Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2006 - 23/10/2006

Turma A

Questão 1: (3,5 pontos)

(a) Desenvolva $f(x) = \int_0^x \dfrac{\arctan(t^2)}{t^2} dt$ em série de potências de x, indicando o raio de convergência. Avalie a diferença, em módulo, entre $\int_0^{\frac{1}{3}} \dfrac{\arctan(t^2)}{t^2} dt$ e $\frac{1}{3}$.

(b) Mostre que $\sqrt[3]{e}$ é aproximadamente igual a $\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{3^n n!}$, com erro menor que 10^{-4}.

Solução:

(a) Temos que

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n, \ para\ |r| < 1.$$

Fazendo $r = -u^2$, vem que

$$\frac{1}{1+u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n}, \ para\ |u| < 1.$$

Agora, como $\dfrac{d}{dt} \arctan t = \dfrac{1}{1+t^2}$, tem-se que

$$\frac{\arctan t^2}{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t^2)^{2n+1}}{t^2(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n}}{(2n+1)}, \ para\ 0 < |t| \leq 1.$$

Assim,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\arctan t^2}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n+1}}{(2n+1)(4n+1)}, \ para\ |x| \leq 1.$$

Logo, o raio de convergência é 1.

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\arctan t^2}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{4n+1}(2n+1)(4n+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^6.5} + \cdots$$

Como a série acima é alternada, é válido que $|s - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n| < a_{k+1}$. Dessa forma,

$$\left| \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\arctan t^2}{t^2} dt - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{3^6.5} = \frac{1}{3645} < \frac{1}{3}.10^{-3}$$

(b) Sabemos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ e que $e^x = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$, onde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\overline{x}).x^{n+1}}{(n+1)!}$ para $f(x) = e^x$ e $\overline{x}$ entre x e 0. Então,

$$e^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{3^n.n!} + R_4\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$R_4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{\overline{x}}}{3^5.5!} < \frac{2}{3^5.5!} = \frac{1}{14580}$$

Portanto, a diferença

$$e^{\frac{1}{3}} - \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{3^n.n!} < 10^{-4}.$$

Questão 2: (3,5 pontos) Seja $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

(a) Obtenha a série de Fourier de $f(x)$.

(b) Calcule a soma da série $\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-1}\right)$. (Sugestão: use (a).)

Solução:

(a) f é par. Logo, para $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \operatorname{sen}(nx)dx = 0, \text{pois o integrando é ímpar.}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\Bigg|_0^{\pi} = 2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cos(nx)dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+n\right)x + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-n\right)x\right]dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+n\right)x}{\frac{1}{\sqrt{3}}+n} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-n\right)x}{\frac{1}{\sqrt{3}}-n}\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+n\right)\pi}{1+\sqrt{3}n} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-n\right)\pi}{1-\sqrt{3}n}\right] = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\cos(nx) + \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\operatorname{sen}(nx)}{1+\sqrt{3}n} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\cos(nx) - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\operatorname{sen}(nx)}{1-\sqrt{3}n}\right] = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\cos(n\pi).\left[\frac{1}{1+\sqrt{3}n} + \frac{1}{1-\sqrt{3}n}\right] = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).(-1)^n.\frac{2}{1-3n^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore n \geq 1,\ a_n = -2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.(-1)^n.\frac{1}{3n^2-1}$$

Assim, a série de Fourier de f é:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{3n^2-1}\right)$$

(b) Como f é C^1 por partes e $f(\pi) = f(-\pi)$, então

$$\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{3n^2-1}\right),\ -\pi \leq x \leq \pi$$

$\underline{\text{em } x = \pi}$, $(-1)^n \cos(nx) = (-1)^{2n} = 1$. Logo,

$$\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-1}\right)$$

e a série em (b) tem soma

$$\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-1}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.\ \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

Questão 3: (3,0 pontos)

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine $a_0, a_1, b_1, b_2, \ldots, a_n, b_n$ tais que o valor da integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[x + |x| - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) \right) \right]^2 dx \text{ seja mínimo.}$$

(b) Para a_n e b_n determinados em (a), obtenha a soma da série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)), \ \ para \ \ -\pi \leq x \leq \pi$$

Solução:

(a) Os números $a_k,\ 0 \leq k \leq n$ e $b_k,\ 1 \leq k \leq n$ tais que o valor da integral seja mínimo são os coeficientes de Fourier da função $f(x) = x + |x|,\ -\pi < x \leq \pi$, que são dados por:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx,\ k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx,\ k \geq 1$$

Agora, como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

vem que

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(kx) dx \ \text{ e } \ b_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen}(kx) dx$$

Portanto,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\begin{aligned} (k \geq 1) \quad a_k &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{x \operatorname{sen}(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} dx \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ 0 + \left[\frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right\} \end{aligned}$$

Assim, para k par, $a_k = 0$ e para k ímpar, $a_k = -\dfrac{4}{\pi k^2}$.

$$\begin{aligned} (k \geq 1) \quad b_k &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen}(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{-x \cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{-\pi(-1)^k}{k} + \left[\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \right\} = \frac{-2(-1)^k}{k} \end{aligned}$$

Finalmente, tem-se que

$$a_0 = \pi$$

$$a_{2k} = 0,\ k \geq 1$$

$$a_{2k+1} = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2},\ k \geq 0$$

$$b_n = \frac{-2(-1)^n}{n},\ n \geq 1$$

(b) A série

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos{(2k+1)x}}{(2k+1)^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ \text{sen}\,(nx)$$

tem por soma em $-\pi \leq x \leq \pi$:

$$S(x) = \begin{cases} \pi & x = -\pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 2x & 0 < x < \pi \\ \pi & x = \pi \end{cases}$$

ou

$$S(x) = \begin{cases} x + |x| & -\pi < x < \pi \\ \pi & x = \pm\pi \end{cases}$$