C_1' = -x(\ln x)^2$. Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} C_1 &= -\int x(\ln x)^2\, dx = -(\ln x)^2.\tfrac{x^2}{2} + \int \tfrac{x^2}{2}.2\ln x.\tfrac{1}{x}\, dx \\ &= -\tfrac{x^2}{2}(\ln x)^2 + \int x \ln x\, dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4},$$

temos finalmente $C_2 = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ e $C_1 = -\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$. Portanto, y_p é dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{x^5}{2}(\ln x)^2 + \frac{x^5}{2}\ln x - \frac{x^5}{4} + \frac{x^5}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^5}{4}\ln x \\ &= \frac{x^5}{4}\ln x - \frac{x^5}{4} = \frac{x^5}{4}(\ln x - 1). \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação é dada por

$$y = \frac{x^5}{4}(\ln x - 1) + C_1 x^3 + C_2 x^3 \ln x,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Questão 3. (3,0 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y''' + y'' + y' + y = 2x - e^{-x}.$$

Solução. Vamos primeiro determinar a solução geral da equação homogênea associada

$$\text{(H)} \qquad y''' + y'' + y' + y = 0.$$

Como (H) tem coeficientes constantes e o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1$ se fatora como $p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+1)$, as raízes características são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_{2,3} = \pm i$. Logo, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = \cos x$ e $y_3 = \sin x$ são 3 soluções L.I. de (H). Assim, a solução geral de (H) é

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes arbitrárias.

Vamos agora determinar uma solução particular y_p da equação não-homogênea

$$\text{(NH)} \qquad y''' + y'' + y' + y = 2x - e^{-x}.$$

Vamos procurar y_p da forma

$$y_p(x) = Ax + B + Cxe^{-x},$$

onde A, B e C são constantes. Temos

$$\begin{aligned}
y_p &= Ax + B + Cxe^{-x} & &= Ax + B + Cxe^{-x} \\
y_p' &= A + Ce^{-x} - Cxe^{-x} & &= A + Ce^{-x} - Cxe^{-x} \\
y_p'' &= -Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x} & &= -2Ce^{-x} + Cxe^{-x} \\
y_p''' &= 2Ce^{-x} + Ce^{-x} - Cxe^{-x} & &= 3Ce^{-x} - Cxe^{-x}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$y''' + y'' + y' + y = Ax + B + A + 2Ce^{-x} = (A+B) + Ax + 2Ce^{-x}.$$

Comparando com (NH), obtemos $A + B = 0$, $A = 2$ e $2C = -1$. Portanto, $A = 2$, $B = -2$ e $C = -\frac{1}{2}$. Logo, a solução geral de (NH) é

$$y = 2(x-1) - \frac{1}{2}xe^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes arbitrárias.