MAT-2456 Primeira Prova, 2014
Provas Tipos A e B

Questão 1.

a) Determine se a sequência abaixo é convergente ou divergente e, caso convergente, determine o seu limite:

$$\text{Tipo A:}\quad a_n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n; \quad \text{Tipo B:} \quad a_n = \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n.$$

Solução: Pode ser resolvido de várias maneiras.
Por exemplo,

$$a_n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n =$$
$$= \left(1+\frac{3}{n}\right)^n \Bigg/ \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{e^3}{e^2} = e$$

$$a_n = \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n = a_n = \left(\frac{n+4}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+3}\right)^n =$$
$$= \left(1+\frac{4}{n}\right)^n \Bigg/ \left(1+\frac{3}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{e^4}{e^3} = e$$

---

b) Verifique se existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se

$$\text{Tipo A: } a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{3.6.9.12...(3n)}{1.4.7.10...(3n-2)}; \quad \text{Tipo B: } a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{5.10.15.20...(5n)}{1.6.11.16...(5n-4)}$$

Solução: Vamos mostrar que a_n é decrescente e, como $a_n > 0$ (limitada inferiormente), existirá o limite.

Para o Tipo A:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}\frac{3n+3}{3n}\frac{3n-2}{3n+1} = \frac{3n-2}{3n+1} < 1,$$

ou seja, $a_{n+1} < a_n$ (decrescente).

Para o Tipo B:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}\frac{5n+5}{5n}\frac{5n-4}{5n+1} = \frac{5n-4}{5n+1} < 1,$$

ou seja, $a_{n+1} < a_n$ (decrescente).

Questão 2. Classifique as séries abaixo em divergentes, absolutamente convergentes ou condicionalmente convergentes:

a) Tipo A: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{5n+2}{4n+1}\right)^n$; Tipo B: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{6n+2}{5n+1}\right)^n$.

Solução: os termos gerais, em módulo, são

$$\text{Tipo A:}|a_n| = n\left(\frac{5n+2}{4n+1}\right)^n, \text{ e Tipo B: } |a_n| = n\left(\frac{6n+2}{5n+1}\right)^n.$$

Tentaremos o *Teste da Raiz*:

$$\text{Tipo A: } \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}\left(\frac{5n+2}{4n+1}\right), \text{ e Tipo B: } \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}\left(\frac{6n+2}{5n+1}\right).$$

Se você observar bem, verá que, em ambos os tipos de prova, $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, ou seja, o termo geral não pode tender a zero e, portanto, a série diverge.

b) Tipos A e B: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n!)^3}{(3n)!}$.

Solução: o termo geral, em módulo, é $|a_n| = (n!)^3/[(3n)!]$ e, como envolve fatoriais, vamos usar o *Teste da Razão*:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{[(n+1)!]^3}{(n!)^3}\frac{(3n)!}{(3n+3)!} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \longrightarrow \frac{1}{27} < 1,$$

ou seja, a série é *absolutamente convergente*.

c) Tipos A e B: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$.

Solução: Podemos aplicar aqui o *Teste da Integral*, com $f(x) = 1/x\ln(x)$. Para isso, precisamos primeiramente verificar se essa função é decrescente:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2\ln(x)} - \frac{1}{x^2\ln^2(x)} = -\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln^2(x)} < 0, \text{ se } x \geq 2.$$

Como $\int 1/[x\ln(x)]\,dx = \ln(|\ln(x)|)$, temos

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x^2\ln^2(x)}dx = \lim_{b\to\infty}[\ln(|\ln(b)|) - \ln(|\ln(2)|) = \infty,$$

ou seja, a série *diverge.*

d) Tipos A e B $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^2}$.

Solução: Vamos aplicar o *Teste da Comparação no Limite*, usando a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, que é divergente. Sejam $a_n = 1/[\ln(n)]^2 > 0$ e $b_n = 1/n > 0$. Temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2(n)}{n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2(x)}{x},$$

e agora podemos aplicar a *Regra de L'Hospital* para calcular esse limite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0,$$

ou seja, para n grande, temos que $a_n > b_n$ e, portanto, a série *diverge.*

Questão 3.

a) Tipos A e B: decida se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\arctan(n)}{n}$ diverge, converge condicionalmente, ou converge absolutamente.

Solução: o termo geral é $a_n = (-1)^{n+1}\arctan(n)/n$. Em módulo, como $3/4 < \pi/4 = \arctan(1) \le \arctan(n) < \pi/2$, temos

$$\frac{\pi}{4}\frac{1}{n} \le |a_n| < \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}.$$

Pelo *Teste da Comparação*, como $|a_n| \ge \pi/4n$ e, como a série $\sum_{n+1}^{\infty}\pi/(4n)$ é divergente (é um múltiplo da série harmônica), a série não converge absolutamente.

Vamos verificar se converge condicionalmente, usando o *Teste da Série Alternada*, também conhecido como *Teste de Leibniz.* Para isso, precisamos verificar se $|a_n|$ é decrescente e se tende a zero.

Claramente, como $\arctan(n) < \pi/2$, $|a_n| \longrightarrow 0$.

Seja, agora, $f(x) = \arctan(x)/x$. Sua derivada é

$$f'(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\arctan(x)}{x^2(1+x^2)},$$

que tem um denominador sempre positivo e o numerador $x-(1+x^2)\arctan(x) < x - 3(1+x^2)/4 << 0$, se $x \geq 1$. Daí, $|a_n|$ é decrescente.

Portanto, a série *converge condicionalmente*.

b) Determine <u>todos</u> os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série converge:

$$\text{Tipo A: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-1)^{2n}, \text{ e Tipo B: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-2)^{2n}.$$

Solução: vamos usar o *Teste da Razão* para achar o *raio de convergência.*

Para o Tipo A, temos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}|x-1|^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}|x-1|^2 \longrightarrow \frac{|x-1|^2}{e},$$

donde obtemos que se $|x-1|^2 < e$, ou seja, se $|x-1| < \sqrt{e}$, a série converge absolutamente e se $|x-1| > \sqrt{e}$ o termo geral não tende a zero e, portanto, a série diverge.

Falta testar convergência para $|x-1| = \sqrt{e}$. Neste caso,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

porque sabemos que a sequência

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

é crescente e tende a e. Isso implica que o termo geral não tende a zero e, portanto, se $|x-1| = \sqrt{e}$, a série diverge.

Portanto, a série converge em todos os pontos do intervalo $|x-1| < \sqrt{e}$, ou seja, se $1-\sqrt{e} < x < 1+\sqrt{e}$.

Para o Tipo B, é quase igual, obtendo a resposta que a série converge em todos os pontos do intervalo $|x-2| < \sqrt{e}$, ou seja, se $2-\sqrt{e} < x < 2+\sqrt{e}$.