Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2015 - 01/09/2015

Turma A
1ª Questão:

a) (1,0) Mostre que a seguência

$$0,29 \quad 0,298 \quad 0,2989 \quad 0,29898 \quad 0,298989$$

é convergente e calcule o valor de seu limite como razão entre dois inteiros.

b) Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - ...$$

Prove que a série é convergente e calcule explicitamente uma aproximação do valor da soma da série com erro menor que $2 \cdot 10^{-4}$.

Solução:

a) A sequencia dada pode ser descrita como:

$$\begin{cases} a_1 = 0,29 \\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 8 \cdot 10^{-(n+2)}, n \text{ ímpar} \\ a_n + 9 \cdot 10^{-(n+2)}, n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

Assim, pode-se concluir que a sequência é crescente, pois $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 1$.

Como a sequência é crescente e claramente limitada superiormente por $0,3$, temos que a sequência é convergente.

O convergência da sequência garante que todas as sub-sequências devem convergir para o mesmo valor. Sendo assim, definimos a seguinte sub-sequência:

$$\begin{cases} a_1 = 0,29 \\ a_{n+2} = a_n + 89 \cdot 10^{-(n+3)}, n \text{ ímpar} \end{cases}$$

A partir da expressão recursiva, é possível determinar uma expressão não recursiva para o termo geral da sub-sequência:

$$\begin{aligned}
&n = 1 \to a_3 = 0,29 + 89 \cdot 10^{-4} \\
&n = 3 \to a_5 = a_3 + 89 \cdot 10^{-6} = 0,29 + 89 \cdot 10^{-4} + 89 \cdot 10^{-6} \\
&n = 5 \to a_7 = a_5 + 89 \cdot 10^{-8} = 0,29 + 89 \cdot 10^{-4} + 89 \cdot 10^{-6} + 89 \cdot 10^{-8} \\
&\vdots \\
&n = k-2 \to a_k = 0,29 + 89 \cdot 10^{-4}(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + ... + 10^{-k+3}),\ k \text{ ímpar}
\end{aligned}$$

Assim, podemos calcular o limite desta sub-sequência da seguinte maneira:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,29 + 89 \cdot 10^{-4} \sum_{m=0}^{\infty} (10^{-2})^m$$

Como $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} (10^{-2})^m$ é a soma de uma PG de razão positiva menor que 1, temos:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,29 + 89 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{1-10^{-2}} = \left(29 + \frac{89}{99}\right)\frac{1}{100} = \frac{148}{495}$$

b) Para analisar a convergência da série, utilizamos o critério das séries alternadas:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0$
- $\displaystyle|a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} = \frac{|a_n|}{(2n+1)(2n)}$
  $\Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|, \forall n \geq 1$

Como o módulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério das séries alternadas, a série é convergente.

Deseja-se aproximar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$ por $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$ com $erro < \varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$. Para séries alternadas, o erro da aproximação respeita a seguinte relação:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n < |a_{k+1}|$$

Repare que se encontrarmos um valor de k que respeite $|a_{k+1}| < \epsilon$, temos que $erro < \epsilon$. Sendo assim, temos:

$$|a_{k+1}| = \frac{1}{(2k+1)!} < 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow (2k+1)! > 0,5 \cdot 10^4$$

$$\begin{gathered} k = 1 \to (2k+1)! = 3! = 6 < 5000 \\ k = 2 \to (2k+1)! = 5! = 120 < 5000 \\ k = 3 \to (2k+1)! = 7! = 5040 > 5000 \end{gathered}$$

Portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \simeq \sum_{n=1}^{3} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}$$

Com $erro < 10^{-3}$.

2ª Questão: Decidir se a série dada converge ou não. Em caso afirmativo, dizer se a convergência é absoluta ou condicional.

a) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

b) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{2n}(n!)^2}{n^{2n}}$

c) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln\frac{n}{3}}{n}$

Solução:

a) Aplicando o critério da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{2n+1}\left(\frac{3n-1}{n}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n-1}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n-1}$$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}\right)^{2}=\frac{1}{3^2}$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}e^{(2n-1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=e^2$, pois:
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x-1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{2x-1}}\underset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{\frac{u}{2-u}}$

    $\displaystyle\overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{u+1}}{\frac{1\cdot(2-u)-u\cdot(-1)}{(2-u)^2}}=2$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}e^{(2n-1)\ln\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)}=e^{-2}$, pois:
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x-1)\ln\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)}{\frac{1}{2x-1}}\underset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3-u}{3+2u}\right)}{\frac{u}{2-u}}$

    $\displaystyle\overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\frac{3+2u}{3-u}\cdot\frac{(-1)\cdot(3+2u)-(3-u)\cdot 2}{(3+2u)^2}}{\frac{1\cdot(2-u)-u\cdot(-1)}{(2-u)^2}}=-2$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{3^2}\cdot e^2\cdot e^{-2}=\frac{1}{9}<1$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$, a série converge absolutamente.

b) Aplicando o critério da razão:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{e^{2n+2}((n+1)!)^2}{(n+1)^{2n+2}}\cdot\frac{n^{2n}}{e^{2n}(n!)^2}=\frac{e^2(n+1)^2(n!)^2}{(n+1)^2(n+1)^{2n}}\cdot\frac{n^{2n}}{(n!)^2}=\left(\frac{e}{(\frac{n+1}{n})^n}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{(\frac{n+1}{n})^n}\right)^2=1$$

O critério da razão não leva a nenhuma conclusão, pois $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$. Porém sabe-se que:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left(\frac{e}{(\frac{n+1}{n})^n}\right)^2>1,\forall n>0$$

porque sabemos que a sequência $(\frac{n+1}{n})^n$ é crescente e tende a e. Isso implica que o termo geral não vai a zero e, portanto, a série diverge.

c) Para analisar a convergência da série, utilizamos o critério da integral, com $f(x)=\frac{\ln\frac{x}{3}}{x}$. Para isso, precisamos verificar se o termo geral da série vai a zero e se f é decrescente.

- $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x}{3}}{x}\overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{3}}{1}=0$
- $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(\frac{x}{3})\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(\frac{x}{3})}{x^2}<0,\forall x>3e\Rightarrow f$ é decrescente $\forall x>3e$.

$$\int_{10}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{10}^{\infty}\frac{\ln\frac{x}{3}}{x}\,dx\underset{u=\ln\frac{x}{3}\Rightarrow du=\frac{dx}{x}}{=}\int_{\ln 10}^{\infty}u\,du=\lim_{u\to\infty}\frac{u^2}{2}-\frac{(\ln 10)^2}{2}=\infty$$

Como a integral imprópria diverge, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge. Porém, a série alternada converge pelo critério das séries alternadas, pois, como foi visto anteriormente, o módulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero. Sendo assim, a série converge condicionalmente.

3ª Questão:

a) (2,5) Determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}(x-3)^n$$

é convergente.

b) (1,5) Estudar a convergência em termos de $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^{\alpha}}$$

Solução:

a) Aplicando o critério da razão, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)|x-3|^{n+1}}{(n+2)^2\, 2^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)^2\, 2^{n+1}}{(3n-2)|x-3|^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \frac{|x-3|}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^2 \frac{|x-3|}{2} = \frac{|x-3|}{2}$$

Para $\frac{|x-3|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 2$: a série converge absolutamente, pelo critério da razão.

Para $\frac{|x-3|}{2} > 1 \Leftrightarrow |x-3| > 2$: o termo geral não vai a zero e, portanto, a série diverge.

Para $\frac{|x-3|}{2} = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = 5$: o critério da razão é inconclusivo, outros critérios devem ser utilizados.

Para $x = 5$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}(x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2}$$

Para analisar a convergência desta série, utilizamos o critério da comparação no limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n}{(n+1)^2\, 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{(1+\frac{1}{n})^2\, 2} = \frac{3}{2}$$

Como $0 < L < \infty$, temos que série diverge, pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série divergente.

Para $x = 1$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}(x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(3n-2)}{(n+1)^2\, 2}$$

Esta série não apresenta convergência absoluta, pois já verificamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2}$ diverge.

Para verificar se há convergência condicional, utilizamos o critério das séries alternadas:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{(n^2+2n+1)\, 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{(n+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})\, 2} = 0$
- $\displaystyle |a_n| = f(n) = \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2}$

  $\displaystyle f'(x) = \frac{3\cdot(x+1)^2-(3x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{7-3x}{(x+1)^3} < 0, \forall x > \frac{7}{3}$

  $\therefore |a_n|$ é decrescente $\forall n \geq 3$.

Como o módulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério das séries alternadas, a série é convergente. Portanto, a série converge condicionalmente.

b) Para analisar a convergência da série, utilizamos o critério da integral, com $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))^\alpha}$. Como $\alpha > 0$, o termo geral da série vai a zero e f é claramente positiva e decrescente para $x \geq 3$.

$$\int_3^\infty f(x)\,dx = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))^\alpha}\,dx \underset{u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}}{=} \int_{\ln 3}^\infty \frac{1}{u(\ln u)^\alpha}\,du = \underset{v=\ln u \Rightarrow dv=\frac{du}{u}}{=} \int_{\ln(\ln 3)}^\infty \frac{1}{v^\alpha}\,dv$$

$$\Rightarrow \int_3^\infty f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{v\to\infty} \frac{v^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\ln(\ln 3))^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ \displaystyle\lim_{v\to\infty} \ln(v) - \ln(\ln(\ln 3)), & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{v^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty, & 1-\alpha > 0 \\ 0, & 1-\alpha < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_3^\infty f(x)\,dx = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha \leq 1 \\ -\dfrac{(\ln(\ln 3))^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

A série converge se e somente se a integral imprópria converge. Sendo assim, temos que a série converge para $\alpha > 1$ e diverge para $0 < \alpha \leq 1$.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2015 - 01/09/2015

Turma B
1ª Questão:

a) (1,0) Mostre que a seguência

$$0,79 \quad 0,798 \quad 0,7989 \quad 0,79898 \quad 0,798989$$

é convergente e calcule o valor de seu limite como razão entre dois inteiros.

b) Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - ...$$

Prove que a série é convergente e calcule explicitamente uma aproximação do valor da soma da série com erro menor que $2 \cdot 10^{-3}$.

Solução:

a) A sequencia dada pode ser descrita como:

$$\begin{cases} a_1 = 0,79 \\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 8 \cdot 10^{-(n+2)}, n \text{ ímpar} \\ a_n + 9 \cdot 10^{-(n+2)}, n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

Assim, pode-se concluir que a sequência é crescente, pois $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 1$.

Como a sequência é crescente e claramente limitada superiormente por $0,8$, temos que a sequência é convergente.

O convergência da sequência garante que todas as sub-sequências devem convergir para o mesmo valor. Sendo assim, definimos a seguinte sub-sequência:

$$\begin{cases} a_1 = 0,79 \\ a_{n+2} = a_n + 89 \cdot 10^{-(n+3)}, n \text{ ímpar} \end{cases}$$

A partir da expressão recursiva, é possível determinar uma expressão não recursiva para o termo geral da sub-sequência:

$$n = 1 \rightarrow a_3 = 0,79 + 89 \cdot 10^{-4}$$
$$n = 3 \rightarrow a_5 = a_3 + 89 \cdot 10^{-6} = 0,79 + 89 \cdot 10^{-4} + 89 \cdot 10^{-6}$$
$$n = 5 \rightarrow a_7 = a_5 + 89 \cdot 10^{-8} = 0,79 + 89 \cdot 10^{-4} + 89 \cdot 10^{-6} + 89 \cdot 10^{-8}$$
$$\vdots$$
$$n = k - 2 \rightarrow a_k = 0,79 + 89 \cdot 10^{-4}(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + ... + 10^{-k+3}), \; k \text{ ímpar}$$

Assim, podemos calcular o limite desta sub-sequência da seguinte maneira:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,79 + 89 \cdot 10^{-4} \sum_{m=0}^{\infty} (10^{-2})^m$$

Como $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(10^{-2})^m$ é a soma de uma PG de razão positiva menor que 1, temos:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,79 + 89 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{1-10^{-2}} = \left(79 + \frac{89}{99}\right)\frac{1}{100} = \frac{791}{990}$$

b) Para analisar a convergência da série, utilizamos o critério das séries alternadas:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)!} = 0$
- $\displaystyle |a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{|a_n|}{(2n+2)(2n+1)}$
  $\Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|, \forall n \geq 0$

Como o módulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério das séries alternadas, a série é convergente.

Deseja-se aproximar $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$ por $\displaystyle\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$ com $erro < \varepsilon = 2\cdot 10^{-3}$. Para séries alternadas, o erro da aproximação respeita a seguinte relação:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n < |a_{k+1}|$$

Repare que se encontrarmos um valor de k que respeite $|a_{k+1}| < \epsilon$, temos que $erro < \epsilon$. Sendo assim, temos:

$$|a_{k+1}| = \frac{1}{(2k+2)!} < 2\cdot 10^{-3} \Rightarrow (2k+2)! > 0,5\cdot 10^3$$

$$k = 1 \to (2k+2)! = 4! = 24 < 500$$
$$k = 2 \to (2k+2)! = 6! = 720 > 500$$

Portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!} \simeq \sum_{n=0}^{2}(-1)^n\frac{1}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}$$

Com $erro < 2\cdot 10^{-3}$.

2ª Questão: Decidir se a série dada converge ou não. Em caso afirmativo, dizer se a convergência é absoluta ou condicional.

a) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n-1}$

b) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{3n}(n!)^3}{n^{3n}}$

c) (1,0) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln\frac{n}{2}}{n}$

Solução:

a) Aplicando o critério da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{3n+2}\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n-1}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n-1}$$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^{3}=\frac{1}{2^3}$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}e^{(3n-1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=e^3$, pois:
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3x-1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{3x-1}}\underset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{\frac{u}{3-u}}$
    $\displaystyle\overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{u+1}}{\frac{1\cdot(3-u)-u\cdot(-1)}{(3-u)^2}}=3$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}e^{(3n-1)\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)}=e^{-3}$, pois:
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3x-1)\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)}{\frac{1}{3x-1}}\underset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2-u}{2+u}\right)}{\frac{u}{3-u}}$
    $\displaystyle\overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\frac{2+u}{2-u}\cdot\frac{(-1)\cdot(2+u)-(2-u)\cdot 1}{(2+u)^2}}{\frac{1\cdot(3-u)-u\cdot(-1)}{(3-u)^2}}=-3$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{2^3}\cdot e^3\cdot e^{-3}=\frac{1}{8}<1$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$, a série converge absolutamente.

b) Aplicando o critério da razão:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{e^{3n+3}((n+1)!)^3}{(n+1)^{3n+3}}\cdot\frac{n^{3n}}{e^{3n}(n!)^3}=\frac{e^3(n+1)^3(n!)^3}{(n+1)^3(n+1)^{3n}}\cdot\frac{n^{3n}}{(n!)^3}=\left(\frac{e}{(\frac{n+1}{n})^n}\right)^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{(\frac{n+1}{n})^n}\right)^3=1$$

O critério da razão não leva a nenhuma conclusão, pois $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$. Porém sabe-se que:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left(\frac{e}{(\frac{n+1}{n})^n}\right)^3>1,\forall n>0$$

porque sabemos que a sequência $(\frac{n+1}{n})^n$ é crescente e tende a e. Isso implica que o termo geral não vai a zero e, portanto, a série diverge.

c) Para analisar a convergência da série, utilizamos o critério da integral, com $f(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{x}$. Para isso, precisamos verificar se o termo geral da série vai a zero e se f é decrescente.

- $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}}{1}=0$
- $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(\frac{x}{2})\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(\frac{x}{2})}{x^2}<0,\forall x>2e\Rightarrow f$ é decrescente $\forall x>2e$.

$$\int_6^\infty f(x)\,dx=\int_6^\infty\frac{\ln\frac{x}{2}}{x}\,dx\underset{u=\ln\frac{x}{2}\Rightarrow du=\frac{dx}{x}}{=}\int_{\ln 6}^\infty u\,du=\lim_{u\to\infty}\frac{u^2}{2}-\frac{(\ln 6)^2}{2}=\infty$$

Como a integral imprópria diverge, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge. Porém, a série alternada converge pelo critério das séries alternadas, pois, como foi visto anteriormente, o módulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero. Sendo assim, a série converge condicionalmente.

3ª Questão:

a) (2,5) Determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^{n+1}} (x-2)^n$$

é convergente.

b) (1,5) Estudar a convergência em termos de $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^{\alpha}}$$

Solução:

a) Aplicando o critério da razão, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)|x-2|^{n+1}}{(n+2)^2\, 2^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)^2\, 2^{n+1}}{(3n-2)|x-2|^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \frac{|x-2|}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^2 \frac{|x-2|}{2} = \frac{|x-2|}{2}$$

Para $\frac{|x-2|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 2$: a série converge absolutamente, pelo critério da razão.

Para $\frac{|x-2|}{2} > 1 \Leftrightarrow |x-2| > 2$: o termo geral não vai a zero e, portanto, a série diverge.

Para $\frac{|x-2|}{2} = 1 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$: o critério da razão é inconclusivo, outros critérios devem ser utilizados.

Para $x = 4$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2^{n+1}} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2}$$

Para analisar a convergência desta série, utilizamos o critério da comparação no limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-2}{(n+1)^2\, 2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n}{(n+1)^2\, 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{(1+\frac{1}{n})^2\, 2} = \frac{3}{2}$$

Como $0 < L < \infty$, temos que série diverge, pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série divergente.

Para $x = 0$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\,2^{n+1}}(x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(3n-2)}{(n+1)^2\,2}$$

Esta série não apresenta convergência absoluta, pois já verificamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\,2}$ diverge.

Para verificar se há convergência condicional, utilizamos o critério das séries alternadas:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2\,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{(n^2+2n+1)\,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{(n+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})\,2} = 0$
- $\displaystyle |a_n| = f(n) = \frac{3n-2}{(n+1)^2\,2}$

  $\displaystyle f'(x) = \frac{3\cdot(x+1)^2-(3x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{7-3x}{(x+1)^3} < 0, \forall x > \frac{7}{3}$

  $\therefore |a_n|$ é decrescente $\forall n \geq 3$.

Como o módulo do termo geral da série é descrescente e vai a zero, pode-se afirmar que, pelo critério das séries alternadas, a série é convergente. Portanto, a série converge condicionalmente.

b) Para analisar a convergência da série, utilizamos o critério da integral, com $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))^\alpha}$. Como $\alpha > 0$, o termo geral da série vai a zero e f é claramente positiva e decrescente para $x \geq 3$.

$$\int_3^\infty f(x)\,dx = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))^\alpha}\,dx \underset{u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}}{=} \int_{\ln 3}^\infty \frac{1}{u(\ln u)^\alpha}\,du = \underset{v=\ln u \Rightarrow dv=\frac{du}{u}}{=} \int_{\ln(\ln 3)}^\infty \frac{1}{v^\alpha}\,dv$$

$$\Rightarrow \int_3^\infty f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{v\to\infty} \frac{v^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\ln(\ln 3))^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ \displaystyle\lim_{v\to\infty} \ln(v) - \ln(\ln(\ln 3)), & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{v^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty, & 1-\alpha > 0 \\ 0, & 1-\alpha < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_3^\infty f(x)\,dx = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha \leq 1 \\ -\dfrac{(\ln(\ln 3))^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

A série converge se e somente se a integral imprópria converge. Sendo assim, temos que a série converge para $\alpha > 1$ e diverge para $0 < \alpha \leq 1$.