Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2013 - 09/09/2013

Turma A
Questão 1: (3,5 pontos)

(a) Calcule, justificando, o limite das seguintes sequências:

(i) $x_n = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}$

(ii) $x_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{4n-1}{2n+3}\right)^n$

(b) Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por:

$$x_1 = x_2 = 1 \text{ e } \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$$

Solução:

(a) (i) Manipula-se o termo geral:

$$x_n = (n^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{\ln n}{n^2}}$$

Calcula-se o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n^2}} \\ &= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2}}\end{aligned}$$

Sendo $a_n = f(n)$ onde f é uma função real, calcula-se o limite utilizando a Regra de L'Hôspital para sua solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \tag{1}$$

Logo, o limite pedido é:

$$e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2}} = e^0 = 1$$

(ii)

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{4n-1}{2n+3}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{4n}{2n}\right)^n\left(\frac{1-\frac{1}{4n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^n \\ &= \frac{2^n}{2^n}\left(\frac{1-\frac{1}{4n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^n \\ &= \left(\frac{1-\frac{1}{4n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^n\end{aligned}$$

Fazendo o limite:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{e^{\frac{3}{2}}} = e^{-\frac{7}{4}}$$

(b) Para mostrar que a sequência é convergente, vamos mostrar que a sequência é decrescente e de termos positivos, portanto limitada.

Primeiramente notemos que $x_n > 0$. Vamos provar por indução. De fato, $x_3 = \frac{1}{2} > 0$. Supondo que $x_k > 0$, para todo $k \leq n$ temos que

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}} > 0$$

Portanto, $x_{n+1} > 0$. Assim $x_n > 0$, para todo n.

Do enunciado:

$$\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{n+1}}$$
$$\Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}$$

Logo, a sequência é decrescente e limitada, portanto converge.

Como a sequência converge, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

Supondo que $L \neq 0$, substituindo na relação de recorrência:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{1}{L} = 0$$

Absurdo. Portanto $L = 0$.

Questão 2: (3,0 pontos) Determine se as séries abaixo convergem absolutamente, condicionalmente ou divergem:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n^2+2}{2n^3+1}\right)$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^3\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$

Solução:

(a) Primeiramente analisemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{n^2+2}{2n^3+1}\right)\right|$

Faz-se uma comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n}$, termo geral de uma série que diverge. Logo, aplicando esse critério:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{2n^3+1} = \frac{1}{2}$$

Logo, pelo Critério da Comparação no Limite, a série tem o mesmo comportamento da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que diverge, logo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2}{2n^3+1}\right)$também diverge.

A série em questão é alternada, logo a convergência é testada pelo Critério de Leibnitz. Deve-se verificar que

i) $b_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^3+1}\right)$ é decrescente;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Considere $f(x) = \frac{x^2+2}{2x^3+1}$. Derivando temos $f'(x) = \frac{-2x^4-12x^2+2x}{(2x^3+1)^2}$. Como o limite $\lim\limits_{x\to\infty} -2x^4-12x^2+2x = -\infty$ e o numerador é sempre uma função positiva, existe $M>0$ tal que $f'(x)<0$, para $x>M$.

E

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{2n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1+2/n^2}{2+1/n^3}\right) = 0.\frac{1}{2} = 0.$$

Logo, a série converge pelo Critério de Leibnitz.

Com isso, a série converge condicionalmente.

(b) Para essa série utiliza-se o Critério da Integral.

Seja $f(x) = xe^{-x^2}$, para $x>1$. A função é decrescente, pois $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2) < 0$, se $x>1$.

A integral a ser calculada é dada por:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

A integral imprópria deve ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x^2}\,dx \\
&\quad \text{Fazendo a seguinte mudança de variáveis: } u = x^2 \text{ e } du = 2x.dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u}\,du \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_0^{b^2} \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-b^2}-1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Como a integral é convergente, conclui-se que a série converge absolutamente pelo Critério da Integral.

(c) Notemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(1/x^3)}{1/x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\text{sen}\,1/x^3.(-3/x^4)}{-3/x^4} = 0$$

Portanto, a série pode ser convergente.

Para analisar o tipo de convergência, estuda-se o comportamento da série em módulo, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3\left[1-\cos\frac{1}{n^3}\right]$$

Faz-se uma comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n^3}$, um termo geral cuja série correspondente é convergente. Aplicando o Critério da Comparação no Limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos 1/n^3}{1/n^6}$$

mudança de variavel:$u = 1/n^3$

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u^2}$$

Utilizando a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}$$

Pelo Critério da Comparação no Limite, a série (em módulo) tem o mesmo comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ logo converge. Portanto, a série converge absolutamente.

Questão 3: (3,5 pontos)

(a) Obtenha todos os valores reais de x para os quais a série abaixo é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n\ln(n+1)}$$

(b) Determine para quais valores de $p > 0$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p}\right)$ é convergente e para quais é divergente.

Solução:

(a) Para $x = 0$ a série converge. Tomemos $x \neq 0$. Aplicando o critério da razão para o módulo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2|x|)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+2)} \cdot \frac{n\ln(n+1)}{(2|x|)^n} = \lim_{n\to\infty} 2|x| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}$$

Calculando o limite auxiliar:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2|x|)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+2)} \cdot \frac{n\ln(n+1)}{(2|x|)^n} = 2|x|$$

Para $2|x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, temos que o módulo converge, logo a série converge absolutamente.

Para $2|x| > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ ou $x < -\frac{1}{2}$, temos que o módulo diverge. Como estamos aplicando o critério da razão, podemos afirmar que para uma razão maior que 1 o termo geral não vai a zero, logo a série diverge.

Para $x = \frac{1}{2}$, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$. Aplicando o critério da comparação no limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

Passando para variável real:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$ se comporta como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Utilizando o critério da integral: $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$ é decrescente para $x>2$, pois $x_1>x_2>2 \Rightarrow x_1\ln(x_1)>x_2\ln(x_2)$; e

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{b}\frac{du}{u}=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^b=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln(b))-ln(\ln 2)=\infty$$

Como a integral diverge, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ diverge. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$ se comporta da mesma maneira que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, pode-se afirmar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$ também diverge. Logo a série diverge para $x=\frac{1}{2}$

Para $x=-\frac{1}{2}$, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

Como se trata de uma série alternada cujo módulo diverge, aplicamos o Critério de das Séries Alternadas.

i) $b_n=\frac{1}{n\ln(n+1)}$ é decrescente $\forall n>2$, pois $x_n=n\ln(n+1)$ é crescente $\forall n>2$ (ver acima).

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}=0$

Sendo assim, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$ converge pelo Critério das Séries Alternadas. Portanto, para $x=-\frac{1}{2}$ a série converge condicionalmente.

(b) Multiplicando pelo conjugado, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}}$$

Aplicando o critério da comparação no limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}}}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^p}}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^p}}+1}=\frac{1}{2}$$

Sendo assim, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}}$ se comporta como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$.

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ é uma série harmônica, pode-se dizer dizer que ela converge para $\frac{p}{2}>1\Rightarrow p>2$ e diverge para $\frac{p}{2}\leq 1\Rightarrow p\leq 2$. O mesmo resultado vale para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p}\right)$, pois vimos que, pelo critério da comparação no limite, elas se comportam da mesma maneira.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2013 - 09/09/2013

Turma B
Questão 1: (3,5 pontos)

(a) Calcule, justificando, o limite das seguintes sequências:

(i) $x_n = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}$

(ii) $x_n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{6n-1}{2n+5}\right)^n$

(b) Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por:

$$x_1 = x_2 = 1 \text{ e } \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$$

Solução:

(a) (i) Manipula-se o termo geral:

$$\begin{aligned} x_n &= (n^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n^2}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n^2}} \end{aligned}$$

Calcula-se o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n^2}} \\ &= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}} \end{aligned}$$

Sendo $a_n = f(n)$ onde f é uma função real, calcula-se o limite utilizando a Regra de L'Hôspital para sua solução:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = 0 \tag{2}$$

Logo, o limite pedido é:

$$e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}} = e^0 = 1$$

(ii)

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{3^n}\left(\frac{6n-1}{2n+5}\right)^n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{6n}{2n}\right)^n\left(\frac{1-\frac{1}{6n}}{1+\frac{5}{2n}}\right)^n \\ &= \frac{3^n}{3^n}\left(\frac{1-\frac{1}{6n}}{1+\frac{5}{2n}}\right)^n \\ &= \left(\frac{1-\frac{1}{6n}}{1+\frac{5}{2n}}\right)^n \end{aligned}$$

Fazendo o limite:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{e^{\frac{5}{2}}} = e^{-\frac{16}{6}}$$

(b) Para mostrar que a sequência é convergente, vamos mostrar que a sequência é decrescente e de termos positivos, portanto limitada.

Primeiramente notemos que $x_n > 0$. Vamos provar por indução. De fato, $x_3 = \frac{1}{2} > 0$. Supondo que $x_k > 0$, para todo $k \leq n$ temos que

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}} > 0$$

Portanto, $x_{n+1} > 0$. Assim $x_n > 0$, para todo n.

Do enunciado:

$$\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{n+1}}$$
$$\Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}$$

Logo, a sequência é decrescente e limitada, portanto converge.

Como a sequência converge, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

Supondo que $L \neq 0$, substituindo na relação de recorrência:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{1}{L} = 0$$

Absurdo. Portanto $L = 0$.

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Questão 2: (3,0 pontos) Determine se as séries abaixo convergem absolutamente, condicionalmente ou divergem:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n^3+3}{3n^4+1}\right)$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n^2\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

Solução:

(a) Primeiramente analisemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{n^3+3}{3n^4+1}\right)\right|$

Faz-se uma comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n}$, termo geral de uma série que diverge. Logo, aplicando esse critério:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3n}{3n^4+1} = \frac{1}{2}$$

Logo, pelo Critério da Comparação no Limite, a série tem o mesmo comportamento da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que diverge, logo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+3}{3n^4+1}\right)$ também diverge.

A série em questão é alternada, logo a convergência é testada pelo Critério de Leibnitz. Deve-se verificar que

i) $b_n = \left(\frac{n^3+3}{3n^4+1}\right)$ é decrescente;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Considere $f(x) = \frac{x^3+3}{3x^4+1}$. Derivando temos $f'(x) = \frac{-3x^6-36x^3+3x^2}{(3x^4+1)^2}$. Como o limite $\lim\limits_{x\to\infty} -3x^6-36x^3+3x^2 = -\infty$ e o numerador é sempre uma função positiva, existe $M>0$ tal que $f'(x)<0$, para $x>M$. E

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3}{3n^4+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1+3/n^3}{3+1/n^4}\right) = 0.\frac{1}{3} = 0.$$

Logo, a série converge pelo Critério de Leibnitz.

Com isso, a série converge condicionalmente.

(b) Para essa série vamos utilizar o Critério da Integral.

Seja $f(x) = xe^{-x^2}$, para $x>1$. A função é decrescente, pois $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2) < 0$, se $x>1$.

A integral a ser calculada é dada por:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

A integral imprópria deve ser calculada da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,dx \\
&\quad \text{Fazendo a seguinte mudança de variáveis: } u = x^2 \text{ e } du = 2x.dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u}\,du \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_0^{b^2} \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-b^2}-1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Como a integral é convergente, conclui-se que a série converge absolutamente pelo Critério da Integral.

(c) Notemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(1/x^2)}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 1/x^2.(-2/x^3)}{-2/x^3} = 0$$

Portanto, a série pode ser convergente.

Para analisar o tipo de convergência, estuda-se o comportamento da série em módulo, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3\left[1-\cos\frac{1}{n^2}\right]$$

Faz-se uma comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n^2}$, um termo geral cuja série correspondente é convergente. Aplicando o Critério da Comparação no Limite:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos 1/n^2}{1/n^4} \\
&\text{mudança de variavel:} u = 1/n^2 \\
&\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u^2} \\
&\text{Utilizando a Regra de L'Hôspital:} \\
&\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Pelo Critério da Comparação no Limite, a série (em módulo) tem o mesmo comportamento da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ logo converge. Portanto, a série converge absolutamente.

Questão 3: (3,5 pontos)

(a) Obtenha todos os valores reais de x para os quais a série abaixo é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n\ln(n+1)}$$

(b) Determine para quais valores de $p > 0$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p}\right)$ é convergente e para quais é divergente.

Solução:

(a) Aplicando o critério da razão para o módulo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3|x|)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+2)} \cdot \frac{n\ln(n+1)}{(3|x|)^n} = \lim_{n\to\infty} 3|x|\frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty} 3|x|\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}$$

Calculando o limite auxiliar:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3|x|)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+2)} \cdot \frac{n\ln(n+1)}{(3|x|)^n} = 3|x|$$

Para $3|x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, temos que o módulo converge, logo a série converge absolutamente.

Para $3|x| > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ ou $x < -\frac{1}{3}$, temos que o módulo diverge. Como estamos aplicando o critério da razão, podemos afirmar que para uma razão maior que 1 o termo geral não vai a zero, logo a série diverge.

Para $x = \frac{1}{3}$, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$. Aplicando o critério da comparação no limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

Passando para variável real:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$ se comporta como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Utilizando o critério da integral: $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ é decrescente para $x > 2$, pois $x_1 > x_2 > 2 \Rightarrow x_1\ln(x_1) > x_2\ln(x_2)$; e

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{b} \frac{du}{u} = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln(b)) - ln(\ln 2) = \infty$$

Como a integral diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$ se comporta da mesma maneira que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, pode-se afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$ também diverge. Logo a série diverge para $x = \frac{1}{3}$

Para $x = -\frac{1}{3}$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

Como se trata de uma série alternada cujo módulo diverge, aplicamos o Critério de das Séries Alternadas.

i) $b_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}$ é decrescente $\forall n > 2$, pois $x_n = n\ln(n+1)$ é crescente $\forall n > 2$ (ver acima).

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)} = 0$

Sendo assim, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$ converge pelo Critério das Séries Alternadas. Portanto, para $x = -\frac{1}{2}$ a série converge condicionalmente.

(b) Multiplicando pelo conjugado, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^p+1} + \sqrt{n^p}}{\sqrt{n^p+1} + \sqrt{n^p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1} + \sqrt{n^p}}$$

Aplicando o critério da comparação no limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}}}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^p}}{\sqrt{n^p+1} + \sqrt{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^p}}+1} = \frac{1}{2}$$

Sendo assim, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1} + \sqrt{n^p}}$ se comporta como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ é uma série harmônica, pode-se dizer dizer que ela converge para $\frac{p}{2} > 1 \Rightarrow p > 2$ e diverge para $\frac{p}{2} \leq 1 \Rightarrow p \leq 2$. O mesmo resultado vale para $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p}\right)$, pois vimos que, pelo critério da comparação no limite, elas se comportam da mesma maneira.