Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2008

Turma A

1ª Questão: (3,0) O desenvolvimento em série de potências da funçao $\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ é dado por $\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+1}\cdot\dfrac{2}{2k+1}\right]$, $|x|<2$.
Utilizando esta série estime o valor de $\ln(3)$ com erro menor do que 10^{-4}.

Solução: Fazendo $\dfrac{2+x}{2-x}=3$, obtemos $x=1$. Assim:

$$\ln\left(\frac{2+(1)}{2-(1)}\right) = \ln(3) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\cdot\frac{2}{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)}$$

Sendo assim, teremos:

$$\varepsilon = \left|\ln(3) - \sum_{k=0}^{p}\frac{2}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)}\right| =$$

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{2}{2^{2k+1}\cdot(2k+1)} \leq \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{2}{2^{2k+1}}$$

Série geométrica com
1º termo $\dfrac{2}{2^{2p+3}}$ e razão $\dfrac{1}{2^2}$.

Logo, ficamos com:

$$\varepsilon \leq \frac{\frac{2}{2^{2p+3}}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{2^{2p+3}}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{2^{2p}\cdot 3}$$

Assumindo $\dfrac{1}{2^{2p}\cdot 3} < 10^{-4}$, temos $2^{2p}\cdot 3 > 10000$.

Para que $2^{2p} > 3333$ devemos ter $2p > 11$, isto é, $2p \geq 12$ e $p \geq 6$. (Note que $p = 5$ não é suficiente)

Assim, com erro $\leq 10^{-4}$, temos:

$$\ln(3) \approx \sum_{k=0}^{6} \frac{2}{2^{2k+1} \cdot (2k+1)} = 2\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} + \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 2^{13}}\right)$$

2ª Questão: (3,0)

(a) Ache o desenvolvimento em série de potências e o raio de convergência de $f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2} - 1}{t^2} dt$.

(b) Calcule $f(1)$ com erro menor do que 10^{-5}.

Solução:

(a) Sabemos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, com $x \in \mathbb{R}$. $(R = +\infty)$

Daí segue:

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{n!} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$$

Consequentemente, teremos (sempre com $t \in \mathbb{R}$ e $(R = +\infty)$):

$$e^{-t^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{n!}$$

$$\frac{e^{-t^2} - 1}{t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n-2}}{n!}$$

Finalmente:

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2} - 1}{t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n-2}}{n!} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n \cdot t^{2n-2}}{n!} dt =$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n-1}}{(2n-1) \cdot n!} \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n-1}}{(2n-1) \cdot n!}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})$$

$$(R = +\infty)$$

(b)

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1^{2n-1}}{(2n-1) \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot n!}$$

Esta é uma série alternada com $\dfrac{1}{(2n-1)n!}$ decrescente em n, e com limite igual a zero (com $n \to \infty$). Logo, o erro será menor que o termo seguinte da série:

$$\left| f(1) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot n!} \right| < \frac{1}{(2k+1) \cdot (k+1)!}$$

Assumindo $(2k+1) \cdot (k+1)! > 10^5$, precisaremos de um $k = 7$.

Logo, com erro menor do que 10−5, temos:

$$f(1) \approx \sum_{n=0}^{7} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot n!}$$

3ª Questão: (4,0)

(a) Calcule a série de senos de $g(x) = x - \pi$, $0 < x < \pi$.

(b) Determine a expressão da soma da série de senos do item (a) no intervalo $I = [11\pi, 13\pi]$.

(c) Sabendo que $|\cos x| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$, $-\pi < x < \pi$, calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Solução:

(a) Consideramos a funçao $f(x) = \begin{cases} x - \pi & 0 < x < \pi \\ x + \pi & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$, sendo f a extensão ímpar de g. Vamos, então, calcular a série de Fourier, $S(x)$, de f.

Sendo f ímpar, $a_n = 0$ com $n \geq 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (x - \pi) \cdot \operatorname{sen}(nx) dx =$$

(Integral por partes com $u = x - \pi$ e $dv = \operatorname{sen}(nx)$)

$$= \frac{2}{\pi} \left((x - \pi) \left(\frac{-\cos(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{n}$$

Assim, a série resultante fica:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) = 2 \left(\operatorname{sen}(x) + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \dots \right)$$

(b) Para $11\pi < x < 12\pi$ temos $-\pi < x - 12\pi < 0$.

$$S(x) = S(x - 12\pi) = x - 12\pi + \pi = x - 11\pi$$

Para $12\pi < x < 13\pi$ temos $0 < x - 12\pi < \pi$

$$S(x) = S(x - 12\pi) = x - 12\pi - \pi = x - 13\pi$$

Assim, ficamos com $S(x) = \begin{cases} 0 & x = 11\pi, 12\pi, 13\pi \\ x - 13\pi & 12\pi < x < 13\pi \\ x - 11\pi & 11\pi < x < 12\pi \end{cases}$

(c) Lembrando da Identidade de Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

(i)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,(2x)}{4}\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi + 0) = 1$$

(ii) Como $\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{a_0}{2}$, teremos, $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$. Além disso, da série dada, vemos que: $a_n = \dfrac{4}{\pi(4n^2-1)}$, para n par e $a_n = 0$ para n ímpar.

(iii) $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$.

Da Identidade de Parseval segue que:

$$1 = \frac{\frac{16}{\pi^2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2-1)^2}$$

$$1 - \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2-8}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$